T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI | ORTAÖĞRETİM | DERS KİTABI

Matematik

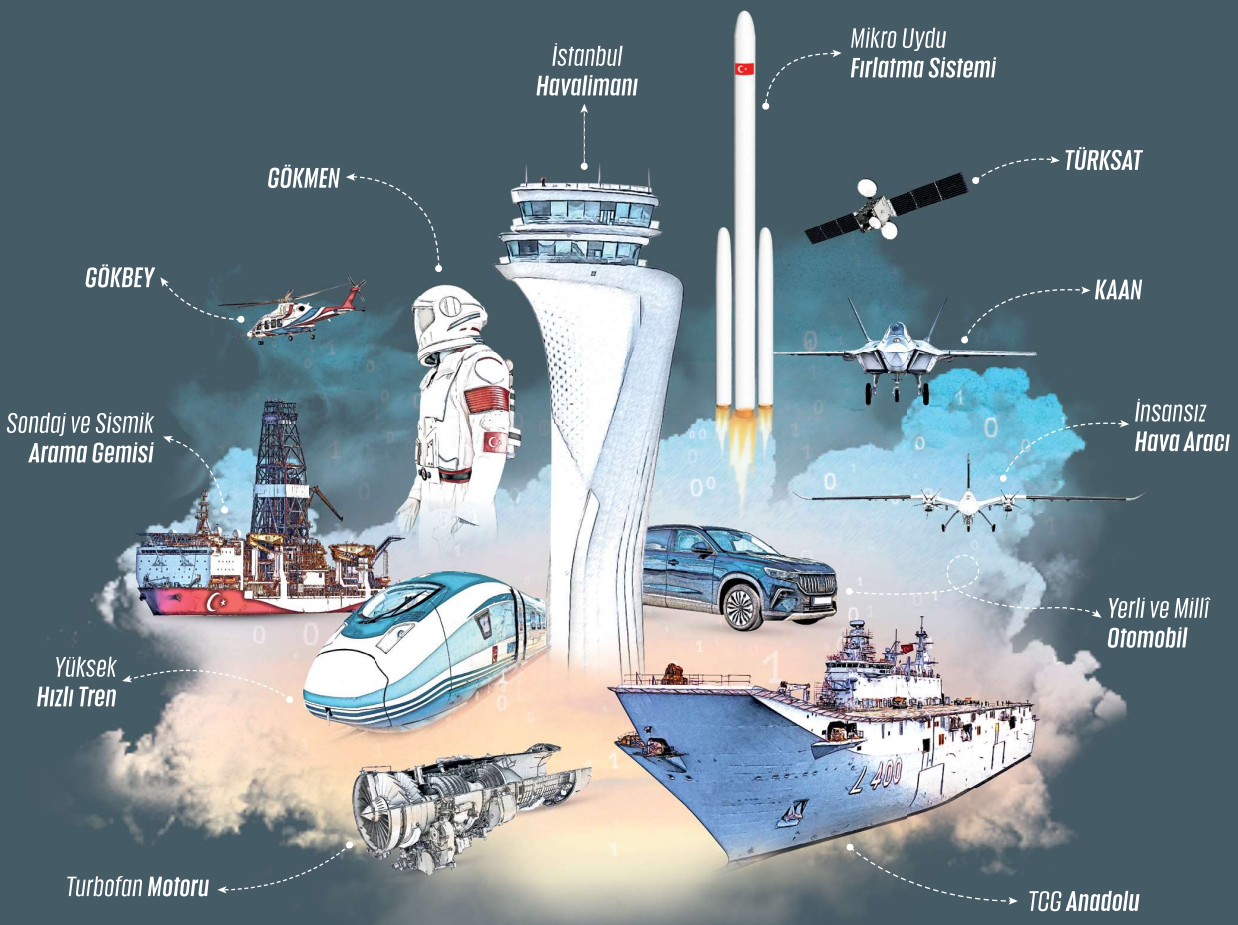
10. Sınıf

Bu kitaba sığmayan daha neler var!

www.eba.gov.tr

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!

Teknoloji Yolculuğumuz



BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.
PARA İLE SATILAMAZ.

Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.

ORTAÖĞRETİM

Matematik

10. Sınıf

Ders Kitabı

YAZARLAR

Dr. Nurhan SÖKMEZ
Ahmet KAHYA
Ahmet ÖZEN
Berna KORKUT
Erhan ERDOĞAN

DEVLET KİTAPLARI
Kitabın Basıldığı Matbaa Adı 2025

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI .....: 10145
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ..... : 2178

Her hakkı saklıdır ve Millî Eğitim Bakanlığına aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayımlanamaz.

Editör
Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN
Prof. Dr. Hakan YAMAN
Prof. Dr. Soner DURMUŞ
Esat AVCI

Dil Uzmanları
Dr. Aylin ÇAKIR
Emel ÖZKAN

Görsel Tasarımcılar
Çağlar AKKOYUN
Elmas YENİLMEZ

Çoklu Ortam Tasarımcısı
Engin SARI
Ömer GÜNEŞ

Program Geliştirme Uzmanları
Doç. Dr. Serkan ASLAN
Çiğdem ZORBA

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Doç. Dr. Yasemin KUZU
Murat TAŞ

Rehberlik Uzmanı
Melek ÖZDEMİR

Baskı
Matbaa Adı ve Ticari Ünvanı
Tel: (000) 000 00 00

ISBN 978-975-11-8920-2

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 30.06.2025 tarih ve 135558975 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

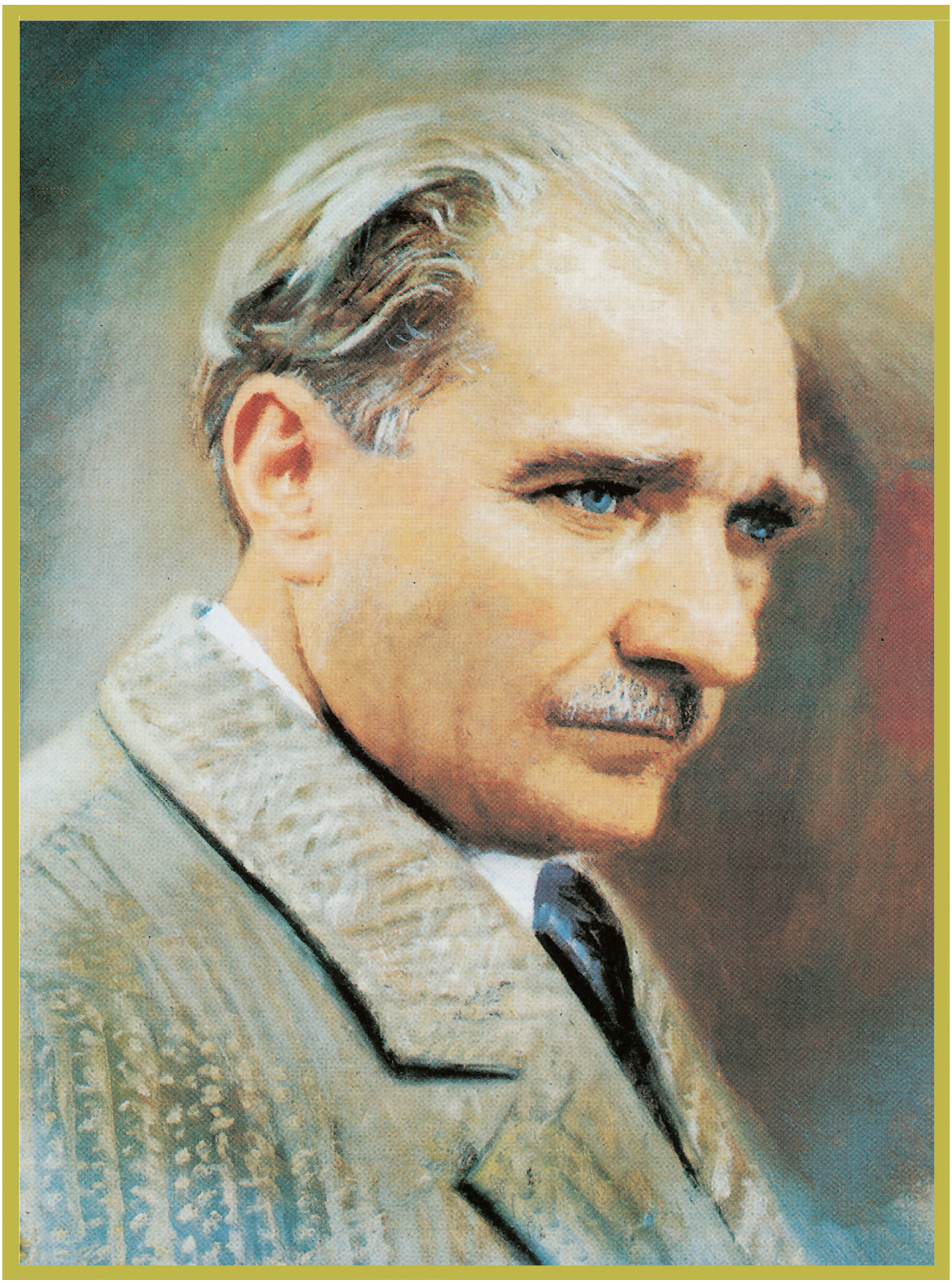
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

Kitabın Tanıtımı 9

1. Tema: GEOMETRİK ŞEKİLLER 12

Ön Değerlendirme 14

1.1. DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK ORANLAR VE TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER 15

Alıştırmalar 31

1.2. ÜÇGENDE YARDIMCI ELEMANLAR VE BUNLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER 32

Alıştırmalar 58

1.3. ÜÇGENDE ALAN 59

Alıştırmalar 75

1.4. SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMLERİ 76

Alıştırmalar 88

1. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 89

2. Tema: İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ 94

Ön Değerlendirme 96

2.1. İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENİN İLİŞKİLİLİĞİNİ İÇEREN İSTATİSTİKSEL PROBLEMİ OLUŞTURMA, VERİ TOPLAMA, ANALİZ ETME VE YORUMLAMA 98

Alıştırmalar 124

2.2. BAŞKALARI TARAFINDAN OLUŞTURULAN İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİLERİN İLİŞKİLİLİĞİNE DAYALI İSTATİSTİKSEL SONUÇ VEYA YORUMLARI TARTIŞMA 128

Alıştırmalar 132

2. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 133

3. Tema: SAYILAR 140

Ön Değerlendirme 142

3.1. BİR DOĞAL SAYI İLE ASAL ÇARPANLARI VE BÖLENLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER 143

Alıştırmalar 148

3.2. EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN-EN KÜÇÜK ORTAK KAT 149

Alıştırmalar 160

3.3. BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİNİ KULLANARAK KALAN BULMA 161

Alıştırmalar 173

3. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 174

4. Tema: NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER 178

Ön Değerlendirme 180

4.1. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI FONKSİYONLARIN NİTEL ÖZELLİKLERİ 182

Alıştırmalar 196

4.2. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 197

Alıştırmalar 223

4.3. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KAREKÖK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 224

Alıştırmalar 242

4.4. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI RASYONEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 243
Alıştırmalar 263
4.5. DOĞRUSAL, KARESEL, KAREKÖK VE RASYONEL REFERANS FONKSİYONLAR İLE BU FONKSİYONLARDAN TÜRETİLEBİLEN FONKSİYONLARIN TERS FONKSİYONLARI 264
Alıştırmalar 283
4.6. DOĞRUSAL, KARESEL, KAREKÖK, RASYONEL REFERANS FONKSİYONLAR VE BUNLARDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ 284
Alıştırmalar 305
4. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 306

5. Tema: SAYMA, ALGORİTMA VE BİLİŞİM 310

Ön Değerlendirme 312
5.1. SAYMA STRATEJİLERİ 313
Alıştırmalar 338
5.2. CEBİRSEL VE FONKSİYONEL İŞLEMLERİN ALGORİTMİK YAPISI 339
Alıştırmalar 351
5. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 352

6. Tema: ANALİTİK İNCELEME 356

Ön Değerlendirme 358
6.1. DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK VE BİR DOĞRU PARÇASINI BELLİ ORANDA BÖLME 359
Alıştırmalar 371
6.2. DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE DOĞRUNUN ÖZELLİKLERİ VE ANALİTİK İNCELENMESİ 372
Alıştırmalar 384
6. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 386

7. Tema: VERİDEN OLASILIĞA 390

Ön Değerlendirme 392
7.1. KOŞULLU OLASILIK, BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ OLAYLAR 393
Alıştırmalar 403
7.2. BAYES TEOREMİ 404
Alıştırmalar 408
7. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 410

Sözlük 412
Kaynakça 414
Cevap Anahtarı Karekodu 414
Genel Ağ ve Görsel Kaynakçası Karekodu 414
Türkiye'nin Mülki İdari Bölümleri ile Kara ve Deniz Komşuları Haritası 415
Türk Dünyası Haritası 416

KİTABIN TANITIMI

Temanın adı

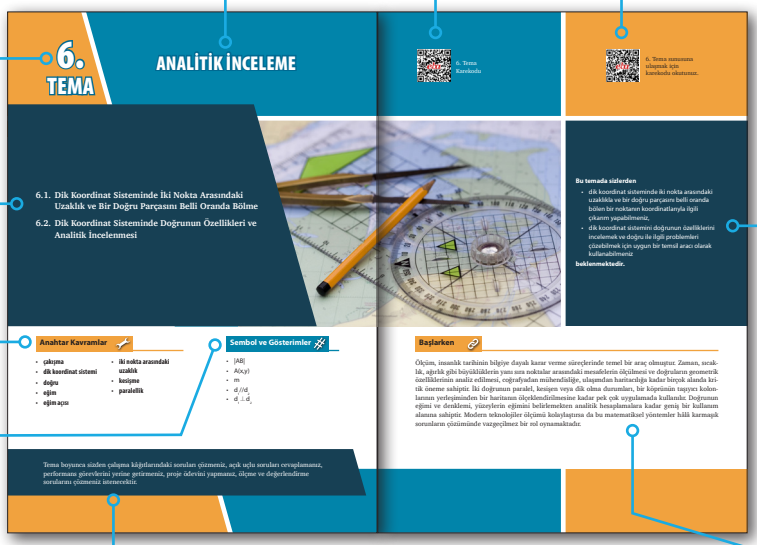
Temanın işleniş sırası

Temanın içerik çerçevesi

Anahtar kavramlar

Temada kullanılan sembol ve gösterimler

Temaya ait öğrenme çıktıları



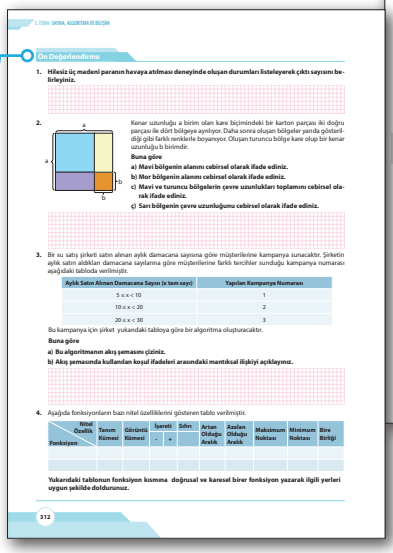
Tema sunumuna ve diğer e-içeriklere yönlendiren karekodlar

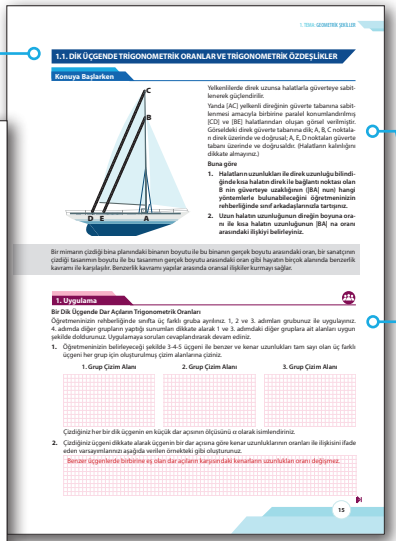
Temada öğrenciden beklenen görev ve sorumlulukların belirtildiği alan

Temaya giriş niteliğinde, yeni bilgi veya becerinin mevcut bilgi ve deneyimlerle ilişkilendirildiği alan

Temaya ait içerik çerçevesi

Temaya ait ön değerlendirme sürecinin olduğu alan



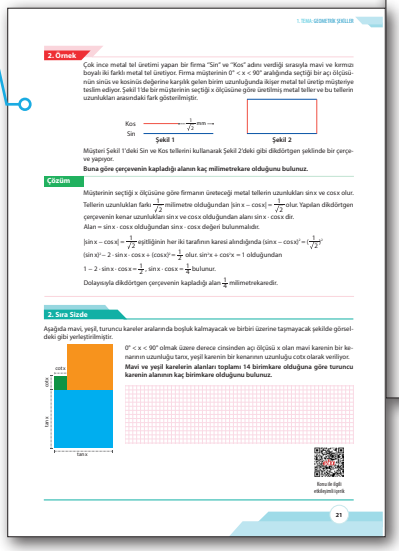


Merak uyandıran, önceki bilgi ve becerilerden temanın içerdiği bilgi ve becerilere geçişi sağlayan alan

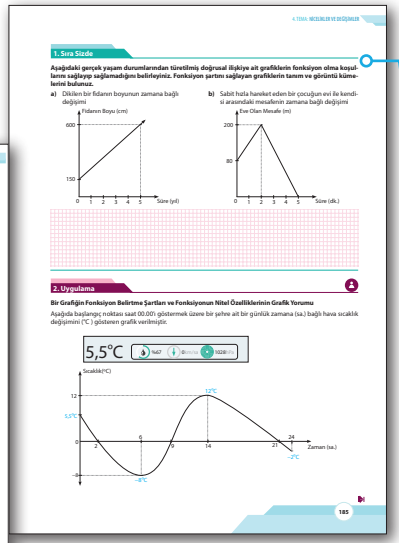
Süreç bileşenlerinin bir görev veya problem bağlamında işletildiği alan

KİTABIN TANITIMI

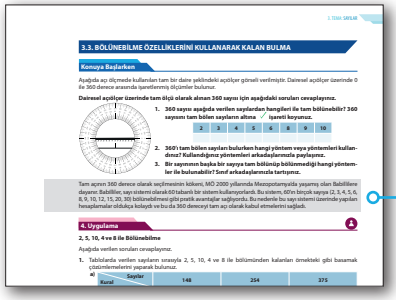
Tema ile ilgili çözümlü örneklerin sunulduğu alan



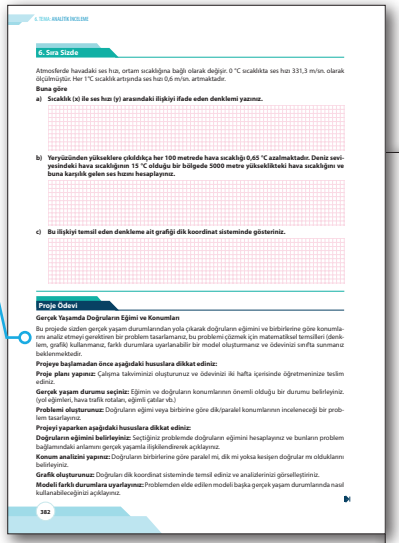
İçerik çerçevesinde çözümü verilmeyen görevlerin yer aldığı alan



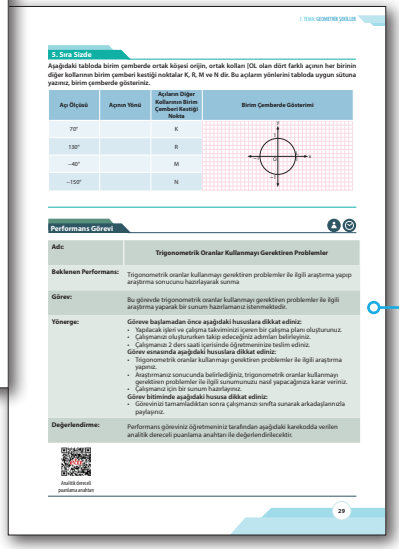
İçerik çerçevesi ile ilgili bilgi verilen alan



Tema ile ilgili proje ödevlerinin verildiği alan

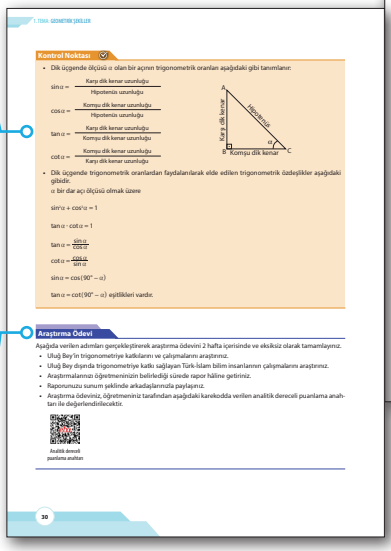


Tema ile ilgili performans görevlerinin verildiği alan



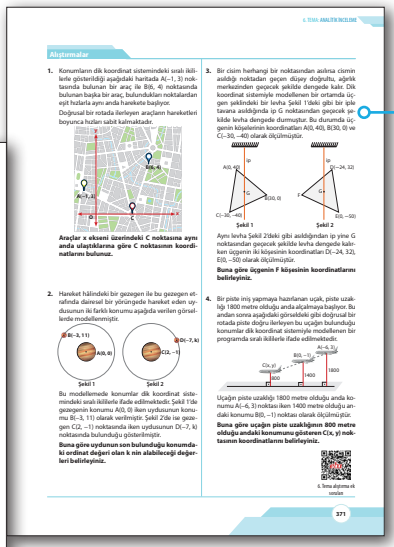
KİTABIN TANITIMI

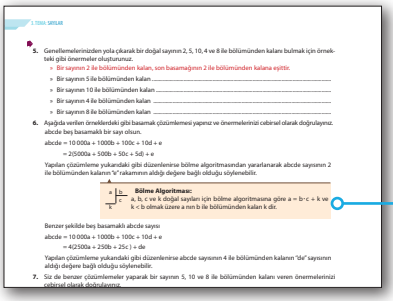
Ulaşılan bilgi, kural, önerme veya sonuçların özetlendiği alan



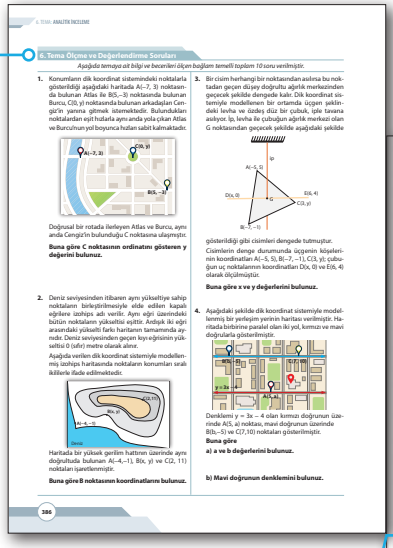
Tema ile ilgili araştırma ödevlerinin verildiği alan

Öğrenme çıktısı ile ilgili ölçme ve değerlendirme sorularının yer aldığı alan

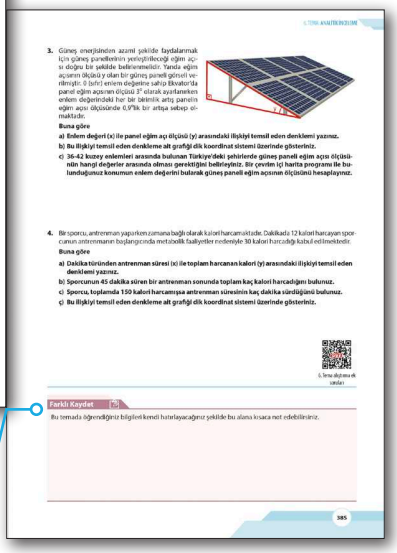




Daha önce öğrenilmiş bilgilerin hatırlatıldığı alan



Tema ile ilgili ölçme ve değerlendirme sorularının yer aldığı alan



Temada öğrenilenlerin not edilmesi için ayrılan alan

SEMBOLLERİN AÇIKLAMASI

- "Başlarken" alanı
- "Anahtar Kavramlar" alanı
- "Sembol ve Gösterimler" alanı
- "Kontrol Noktası" alanı
- "Farklı Kaydet" alanı
- Bireysel etkinlik
- Grup etkinliği
- Süreli etkinlik
- Sonraki sayfada devam eden çalışma
- Önceki sayfadan devam eden çalışma

1. TEMA

GEOMETRİK ŞEKİLLER

1.1. Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar ve Trigonometrik Özdeşlikler

1.2. Üçgende Yardımcı Elemanlar ve Bunlar Arasındaki İlişkiler

1.3. Üçgende Alan

1.4. Sinüs ve Kosinüs Teoremleri

Anahtar Kavramlar

- ağırlık merkezi
- alan
- birim çember
- çevrel çember
- iç açıortay
- iç teğet çember
- dış açıortay
- dış teğet çember
- kenar orta dikme
- kosinüs teoremi
- sinüs teoremi
- trigonometrik oranlar
- yönlü açı
- yükseklik

Sembol ve Gösterimler

- $\perp$
- AB
- $[AB]$
- $A(\widehat{ABC})$
- $Ç(\widehat{ABC})$
- r
- n_A
- n'_A
- h_a
- V_a
- G
- $\sin x$
- $\cos x$
- $\tan x$
- $\cot x$

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, araştırma ödevini yapmanız, açık uçlu soruları çözmeniz istenecektir.

1. Tema
Karekodu

1. Tema sunusuna ulaşmak için karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- dik üçgende trigonometrik oranlara (sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant) ve trigonometrik özdeşliklere ilişkin çıkarım yapabilmeniz,
- üçgenin yardımcı elemanlarının özellikleri ile ilgili çıkarım yapabilmeniz,
- üçgenin bir kenarı ve o kenara ait yüksekliğinin değişimine bağlı olarak alanının değişimine ilişkin çıkarım yapabilmeniz,
- sinüs ve kosinüs teoremlerini doğrulayabilmeniz veya ispatlayabilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

Yapı tasarımı ve inşasında, her türlü perspektif çiziminde, yön bulma cihazlarında veya haritalarda iki nokta arasındaki mesafenin belirlenmesinde, uçaklar ile gemilerin yön bulma ve doğru rota oluşturmalarında, güneş ışınlarının geliş açısıyla bir nesnenin gölgesinin uzunluğu arasındaki ilişkiyi anlama gibi birçok alanda üçgen, üçgenin yardımcı elemanları ve trigonometrik oranlar kullanılır. Bu konuların anlaşılması, çeşitli alanlardaki hesaplamaların ve tasarımların daha doğru ve verimli yapılmasına yardımcı olur.

Ön Değerlendirme

1. Bir ABC üçgeni için $|AB|$ ve $m(\widehat{ABC})$ gösterimlerinin ne anlama geldiğini açıklayınız.

2. Kenar uzunluklarının hepsi eşit olan bir üçgenin iç açılarının ölçüleri hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

3. İki kenarının uzunluğu eşit olan bir üçgenin iç açılarından birinin ölçüsü bilinirken diğer iç açılarının ölçüsünün bulunup bulunamayacağını açıklayınız.

4. Bir üçgende en uzun kenarın karşısındaki açı ile en kısa kenarın karşısındaki açı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

5. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olup olmadığını açıklayınız.

a) Bir üçgenin iç açılarından sadece biri geniş açı olabilir.

b) Her üçgende iç açılardan biri geniş açıdır.

c) Bir üçgenin üç iç açısı da dar açı olamaz.

6. Herhangi bir üçgenin bir kenarının uzunluğu ile diğer kenarların uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır, açıklayınız. Buna göre kenar uzunlukları 3 cm, 5, cm ve 7 cm olan bir üçgen çizilebilir mi? Nedenini açıklayınız.

7. İki üçgenin eş olması ne anlama gelir? Hangi koşullar sağlandığında iki üçgenin eş olabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

8. İki üçgenin benzer olması ne demektir? Benzerlik oranı nedir?

9. İki üçgenin tüm iç açılarının ölçüleri eşitse bu üçgenler eş midir, benzer midir? Nedenini açıklayınız.

10. Pisagor teoremi hangi tür üçgenlerde geçerlidir?

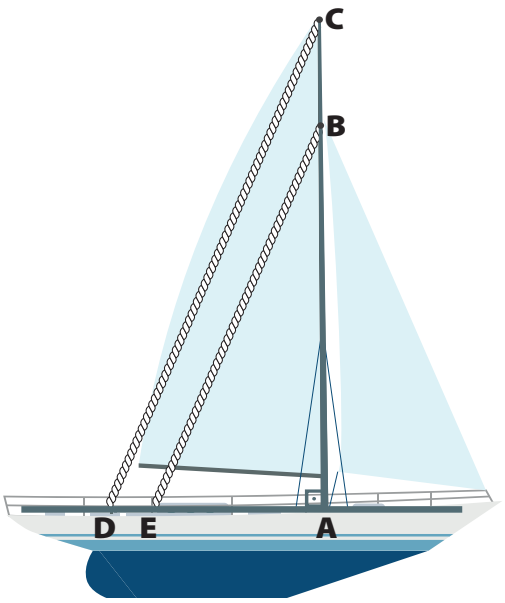
11. Pisagor teoreminin gerçek hayattaki kullanımına dair bir örnek veriniz.

12. Bir üçgende yükseklik, kenarortay ve açıortay ne demektir? Her birinin üçgen içindeki yerini kısaca açıklayınız.

13. Eşkenar üçgende iç açıortay ile kenarortay uzunlukları birbirine neden eşit olur? Açıklayınız.

1.1. DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK ORANLAR VE TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER

Konuya Başlarken



Yelkenlilerde direk uzunsa halatlarla güverteye sabitlenerek güçlendirilir.

Yanda [AC] yelkenli direğinin güverte tabanına sabitlenmesi amacıyla birbirine paralel konumlandırılmış [CD] ve [BE] halatlarından oluşan görsel verilmiştir. Görseldeki direk güverte tabanına dik; A, B, C noktaları direk üzerinde ve doğrusal; A, E, D noktaları güverte tabanı üzerinde ve doğrusaldır. (Halatların kalınlığını dikkate almayınız.)

Buna göre

1. **Halatların uzunlukları ile direk uzunluğu bilindiğinde kısa halatın direk ile bağlantı noktası olan B nin güverteye uzaklığının (|BA| nun) hangi yöntemlerle bulunabileceğini öğretmeninizin rehberliğinde sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
2. **Uzun halatın uzunluğunun direğin boyuna oranı ile kısa halatın uzunluğunun |BA| na oranı arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.**

Bir mimarın çizdiği bina planındaki binanın boyutu ile bu binanın gerçek boyutu arasındaki oran, bir sanatçının çizdiği tasarımın boyutu ile bu tasarımın gerçek boyutu arasındaki oran gibi hayatın birçok alanında benzerlik kavramı ile karşılaşılır. Benzerlik kavramı yapılar arasında oransal ilişkiler kurmayı sağlar.

1. Uygulama

Bir Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Öğretmeninizin rehberliğinde sınıfta üç farklı gruba ayrılınız. 1, 2 ve 3. adımları grubunuz ile uygulayınız. 4. adımda diğer grupların yaptığı sunumları dikkate alarak 1 ve 3. adımdaki diğer gruplara ait alanları uygun şekilde doldurunuz. Uygulamaya soruları cevaplandırarak devam ediniz.

1. Öğretmeninizin belirleyeceği şekilde 3-4-5 üçgeni ile benzer ve kenar uzunlukları tam sayı olan üç farklı üçgeni her grup için oluşturulmuş çizim alanlarına çiziniz.

1. Grup Çizim Alanı	2. Grup Çizim Alanı	3. Grup Çizim Alanı

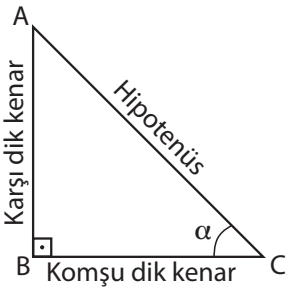
Çizdiğiniz her bir dik üçgenin en küçük dar açısının ölçüsünü α olarak isimlendiriniz.

2. Çizdiğiniz üçgeni dikkate alarak üçgenin bir dar açısına göre kenar uzunluklarının oranları ile ilişkisini ifade eden varsayımlarınızı aşağıda verilen örnekteki gibi oluşturunuz.

Benzer üçgenlerde birbirine eş olan dar açıların karşısındaki kenarların uzunlukları oranı değişmez.

3. Aşağıdaki tabloyu çizdiğiniz üçgenden faydalanarak size ayrılan sütunu grup arkadaşlarınızla doldurunuz.

	1. Grup α İçin	2. Grup α İçin	3. Grup α İçin
$\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} =$			
$\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} =$			
$\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} =$			
$\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} =$			



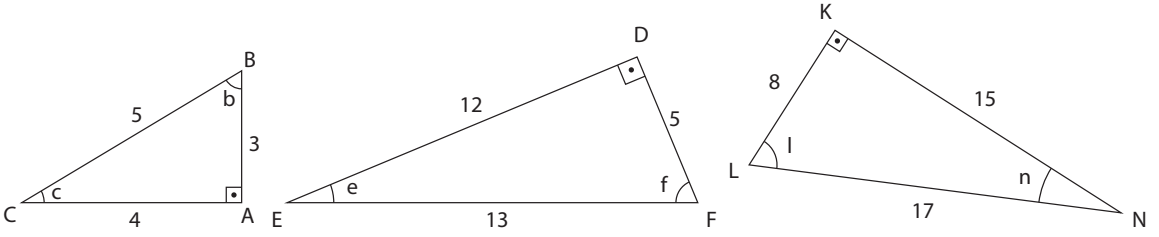
4. Grup olarak yukarıdaki tabloda oranlardan elde ettiğiniz sonuçları sınıfta sununuz. Diğer grupların elde ettiği sonuçları da tablodaki uygun kısımlara yazınız.

5. Sınıfça her üç grubun bulduğu oranları karşılaştırarak açı ve oranlara ait incelemelerinizi yapınız.

6. İncelemelerinizden ve varsayımlardan faydalanarak bir dik üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişki ile ilgili genellemelerinizi aşağıda verilen örnekteki gibi oluşturunuz.

Karşılıklı bütün kenar uzunlukları orantılı olan dik üçgenlerin orantılı kenarlarını gören açıların ölçüleri birbirine eşittir.

7. Varsayımlarınız ile genellemelerinizi karşılaştırınız. Aşağıda verilen üçgenler için oluşturulan tabloları inceleyerek istenilenleri gerçekleştiriniz.



Buna göre

a) Aşağıda Tablo 1'de verilen değerler dik üçgenlerin dar açılarının sinüs ve kosinüs değerleridir. Bu oransal değerleri üçgenlerin dar açılarına göre bulunan karşı kenar, komşu kenar ve hipotenüs ifadelerini kullanarak yazınız.

Tablo 1: ABC, DEF ve KLN üçgenlerinin dar açılarının sinüs ve kosinüs değerleri tablosu

Üçgen	Dar Açıların Sinüs ve Kosinüs Değerleri			
$\widehat{ABC}$	$\sin b = \frac{4}{5}$	$\sin c = \frac{3}{5}$	$\cos b = \frac{3}{5}$	$\cos c = \frac{4}{5}$
$\widehat{DEF}$	$\sin e = \frac{5}{13}$	$\sin f = \frac{12}{13}$	$\cos e = \frac{12}{13}$	$\cos f = \frac{5}{13}$
$\widehat{KLN}$	$\sin n = \frac{8}{17}$	$\sin l = \frac{15}{17}$	$\cos n = \frac{15}{17}$	$\cos l = \frac{8}{17}$

b) Aşağıda Tablo 2'de verilen değerler dik üçgenlerin dar açılarının tanjant ve kotanjant değerleridir. Bu oransal değerleri üçgenlerin dar açılarına göre bulunan karşı kenar, komşu kenar ve hipotenüs ifadelerini kullanarak yazınız.

Tablo 2: ABC, DEF ve KLN üçgenlerinin dar açılarının tanjant ve kotanjant değerleri tablosu

Üçgen	Dar Açıların Tanjant ve Kotanjant Değerleri			
$\widehat{ABC}$	$\tan b = \frac{4}{3}$	$\tan c = \frac{3}{4}$	$\cot b = \frac{3}{4}$	$\cot c = \frac{4}{3}$
$\widehat{DEF}$	$\tan e = \frac{5}{12}$	$\tan f = \frac{12}{5}$	$\cot e = \frac{12}{5}$	$\cot f = \frac{5}{12}$
$\widehat{KLN}$	$\tan n = \frac{8}{15}$	$\tan l = \frac{15}{8}$	$\cot n = \frac{15}{8}$	$\cot l = \frac{8}{15}$

8. Genellemenizden yola çıkarak dik üçgende bir dar açıya göre kenar uzunluklarının oranına ilişkin önermenizi aşağıda verilen örnekteki gibi yazınız.

Bir dik üçgenin tüm kenar uzunluklarının aynı oranda değişimi üçgenin açılarının ölçüsünü değiştirmez.

9. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz.

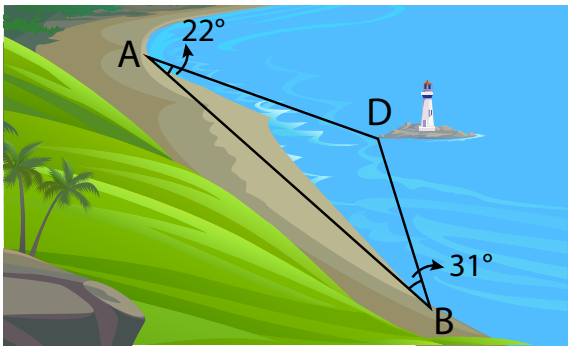
Aşağıdaki görselde çeşitli spor müsabakalarının yapıldığı bir spor merkezindeki toplanma alanlarının görseli verilmiştir.

Spor merkezine dik üçgen şeklinde iki adet toplanma alanı yapılıyor. Her iki toplanma alanının dar açılarından birinin ölçüsü α dır. Toplanma alanlarından bir tanesinin dik kenar uzunlukları 3 ve 6 metre, diğer toplanma alanının dik kenar uzunlukları 8 ve x metredir.

Buna göre x değerini bulunuz.

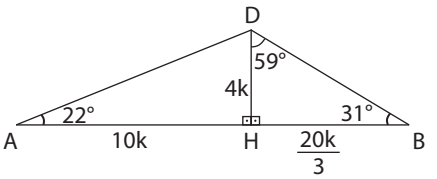
1. Örnek

Aşağıdaki görselde kıyı şeridinde bulunan Aykan ve Buse ile bir ada üzerinde bulunan deniz fenerinin bulunduğu noktalar yer almaktadır.



Aykan, bulunduğu A noktasından önce adadaki D noktasına ve ardından Buse'nin bulunduğu B noktasına yüzmüştür. Daha sonra doğrusal olarak 13m/dk. sabit hızla 50 dakika yürüyerek ilk konumuna geri dönmüştür. D, A ve B noktalarının oluşturduğu üçgende DAB açısının ölçüsü 22° ve DBA açısının ölçüsü 31°dir.
Buna göre deniz fenerinin sahile uzaklığının yaklaşık olarak kaç metre olduğunu bulunuz.
(tan 22° ≈ 0,4 ve cot 59° ≈ 0,6 alınız.)

Çözüm



ADB üçgeninde [AB] ⊥ [DH] olacak şekilde [DH] çizilir.

DAH dik üçgeninde $\tan 22^\circ = \frac{|DH|}{|AH|} = \frac{4}{10}$ olduğundan $|DH| = 4k$ ve $|AH| = 10k$ dir.

$m(\widehat{DBH}) = 31^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BDH}) = 59^\circ$ bulunur.

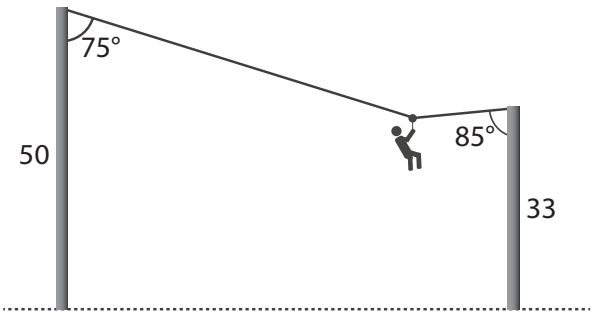
DHB dik üçgeninde $\cot 59^\circ = \frac{|DH|}{|BH|} = \frac{6}{10}$ ve $|DH| = 4k$ olduğundan

$|BH| = \frac{20k}{3}$ ve $10k + \frac{20k}{3} = |AB|$ dir.

$|AB| = 13 \cdot 50 = 650$ m olduğundan $10k + \frac{20k}{3} = 650$'dir.

Buradan $k = 39$ olduğundan $|DH| = 4k = 156$ metre bulunur.

1. Sıra Sizde



Yandaki görselde yere dik duran iki direk arasında bir ip ile oluşturulan zipline (ziplayn) parkurundaki bir kişinin anlık görüntüsü verilmiştir. Uzun ve kısa direğin ip ile yaptığı açı ölçüleri sırasıyla 75° ve 85°dir.
Uzun direğin yüksekliği 50 m, kısa direğin yüksekliği 33 m ve bu kişinin bulunduğu noktadaki ipin yerden yüksekliği 32 m olduğuna göre iki direk arasındaki en kısa uzaklığın yaklaşık olarak kaç metre olduğunu bulunuz.
(tan 75° ≈ 3,7 ve tan 85° ≈ 11,4 alınız.)

2. Uygulama

Trigonometrik Özdeşlikler

Öğretmeninizin rehberliğinde sınıfta üç farklı gruba ayrılınız. 1, 2 ve 3. adımları grubunuz ile uygulayınız. 4. adımda diğer grupların yaptığı sunumları dikkate alarak 1 ve 3. adımlardaki diğer gruplara ait alanları uygun şekilde doldurunuz. Uygulamaya soruları cevaplandırarak devam ediniz.

1. Her grup için oluşturulmuş çizim alanlarına aşağıda verilen üçgenleri çiziniz.

1. grup: 3 – 4 – 5 dik üçgeni

2. grup: 5 – 12 – 13 dik üçgeni

3. grup: $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{B}) < m(\widehat{C})$ olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çiziniz ve $|AC| = b$, $|AB| = c$ ve $|BC| = a$ olarak isimlendiriniz.

1. Grup Çizim Alanı | **2. Grup Çizim Alanı** | **3. Grup Çizim Alanı**

Çizdiğiniz her bir dik üçgenin en küçük iç açısının ölçüsünü α ve diğer iç açının ölçüsünü β olarak isimlendiriniz.

2. Öğrendiğiniz trigonometrik oranları kullanarak yazılabilecek özdeşlikler ile ilgili varsayımlarda bulununuz.

3. Çizdiğiniz üçgenlerden hareketle grubunuzla aşağıda verilen tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

	1. Grup	**2. Grup**	**3. Grup**
	3-4-5 Üçgeni	**5-12-13 Üçgeni**	**ABC üçgeni**
$\sin\alpha$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{b}{a}$
$\sin\beta$			
$\cos\alpha$			
$\cos\beta$			
$\tan\alpha$			
$\tan\beta$			
$\cot\alpha$			
$\cot\beta$			

4. Grup olarak elde ettiğiniz sonuçları grup sözcüsü seçerek sınıfta sununuz.

5. Elde ettiğiniz trigonometrik oranları dikkate alarak sınıfça her üç grubun bulduğu sonuçları karşılaştırıp Pisagor teoremi kullanarak veya cebirsel işlemlerden yararlanarak oluşturabileceğiniz özdeşlikler ile ilgili aşağıda istenen genellemelerinizi oluşturunuz.

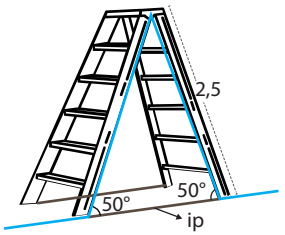
a) Bir dar açının sinüs ve kosinüs değerlerinin kareleri toplamı ile ilgili genelleme oluşturunuz.

b) Bir dar açının tanjant ve kotanjant değerlerinin çarpımı ile ilgili genelleme oluşturunuz.

c) İki dar açının sinüs-kosinüs, tanjant-kotanjant değerlerinin birbirine eşitliği ile ilgili genelleme oluşturunuz.

6. Genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırmak için arkadaşlarınızla farklı dik üçgenler üzerinde uygulama adımlarını tekrarlayınız ve ulaştığınız sonuçları inceleyiniz. Oluşturduğunuz genellemeleri bir önerme olarak ifade ediniz.

7. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz.



Yanda her iki ayağı zeminle 50°lik açı yapacak şekilde yerleştirilmiş iş merdiveni görseli verilmiştir.

Merdivenin bir kenarının uzunluğu 2,5 metredir. Merdiven ayaklarının daha fazla açılarak kullanıcının iş güvenliğinin tehlikeye atılmaması için ayakların zemin ile temas ettiği iki nokta arası bir ip ile emniyete alınıyor.

Buna göre kullanılacak ipin uzunluğunun en az kaç metre olması gerektiğini bulunuz. ($\sin 40° \approx 0{,}6$ alınız.)

2. Örnek

Çok ince metal tel üretimi yapan bir firma "Sin" ve "Kos" adını verdiği sırasıyla mavi ve kırmızı boyalı iki farklı metal tel üretiyor. Firma müşterinin $0° < x < 90°$ aralığında seçtiği bir açı ölçüsünün sinüs ve kosinüs değerine karşılık gelen birim uzunluğunda ikişer metal tel üretip müşteriye teslim ediyor. Şekil 1'de bir müşterinin seçtiği x ölçüsüne göre üretilmiş metal teller ve bu tellerin uzunlukları arasındaki fark gösterilmiştir.

Şekil 1

Şekil 2

Müşteri Şekil 1'deki Sin ve Kos tellerini kullanarak Şekil 2'deki gibi dikdörtgen şeklinde bir çerçeve yapıyor.

Buna göre çerçevenin kapladığı alanın kaç milimetrekare olduğunu bulunuz.

Çözüm

Müşterinin seçtiği x ölçüsüne göre firmanın üreteceği metal tellerin uzunlukları $\sin x$ ve $\cos x$ olur.

Tellerin uzunlukları farkı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ milimetre olduğundan $|\sin x - \cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Yapılan dikdörtgen çerçevenin kenar uzunlukları $\sin x$ ve $\cos x$ olduğundan alanı $\sin x \cdot \cos x$ dir.

Alan $= \sin x \cdot \cos x$ olduğundan $\sin x \cdot \cos x$ değeri bulunmalıdır.

$|\sin x - \cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alındığında $(\sin x - \cos x)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

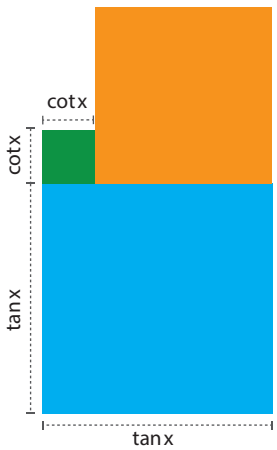
$(\sin x)^2 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + (\cos x)^2 = \frac{1}{2}$ olur. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğundan

$1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ bulunur.

Dolayısıyla dikdörtgen çerçevenin kapladığı alan $\frac{1}{4}$ milimetrekaredir.

2. Sıra Sizde

Aşağıda mavi, yeşil, turuncu kareler aralarında boşluk kalmayacak ve birbiri üzerine taşmayacak şekilde görseldeki gibi yerleştirilmiştir.



$0° < x < 90°$ olmak üzere derece cinsinden açı ölçüsü x olan mavi karenin bir kenarının uzunluğu tanx, yeşil karenin bir kenarının uzunluğu cotx olarak veriliyor.

Mavi ve yeşil karelerin alanları toplamı 14 birimkare olduğuna göre turuncu karenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

3. Uygulama

Ölçüleri 30°, 45° ve 60° Olan Açıların Trigonometrik Oranları

Öğretmeninizin rehberliğinde sınıfta iki gruba ayrılınız.

1. Aşağıdaki tablolarda gruplar için verilen adımları sırasıyla uygulayınız.

1. Grup Uygulaması

Uygulama Adımları	Sonuçlar
1. Bir kenarının uzunluğu 2 cm olan ABC eşkenar üçgeni çiziniz.	
2. BC kenarının orta noktasını bularak bu noktayı H olarak isimlendiriniz. H noktasını A noktası ile doğrusal olarak birleştiriniz.	
3. Oluşan BHA üçgenindeki $\widehat{ABH}$ ile $\widehat{BAH}$ nın ölçülerinin kaç derece olduğunu yazınız.	$m(\widehat{ABH}) =$ $m(\widehat{BAH}) =$
4. BHA üçgeninin kenar uzunluklarını bulunuz.	$\lvert AB\rvert =$ $\lvert BH\rvert =$ $\lvert HA\rvert =$
5. BAH açısına ait trigonometrik oranları bulunuz.	$\sin(\widehat{BAH}) =$ $\cos(\widehat{BAH}) =$ $\tan(\widehat{BAH}) =$ $\cot(\widehat{BAH}) =$
6. ABH açısına ait trigonometrik oranları bulunuz.	$\sin(\widehat{ABH}) =$ $\cos(\widehat{ABH}) =$ $\tan(\widehat{ABH}) =$ $\cot(\widehat{ABH}) =$

2. Grup Uygulaması

Uygulama Adımları	Sonuçlar
1. $m(\widehat{A}) = 90°$ olacak şekilde dik kenar uzunlukları 3 cm olan bir ABC ikizkenar dik üçgeni çiziniz.	
2. Oluşan ABC üçgenindeki $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{ACB}$ nın ölçülerinin kaç derece olduğunu yazınız.	$m(\widehat{ABC}) =$ $m(\widehat{ACB}) =$
3. ABC ikizkenar dik üçgeninin hipotenüs uzunluğunu bulunuz.	$\lvert BC\rvert =$
4. BCA açısına ait trigonometrik oranları bulunuz.	$\sin(\widehat{BCA}) =$ $\cos(\widehat{BCA}) =$ $\tan(\widehat{BCA}) =$ $\cot(\widehat{BCA}) =$

2. Aşağıda verilen tablolara grupça bulduğunuz sonuçları yazarak sınıf arkadaşlarınıza sununuz.

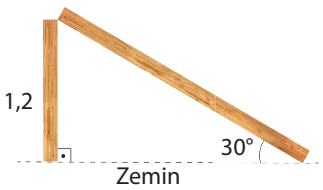
1. Grup

Açı Ölçüsü	Sinüs Değeri	Kosinüs Değeri	Tanjant Değeri	Kotanjant Değeri
30°				
60°				

2. Grup

Açı Ölçüsü	Sinüs Değeri	Kosinüs Değeri	Tanjant Değeri	Kotanjant Değeri
45°				

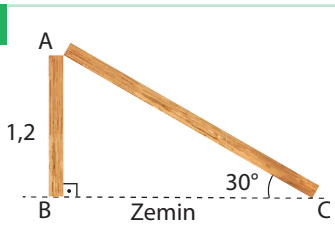
3. Örnek



Yanda zemine dik ve zeminden 1,2 m yükseklikten kırılmış bir tahta direk görseli verilmiştir. Direğin kırılan parçası zeminle 30 derecelik açı yaparak devrilmiştir.

Buna göre direğin kırılmadan önceki uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

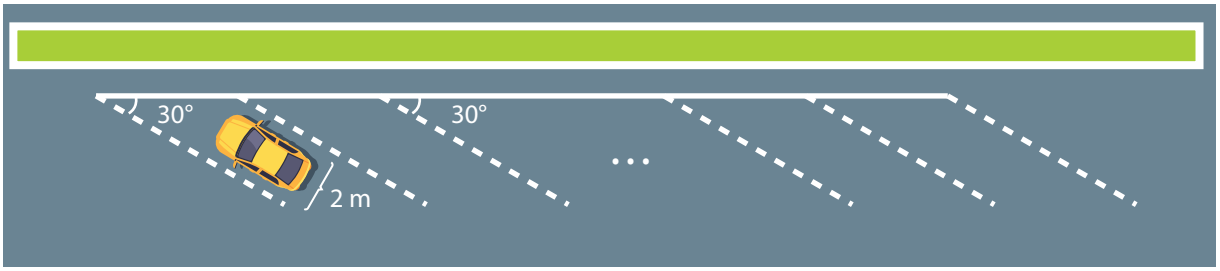
Çözüm



ABC üçgeninde $\sin \widehat{C} = \frac{|AB|}{|AC|}$, $\sin 30^\circ = \frac{1,2}{|AC|}$ ve $\frac{1}{2} = \frac{1,2}{|AC|}$ olduğundan $|AC| = 2,4$ m bulunur. Direğin kırılmadan önceki uzunluğu $|AB| + |AC| = 1,2 + 2,4 = 3,6$ m bulunur.

3. Sıra Sizde

Bir otomobil satıcısının, her aracı park edebilmek için en az 2 metre genişliğinde bir alana ihtiyacı vardır. Satıcı, kaldırım ile 30°lik açı yapacak şekilde otopark çizgileri çizmiş ve bu şekilde en fazla 15 aracını park edebilmiştir. (Çizgi kalınlıkları önemsizdir.)



Buna göre

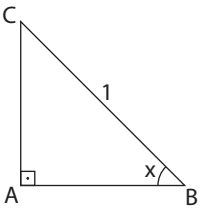
a) **Otopark çizgileri kaldırım ile 60°lik açı yapacak şekilde çizilirse aynı park yerine en fazla kaç araç park edilebileceğini bulunuz.** ($\sqrt{3} \approx 1,7$ alınız.)

b) **Otopark çizgileri kaldırım ile 45°lik açı yapacak şekilde çizilirse aynı park yerine en fazla kaç araç park edilebileceğini bulunuz.** ($\sqrt{2} \approx 1,4$ alınız.)

4. Uygulama

Trigonometrik Oranların Birbiri Türünden İfadesi

Yanda hipotenüs uzunluğu 1 birim, $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{ABC}) = x$ olan BAC dik üçgeni veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayarak uygulamayı tamamlayınız.



1. Hipotenüs uzunluğu 1 birim olan bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının trigonometrik oranlarla ilişkisi hakkında varsayımlarda bulununuz. Bunun için yukarıda verilmiş BAC dik üçgeninden yararlanınız.

2. Aşağıdaki soruları hipotenüs uzunluğu 1 birim olarak verilen BAC dik üçgeninden yararlanarak cevaplandırınız.

a) BAC dik üçgeninin dik kenar uzunluklarını x açı ölçüsünün trigonometrik oranları türünden ifade ediniz.

b) $\tan x$ ile $\cot x$ trigonometrik oranlarını a şıkkındaki işlemlerinizi de dikkate alarak $\sin x$ ve $\cos x$ türünden ifade ediniz.

c) Hipotenüs uzunluğu 1 birim olan bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının trigonometrik oranlarla ilişkisi hakkında genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Aşağıdaki tabloda sinüs ve kosinüs değerleri verilen açıların tanjant ve kotanjant değerlerini örnekteki gibi doldurarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız.

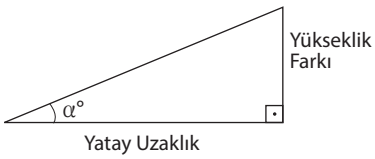
Açı Ölçüsü / Trigonometrik Değer	Sinüs Değeri	Kosinüs Değeri	Tanjant Değeri	Kotanjant Değeri
α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
β	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$		
θ	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$		

4. Hipotenüs uzunluğu 1 birim olan bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının trigonometrik oranlarla ilişkisine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz.
Bir yolun eğimi yükseklik farkının yatay uzaklığa oranı ile bulunur. Yolun eğim yüzdesi ise

$$\text{Eğim}\,(\%) = \left(\frac{\text{Yükseklik Farkı (m)}}{\text{Yatay Uzaklık (m)}}\right) \cdot 100$$

formülü ile hesap edilir. Yolun eğim yüzdesi, yol kenarlarındaki Tehlikeli Eğim İniş-Çıkış Levhası ile trafik işaretlerinde gösterilir.



Şekil 1

Şekil 2

Tablo1

Bazı Açı Ölçülerinin Sinüs ve Kosinüs Değerleri		
Derece	Sin	Cos
15	0,2588	0,9659
16	0,2756	0,9613
17	0,2924	0,9563

Eğim yüzdesi hesap edilecek bir yola ait çizim Şekil 1'de, trigonometrik cetvelin bir kısmı Tablo 1'de verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Yolun eğim yüzdesi formülünü Şekil 1'de verilenlerden yararlanarak trigonometrik oran ile ifade ediniz.

b) Eğim açısının ölçüsü 17° olan bir yol için Şekil 2'de verilen tehlikeli çıkış levhasında yazan eğim yüzdesi değerini bulunuz. Tüm işlemlerinizde sayıları yüzde birler basamağına yuvarlayarak yapınız.

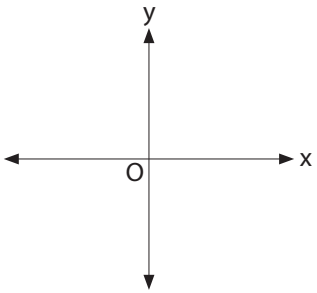
5. Uygulama

Birim Çember

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Geniş açıların trigonometrik oranlarını nasıl bulabileceğinizi ve bu süreçte hangi araçlar ya da çizimlerden yararlanabileceğinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

2. Aşağıda verilen dik koordinat sisteminde merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çember çiziniz.

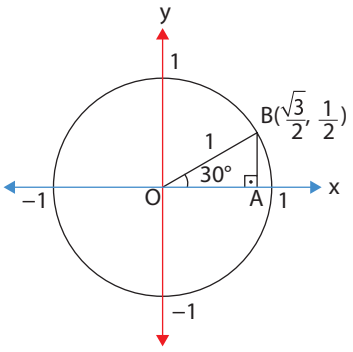


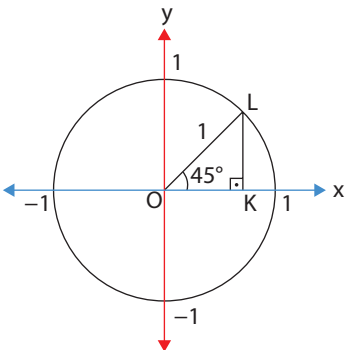
Çizdiğiniz bu çembere **"birim çember"** denir.

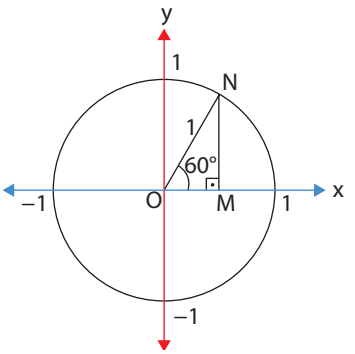
3. Bu birim çember üzerinde başlangıç kolu x ekseni olan bir dar ve bir geniş açı çiziniz. Bu açıların çemberi kestiği noktaların koordinatları ile trigonometrik oranlar arasında ne gibi bir ilişki olduğunu sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

4. Aşağıda ölçüleri $m(\widehat{AOB}) = 30^\circ$, $m(\widehat{KOL}) = 45^\circ$, $(\widehat{MON}) = 60^\circ$ olarak verilen açıların birim çember üzerinde gösterimleri verilmiştir.

Birim çember içinde oluşturulan dik üçgenden yararlanarak noktanın koordinatları ile sinüs ve kosinüs değerleri arasındaki ilişkiler bir tablo ile belirtilmiştir. 30°lik açı için oluşturulmuş örneği inceleyerek birim çemberler üzerindeki L ve N noktalarının koordinatlarını bulunuz ve tablodaki ilgili alanları doldurunuz.



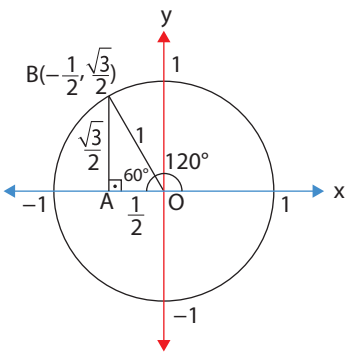


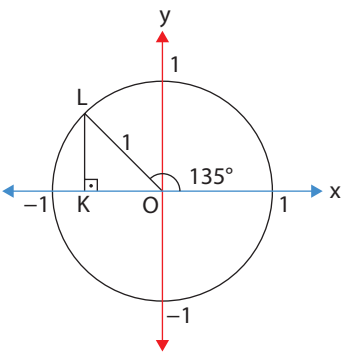


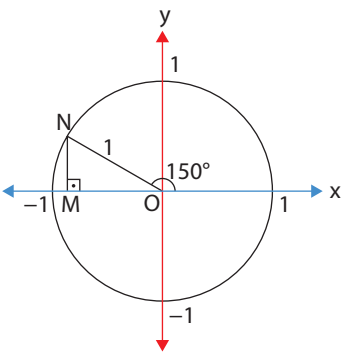
Nokta	Trigonometrik Oranların Değeri	
$B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
L (,)	$\cos 45^\circ =$	$\sin 45^\circ =$
N (,)	$\cos 60^\circ =$	$\sin 60^\circ =$

5. Bulduğunuz sonuçları dikkate alarak birim çember üzerindeki bir noktanın koordinatları ile sinüs ve kosinüs değerleri arasındaki ilişkiyi belirleyiniz ve sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

6. Aşağıda 120°lik bir açının birim çember üzerindeki gösterimi ve bu açının bir kolunun birim çemberi kestiği B noktasının koordinatları verilmiştir. Birim çember üzerinde oluşturulan dik üçgenlerden yararlanarak noktanın koordinatları ile sinüs ve kosinüs değerleri arasındaki ilişkiler bir tablo ile belirtilmiştir. Tabloda bulunan 120°lik açı için oluşturulmuş örneği inceleyerek birim çemberler üzerindeki L ve N noktalarının koordinatlarını bulunuz ve tablodaki ilgili alanları doldurunuz.







Nokta	Trigonometrik Oranların Değeri	
$B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$	$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
L (,)	$\cos 135^\circ =$	$\sin 135^\circ =$
N (,)	$\cos 150^\circ =$	$\sin 150^\circ =$

7. Bulduğunuz sonuçları dikkate alarak birim çember üzerindeki bir noktanın koordinatları ile oluşan geniş açıların sinüs ve kosinüs değerleri arasındaki ilişkiyi belirleyerek sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

8. Ulaştığınız sonuçları dikkate alarak aşağıdaki problemi çözünüz.

W: İş (joule)

F: Kuvvetin büyüklüğü [newton (nivtın)]

d: Cismin aldığı yol veya yer değiştirme (metre)

θ: Kuvvetin uygulandığı doğrultu ile yer değiştirme doğrultusu arasındaki açının ölçüsü olmak üzere yapılan iş (W)

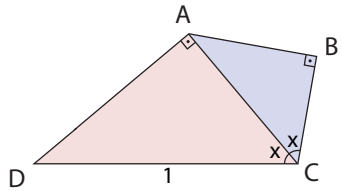
$W = F \cdot d \cdot \cos\theta$

formülü kullanılarak bulunur. İş pozitif bir değer ise sisteme enerji yüklendiği, negatif ise sistemden enerji çekildiği, sıfır ise enerji harcanmadığı (iş yapılmadığı) anlaşılmaktadır.

Bir kutu yatay bir zemin üzerinde yer değiştirme doğrultusuyla 120°lik açı yapacak şekilde, 60 N büyüklüğünde kuvvet uygulanarak 4 metre hareket ettiriliyor. Uygulanan kuvvetin yaptığı işin kaç joule olduğunu bulunuz ve sistemin enerji durumunu yazınız.

4. Sıra Sizde

Aşağıda birbirine benzer ACD ve BCA dik üçgenleri ile oluşturulmuş ABCD dörtgeni verilmiştir.



$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCA}) = x$

$|CD| = 1$ birim

olduğuna göre

a) **AB, AC ve AD kenarlarının uzunluklarını x açı ölçüsünün trigonometrik oranları cinsinden yazınız.**

b) $|AD|^2 + |BC|$ **ifadesini x açı ölçüsünün trigonometrik oranları cinsinden yazarak değerini bulunuz.**

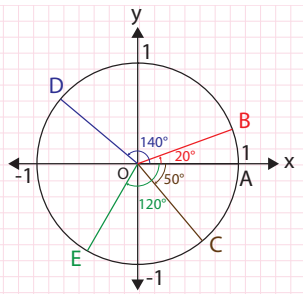
c) $\tan(\widehat{ACD}) \cdot \cot(\widehat{ACD})$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

6. Uygulama

Yönlü Açı

Birim çemberde ortak köşesi orijin, ortak kolları [OA olan dört farklı açının her birinin diğer kollarının birim çemberi kestiği noktalar B, C, D ve E dir. Bu açıların birim çember üzerindeki gösterimleri ve bunlar ile ilgili bilgiler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

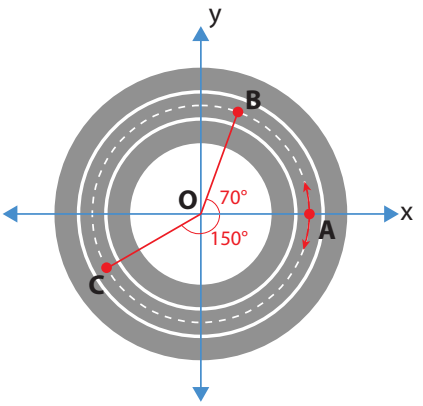
Tabloda verilenleri inceleyerek bir açının yönünün pozitif veya negatif olma durumu ile ilgili fikirlerinizi aşağıdaki alana yazarak sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Birim Çemberde Gösterimi	Açının Yönü	Açıların Diğer Kollarının Birim Çemberi Kestiği Nokta	Açı Ölçüsü
	Pozitif	B	20°
	Negatif	C	–50°
	Pozitif	D	140°
	Negatif	E	–120°

Bir ışın, orijini merkez alarak saat yönünün tersine dönerse pozitif yönlü açı, saat yönünde dönerse negatif yönlü açı oluşur.

4. Örnek

Aşağıda dik koordinat sistemine yerleştirilmiş dairesel bir pist üzerindeki A noktasından ters yönlerde harekete başlayan iki bisikletlinin bulunduğu konumlar B ve C noktaları ile gösterilmiştir.



Bisikletlilerden Beril B noktasına, Cansu C noktasına ulaştığında AOB açısının ölçüsü 70°, AOC açısının ölçüsü 150° olarak ölçülüyor.

Buna göre

a) Beril ve Cansu'nun bulunduğu B ve C noktalarının konumunu yönlü açı kavramını dikkate alarak belirtiniz.

b) Beril'in dairesel pistte hangi yönde ve kaç derecelik açı oluşturacak şekilde hareket ederse C noktasına ulaşacağını bulunuz.

c) Cansu'nun dairesel pistte hangi yönde ve kaç derecelik açı oluşturacak şekilde hareket ederse B noktasına ulaşacağını bulunuz.

Çözüm

a) Beril'in bulunduğu B noktasının konumu x ekseni ile pozitif yönde 70°lik açı yapmaktadır. Cansu'nun bulunduğu C noktasının konumu x ekseni ile negatif yönde 150°lik açı yapmaktadır.

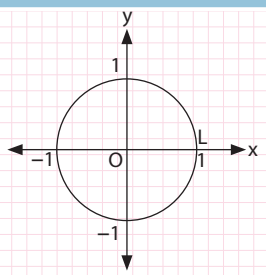
b) Beril, pozitif yönde 140°lik veya negatif yönde 220°lik açı yaptığında C noktasına ulaşır.

c) Cansu, negatif yönde 140°lik veya pozitif yönde 220°lik açı yaptığında B noktasına ulaşır.

5. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda birim çemberde ortak köşesi orijin, ortak kolları [OL olan dört farklı açının her birinin diğer kollarının birim çemberi kestiği noktalar K, R, M ve N dir. Bu açıların yönlerini tabloda uygun sütuna yazınız, birim çemberde gösteriniz.

Açı Ölçüsü	Açının Yönü	Açıların Diğer Kollarının Birim Çemberi Kestiği Nokta	Birim Çemberde Gösterimi
70°		K	
130°		R	
–40°		M	
–150°		N	



Performans Görevi

Adı:	**Trigonometrik Oranlar Kullanmayı Gerektiren Problemler**
Beklenen Performans:	Trigonometrik oranlar kullanmayı gerektiren problemler ile ilgili araştırma yapıp araştırma sonucunu hazırlayarak sunma
Görev:	Bu görevde trigonometrik oranlar kullanmayı gerektiren problemler ile ilgili araştırma yaparak bir sunum hazırlamanız istenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. • Çalışmanızı 2 ders saati içerisinde öğretmeninize teslim ediniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Trigonometrik oranlar kullanmayı gerektiren problemler ile ilgili araştırma yapınız. • Araştırmanız sonucunda belirlediğiniz, trigonometrik oranlar kullanmayı gerektiren problemler ile ilgili sunumunuzu nasıl yapacağınıza karar veriniz. • Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız. **Görev bitiminde aşağıdaki hususa dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamladıktan sonra çalışmanızı sınıfta sunarak arkadaşlarınızla paylaşınız.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Kontrol Noktası

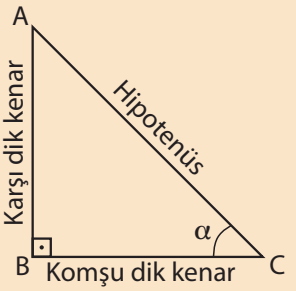
- Dik üçgende ölçüsü α olan bir açının trigonometrik oranları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$



- Dik üçgende trigonometrik oranlardan faydalanılarak elde edilen trigonometrik özdeşlikler aşağıdaki gibidir.

  α bir dar açı ölçüsü olmak üzere

  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

  $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

  $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

  $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

  $\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$ eşitlikleri vardır.

Araştırma Ödevi

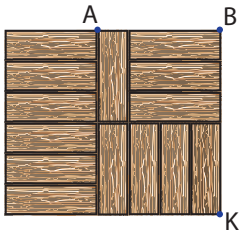
Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini 2 hafta içerisinde ve eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Uluğ Bey'in trigonometriye katkılarını ve çalışmalarını araştırınız.
- Uluğ Bey dışında trigonometriye katkı sağlayan Türk-İslam bilim insanlarının çalışmalarını araştırınız.
- Araştırmalarınızı öğretmeninizin belirlediği sürede rapor hâline getiriniz.
- Raporunuzu sunum şeklinde arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Araştırma ödeviniz, öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

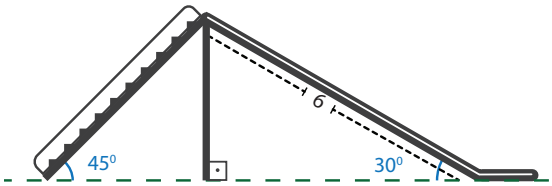
Alıştırmalar

1. Aşağıda 14 adet eş dikdörtgen şeklinde parke kullanılarak oluşturulmuş bir zemin görseli verilmiştir.

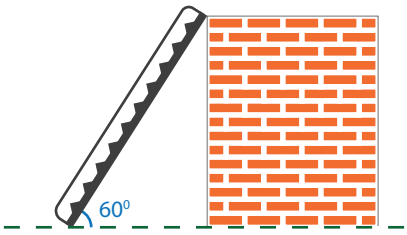


K noktasında bulunan bir kedi doğrusal bir şekilde önce A noktasına, ardından B noktasına yürümüştür.
Buna göre KAB açısının sinüs değerini bulunuz.

2. Aşağıda bir su kaydırağı ve kaydırağa tepe noktasından bağlı merdiven görseli verilmiştir.

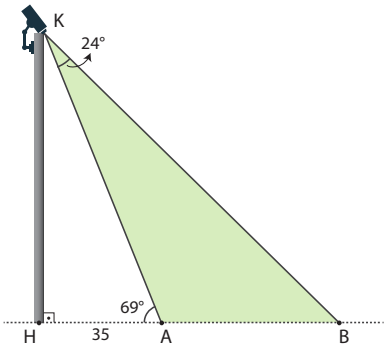


Su kaydırağının uzunluğu 6 metredir. Kaydırak zeminle 30°, merdiven zeminle 45°lik açı yapacak şekilde konumlandırılmıştır. Bakım işlemleri sırasında yerinden sökülen merdiven 60°lik açı yapacak şekilde zemine dik duran bir duvara dayandığında aşağıdaki görünüm oluşmuştur.



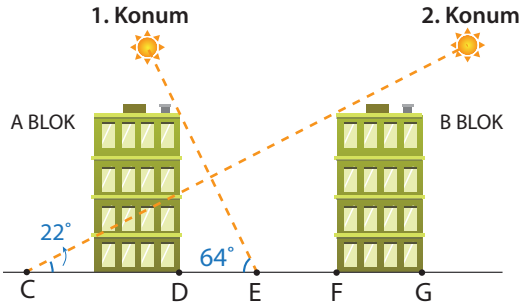
2. durumda merdivenin üst ucu duvarın tepesine denk geldiğine göre duvarın yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulunuz.

3. Aşağıda zemine dik olan bir direğin tepesindeki kameranın kayıt alabileceği alan yeşil renk ile gösterilmiştir. Kameranın görüş açısının ölçüsü 24° ve HAK açısının ölçüsü 69°dir.



$|AH| = 35$ metre **olduğuna göre** $|AB|$ **nun yaklaşık kaç metre olması gerektiğini bulunuz.**
($\tan 69° \approx 2{,}6$)

4. Aşağıda kesitleri özdeş dikdörtgen şeklinde olan A ve B bloklarının görselleri verilmiştir. Her iki blok, düz bir zemine diktir ve iki blok arasındaki mesafe, blokların boyuna eşittir. Güneşin 1. konumdayken A blokta oluşturduğu gölgenin açı ölçüsü 64°, 2. konumdayken B bloku ile oluşturduğu gölgenin açı ölçüsü 22°dir.



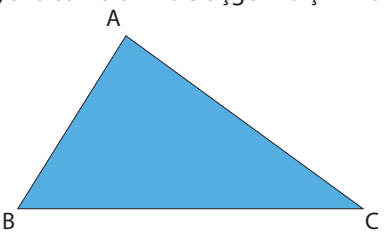
A blokun gölgesinin uç noktası ile B blok arasındaki uzaklık $|EF| = 16$ metre **ve** $|FG| = 10$ metre **olduğuna göre** $|CG|$ **nun kaç metre olduğunu bulunuz.** ($\tan 64° \approx 2$ ve $\tan 22° \approx 0{,}4$ alınız.)

1. Tema alıştırma ek soruları

1.2. ÜÇGENDE YARDIMCI ELEMANLAR VE BUNLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Konuya Başlarken

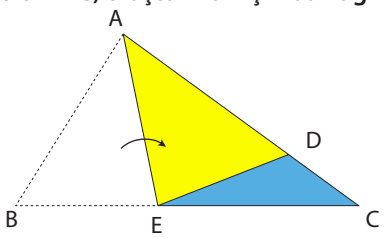
Aşağıdaki şekilde ön yüzü mavi, arka yüzü sarı olan ABC üçgeni biçimindeki bir kâğıt parçası gösterilmiştir.



Üçgenin yardımcı elemanlarını (açıortay, kenarortay, yükseklik, kenar orta dikme) oluşturmak için bu kâğıda ait verilen katlama işlemlerini uygulayınız.

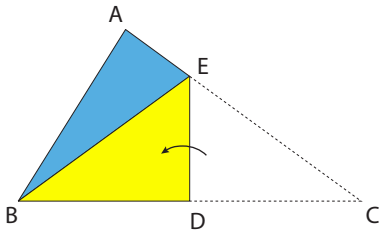
1. ABC üçgeninin AB kenarı AC kenarı üstüne katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE] hakkında ne söylenebilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.



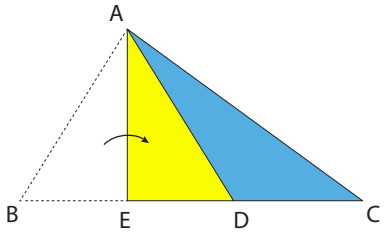
2. ABC üçgeninin C köşesi B köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [DE] hakkında ne söylenebilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.



3. ABC üçgeninin B köşesi BC kenarı üzerine gelecek biçimde A köşesi hizasına kadar olan kısmı katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

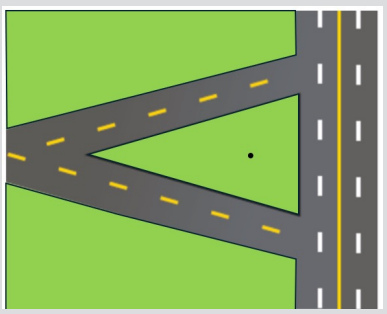
Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE] hakkında ne söylenebilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.



4. Yapılan katlama işlemleri sonucunda oluşturulamayan yardımcı eleman hangisidir? Bu elemanın yapılan işlemlerden hangisiyle ve nasıl elde edilebileceğini açıklayınız.

Üçgenin Açıortayları

Yandaki görselde verilen üç yolun arasında kalan üçgen biçimindeki alana bir anıt yapılırken anıtın üç yola da eşit uzaklıkta olmasını sağlamak için üçgenin açıortayları kullanılır. Benzer şekilde üçgen biçiminde bir oda tasarımında en uygun ışıklandırmayı sağlamak için lambaların yerleşimi belirlenirken oda köşelerinin açıortaylarından faydalanılır. Her iki durumda da açıortaylar, denge ve simetriyi sağlayarak en uygun konumun belirlenmesine yardımcı olur. Bu nedenle matematiksel kavramlar yalnızca teorik bilgiler olarak kalmaz. Aynı zamanda mimarlık, şehir planlaması ve iç mekân tasarımı gibi alanlarda da pratik çözümler sunar.



7. Uygulama

Üçgenin İç Açıortayı ve Özellikleri

Öğretmeninizin rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız ve aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. Bir üçgenin bir iç açısına ait açıortayın kestiği kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının oranı ile açıyı oluşturan kenarların uzunluklarının oranı arasındaki ilişkiyi grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden faydalanarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir üçgenin bir iç açısına ait açıortayın kestiği kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının oranı ile açıyı oluşturan kenarların uzunluklarının oranı arasındaki ilişkiye ulaşmak için yaptığınız varsayımlar hakkında grup arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak 1 ile 30 arasında pozitif tam sayı değerleri alabilen AB, BC ve AC sürgülerini tanımlayınız.

2. adım: Yazılımın **Verilen Uzunlukta Doğru Parçası** çizme aracını kullanarak BC sürgüsü uzunluğunda BC doğru parçası çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Çember** aracını kullanarak merkezi B ve yarıçapı AB sürgüsüne bağlı çember ile merkezi C ve yarıçapı AC sürgüsüne bağlı çemberi çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak çemberlerin kesim noktalarından birini A olarak isimlendiriniz ve çemberleri **Nesne Göster** seçeneğiyle gizleyiniz.

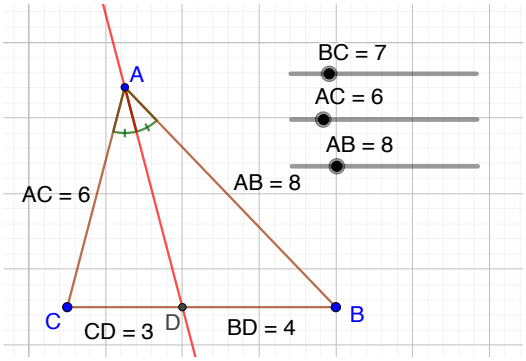
5. adım: Yazılımın **Doğru Parçası** aracını kullanarak [AB] ile [AC] nı çiziniz ve ABC üçgenini oluşturunuz.

6. adım: Yazılımın **Açıortay** aracını kullanarak BAC açısına ait açıortayı çiziniz ve üçgenin BC kenarını kestiği noktayı D olarak isimlendiriniz.

7. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** ölçme aracını kullanarak aşağıdaki tabloda verilen uzunlukları ve bu uzunlukların oranlarını hesaplayınız. Bulduğunuz sonuçlara göre tabloyu doldurunuz.

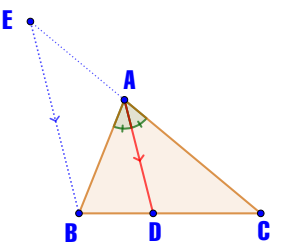
$\|AB\|$	$\|AC\|$	$\|BC\|$	$\|BD\|$	$\|CD\|$	$\frac{\|AB\|}{\|AC\|}$	$\frac{\|BD\|}{\|CD\|}$

Etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıdaki şekilde verilmiştir:



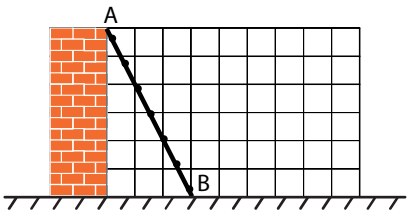
4. Tanımladığınız sürgülerin farklı değerleri için yeni üçgenler oluşturunuz. Bu üçgenlerde 3. maddedeki tabloda hesaplanan oranların aldığı yeni değerleri inceleyerek genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Oluşturduğunuz genellemeden hareketle bir üçgenin bir iç açısına ait açıortayın kestiği kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının oranı ile açıyı oluşturan kenarların uzunluklarının oranı arasındaki ilişkiyi üçgenlerde benzerlik yardımıyla gösteriniz. Bunun için yanda BAC açısının [AD] açıortayı çizilmiş ve [AD]//[BE] olan ABC üçgeninin bulunduğu şekilden yararlanınız ve bir önerme olarak ifade ediniz.



6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Şekilde birimkarelerle modellenmiş düzlemsel bir görüntü verilmiştir.



Bir ucu duvardaki A noktasında, diğer ucu yerdeki B noktasında uzunluğu ayarlanabilen bir merdiven gösterilmektedir. Merdivenin duvara değen ucunun yerden yüksekliği 6 birim, yere değen ucunun duvara uzaklığı 3 birimdir.

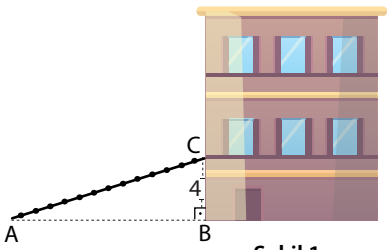
Buna göre

a) Merdivenin duvarla yaptığı açı ölçüsünün iki katına çıkarılması için merdivenin yere hangi noktada temas etmesi gerektiğini belirleyiniz.

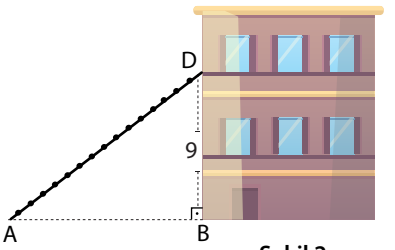
b) Bu durumda merdivenin yere değen ucunun kaç birim yer değiştirmesi gerektiğini bulunuz.

c) Merdivenin son durumda uzunluğunun kaç birim olacağını bulunuz.

5. Örnek



Şekil 1



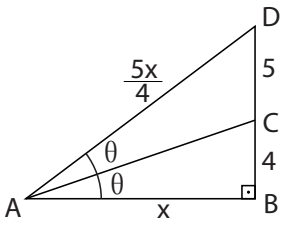
Şekil 2

Bir camcı yerden yükseklikleri |BC| = 4 metre ve |BD| = 9 metre olan bir binadaki iki cama ulaşabilmek için uzayabilen merdivenini yerde A noktasına konumlandırıp camların en alt noktasına kadar şekillerde gösterildiği gibi uzatmıştır. Merdivenin Şekil 2'deki konumunda zeminle yaptığı BAD açısının ölçüsü, Şekil 1'deki konumunda zeminle yaptığı BAC açısının ölçüsünün iki katına eşittir.

Buna göre camcının merdiveni binadan kaç metre uzağa konumlandırdığını bulunuz.

Çözüm

Merdivenin yere değdiği nokta A, binanın ve pencerelerin en alt noktaları sırasıyla B, C ve D olmak üzere iki durumu da içeren taslak çizim yandaki gibidir:



ABD üçgeninde [AC] iç açıortay, $|BC| = 4$ m ve $|CD| = 5$ m olduğundan $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{4}{5}$ olur ve $|AB| = x$, $|AD| = \frac{5x}{4}$ bulunur.

ABD üçgeninde Pisagor teoreminden

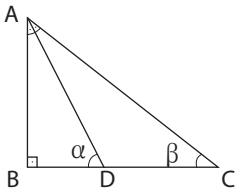
$$\left(\frac{5x}{4}\right)^2 = x^2 + 9^2 \Rightarrow \frac{25 \cdot x^2}{16} = x^2 + 81$$

$$\frac{9x^2}{16} = 81 \Rightarrow x^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow x = 12 \text{ metre bulunur.}$$

6. Sıra Sizde

Yandaki şekilde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeni verilmiştir.

Bu üçgende [AD] açıortay ve $m(\widehat{ADB}) = \alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \beta$ dır.



Buna göre

a) $\frac{|AC|}{|DC|}$ **oranının** α **değerinin hangi trigonometrik oranına karşılık geldiğini bulunuz.**

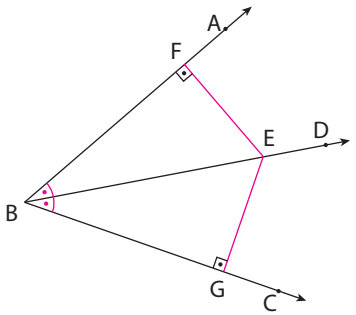
b) $\frac{|BD|}{|DC|}$ **oranının** β **değerinin hangi trigonometrik oranına karşılık geldiğini bulunuz.**

Konu ile ilgili video

8. Uygulama

Açıortay Üzerindeki Bir Noktanın Açının Kollarına Olan Uzaklığı

Yanda verilen ABC açısında [BD açıortayının üzerindeki E noktasından açıortayın kollarına [EF] ve [EG] dikmeleri çizilmiştir. Bu çizimden yararlanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.



1. Öğretmeniniz rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız. Bir açının açıortay doğrusu üzerindeki bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının birbirleri ile ilişkisini grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden yola çıkarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir açının açıortay doğrusu üzerindeki bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının birbirleri ile ilişkisine ulaşmak için yaptığınız varsayımlar hakkında grup arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Yazılımın **Işın** aracını kullanarak başlangıç noktaları B olan BA ve BC ışınlarını çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Açıortay** aracını kullanarak ABC açısına ait açıortayı çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak açıortay üzerinde bir nokta işaretleyiniz ve noktayı D olarak isimlendiriniz.

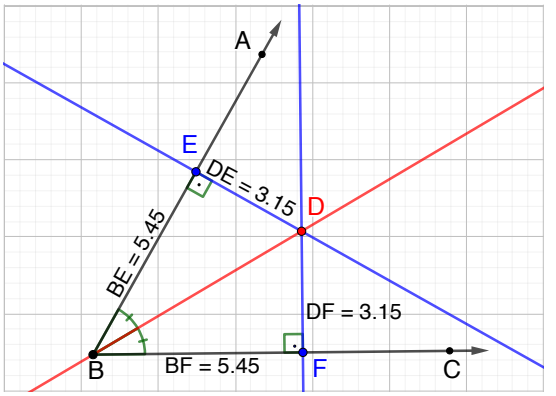
4. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak D noktasından BA ve BC ışınlarına dik doğrular çiziniz.

5. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak çizdiğiniz dik doğruların BA ve BC ışınlarını kestiği noktaları belirleyin, ardından sırasıyla E ve F olarak isimlendiriniz.

6. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** ölçme aracını kullanarak aşağıdaki tabloda verilen uzunlukları hesaplayınız ve tabloyu doldurunuz.

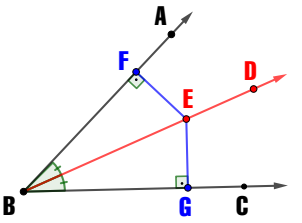
|DE|	|DF|	|BE|	|BF|

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir:



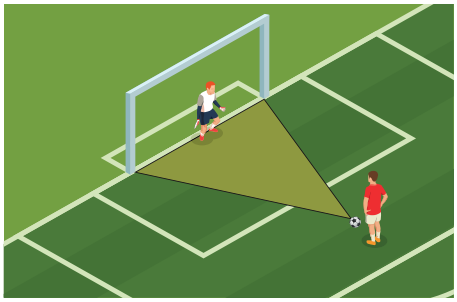
4. D noktasını açıortay üzerinde sürükleyerek D noktasının farklı konumları için 3. maddedeki tabloda hesaplanan uzunlukların aldığı yeni değerleri inceleyiniz ve genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Oluşturduğunuz genellemeden hareketle bir açının açıortay doğrusu üzerindeki bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının birbirleri ile ilişkisini üçgenlerin eşliği yardımıyla gösteriniz ve bir önerme olarak ifade ediniz. Bunun için yanda [BD açıortayı üzerindeki E noktasından açıortayın kollarına [EF] ve [EG] dikmeleri çizilmiş olan ABC açısından yararlanınız.



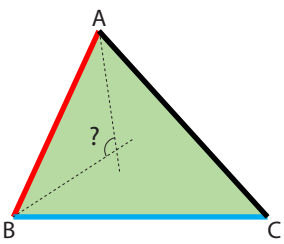
6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Yanda bir futbol maçında yapılacak olan penaltı atışının görseli verilmiştir. Kalecinin penaltı atışında kaleye gelen topu kurtarabilme ihtimalini artırması için kalecinin topa ve kale direklerine göre konumunun nasıl olması gerektiğini belirleyiniz.



6. Örnek

Doruk ve Burcu; kırmızı, mavi ve siyah boyalı yolların arasında bulunan ve yanda görseli verilen üçgen biçimindeki bir parkta yürüyeceklerdir. Parkın A köşesinde bulunan Doruk, kırmızı ve siyah yollara uzaklığı daima eşit olacak biçimde belirli bir yönde yürürken parkın B köşesinde bulunan Burcu, kırmızı ve mavi yollara uzaklığı daima eşit olacak biçimde belirli bir yönde yürümektedir.



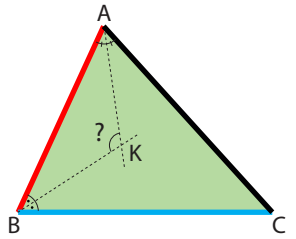
Doruk ve Burcu'nun yürüyüş yönleri arasında oluşan geniş açının ölçüsü ile siyah ve mavi boyalı yolların oluşturduğu açının ölçüsü arasındaki ilişkiyi bulunuz.

Çözüm

Bir açının iç bölgesinde alınan bir nokta açının kollarına eşit uzaklıkta ise bu nokta o açının açıortayı üzerinde bulunur.

Buna göre Doruk ve Burcu'nun yürüdüğü yollar yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde sırasıyla $\widehat{BAC}$ ile $\widehat{ABC}$ nın açıortaylarıdır.

Açıortayların kesim noktası K olarak isimlendirildiğinde



ABK üçgeninde $m(\widehat{AKB}) + \frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ$dir.

Buradan $2 \cdot m(\widehat{AKB}) + m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 360^\circ$ olur.

ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$dir.

Buradan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ - m(\widehat{C})$ olur.

Bu iki eşitlikten $2 \cdot m(\widehat{AKB}) + 180^\circ - m(\widehat{C}) = 360^\circ$ olur.

Buradan $m(\widehat{AKB}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{C})}{2}$ bulunur.

9. Uygulama

Üçgenin İç Açıortaylarının Kesim Noktası

Öğretmeninizin rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız ve 8. uygulamada ulaştığınız sonuçlardan yararlanarak aşağıdaki işlem basamaklarını gerçekleştiriniz.

1. Bir üçgenin iç açıortaylarının tek noktada kesişip kesişmediğini, kesişiyorsa bu noktanın özelliğini grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden yola çıkarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir üçgenin iç açıortaylarının tek noktada kesişip kesişmediğini ve kesişiyorsa bu noktanın özelliğine ulaşmak için yaptığınız varsayımları grup arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak bir ABC üçgeni çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Açıortay** aracını kullanarak ABC üçgeninin iki iç açısına ait iç açıortayları çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 2. adımda çizdiğiniz açıortayların kesim noktasını belirleyiniz ve K olarak isimlendiriniz.

4. adım: Yazılımın **Dik doğru** aracını kullanarak K noktasından üçgenin kenarlarından herhangi birine dik olan bir doğru çiziniz.

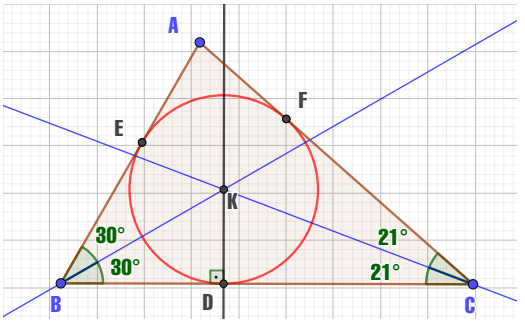
5. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 4. adıma çizdiğiniz dik doğrunun kenarı kestiği noktayı tespit ediniz ve bu noktayı D olarak isimlendiriniz.

6. adım: Yazılımın **Çember** aracını kullanarak merkezi K noktası ve yarıçapı |KD| na eşit olan bir çember çiziniz.

7. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 6. adımda çizdiğiniz çemberin üçgenin diğer kenarları ile olan kesim noktalarını belirleyiniz ve bu noktaları E ve F olarak isimlendiriniz.

8. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |KD|, |KE| ve |KF| nu hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



9. adım: Yazılımın **Taşı** aracıyla üçgeni herhangi bir köşesinden tutarak sürükleyiniz.

a) Her durumda çember ile üçgenin ilişkisini inceleyerek değerlendirmelerinizi yazınız.

b) Her durumda |KD|, |KE| ve |KF| arasındaki ilişkiyi inceleyip değerlendirmenizi yazınız.

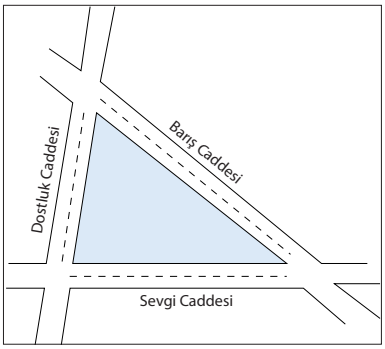
c) Bir üçgenin iç bölgesinde olup üçgenin tüm kenarlarına teğet olan çember, iç teğet çember olarak adlandırılır. Buna göre iç teğet çemberin merkezi olan noktanın özelliklerini yazarak belirtiniz.

4. Oluşan her üçgen için 3. maddedeki etkinlikten ulaştığınız sonuçlardan hareketle genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemelerden hareketle bir üçgenin iç açıortaylarının tek noktada kesişip kesişmediğini, kesişiyorsa bu noktanın özelliğine dair önermenizi ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Aşağıdaki haritada gösterilen caddenin her birinden eşit uzaklıkta olacak şekilde okul inşa edilmek isteniyor.



Buna göre

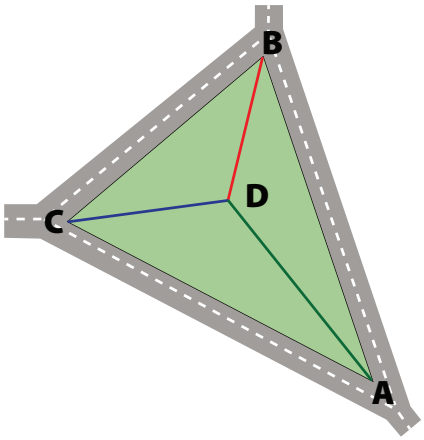
a) Haritada üç caddenin her birine eşit uzaklıkta olan noktanın özelliklerini belirtiniz.

b) Haritayı iki farklı doğru parçasına göre katlayarak üç caddeye de eşit uzaklıkta olan noktayı bulma adımlarını sırasıyla yazınız.

7. Örnek

Yanda haritada etrafı düz yollarla çevrili, ABC üçgeni biçimindeki bir parkın içinde üç yola da eşit uzaklıktaki D noktasında şehrin işgalden kurtuluşunu simgeleyen bir anıt bulunmaktadır. Bu anıtı ziyaret eden Ada, Burcu ve Cenk isimli üç arkadaş parkın köşelerine doğrusal bir şekilde yürüyerek sırasıyla A, B ve C noktalarına gelmişlerdir.

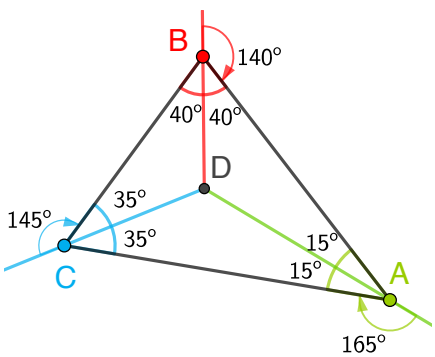
Parkın köşelerinde bulunan arkadaşlardan her biri diğerinin bulunduğu noktaya gitmek için saat yönünde dönerek yönünü değiştirmeden ilerlemiştir. Burcu, Ada'nın bulunduğu noktaya gitmek için 140° dönerken Ada, Cenk'in bulunduğu noktaya gitmek için 165° dönmüştür.



Buna göre Cenk'in Burcu'nun bulunduğu noktaya gitmesi için en az kaç derece dönmesi gerektiğini bulunuz.

Çözüm

D noktası, üçgenin kenarlarına eşit uzaklıkta olduğundan ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi yani iç açıortaylarının kesim noktasıdır. Buna göre [AD], [BD] ve [CD] açıortaydır. Yandaki şekilde gösterildiği gibi Burcu'nun dönüş açısının ölçüsü 140° olduğundan $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = 40^\circ$ ve Ada'nın dönüş açısının ölçüsü 165° olduğundan $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = 15^\circ$dir.



ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

$30^\circ + 80^\circ + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 70^\circ$ olur.

Buradan $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD}) = 35^\circ$ olup Cenk, Burcu'nun bulunduğu B noktasına gitmek için en az $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$ dönmelidir.

10. Uygulama

Üçgenin Dış Açıortayı ve Özellikleri

Öğretmeninizin rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız ve aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. Bir üçgenin bir dış açısına ait açıortayın uzantısını kestiği kenarda oluşturduğu parçaların oranı ile üçgenin diğer iki kenarı arasındaki ilişkiyi grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden yola çıkarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir üçgenin bir dış açısına ait açıortayın, uzantısının kestiği kenarda oluşturduğu parçaların oranı ile üçgenin diğer iki kenarı arasındaki ilişkiye ulaşmak için yaptığınız varsayımlar hakkında tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak 1 ile 30 arasında pozitif tam sayı değerleri alabilen AB, BC ve AC sürgülerini tanımlayınız.

2. adım: Yazılımın **Verilen Uzunlukta Doğru Parçası** çizme aracını kullanarak BC sürgüsü uzunluğunda BC doğru parçası çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Çember** aracını kullanarak merkezi B ve yarıçapı AB sürgüsüne bağlı çember ile merkezi C ve yarıçapı AC sürgüsüne bağlı çemberi çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak çemberlerin kesim noktalarından birini A olarak isimlendiriniz ve çemberleri **Nesne Göster** seçeneğiyle gizleyiniz.

5. adım: Yazılımın **Doğru Parçası** aracını kullanarak [AB] nı **Işın** aracını kullanarak [CA nı çiziniz ve ABC üçgenini oluşturunuz.

6. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak [CA üzerinde [AC] dışında bir nokta belirleyiniz ve noktayı E olarak isimlendiriniz.

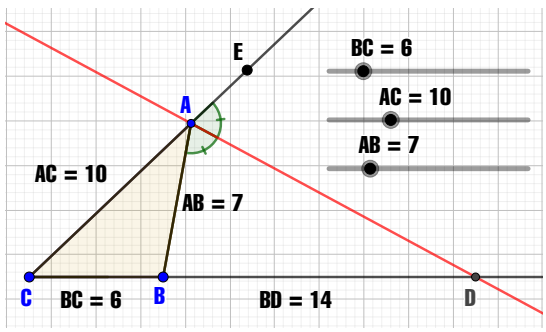
7. adım: Yazılımın **Açıortay** aracını kullanarak BAE açısına ait açıortayı ve **Işın** aracı yardımıyla [CB nı çiziniz.

8. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 7. adımda çizdiğiniz açıortayın [CB ile kesim noktasını belirleyiniz ve noktayı D olarak isimlendiriniz.

9. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** ölçme aracını kullanarak aşağıdaki tabloda verilen uzunlukları ve bunların oranlarını hesaplayınız . Bulduğunuz sonuçlara göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

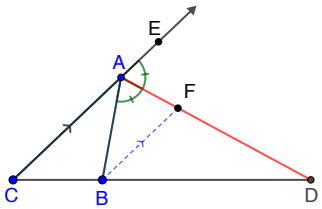
$\lvert AB \rvert$	$\lvert AC \rvert$	$\lvert BC \rvert$	$\lvert BD \rvert$	$\lvert CD \rvert$	$\frac{\lvert AB \rvert}{\lvert AC \rvert}$	$\frac{\lvert BD \rvert}{\lvert CD \rvert}$

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



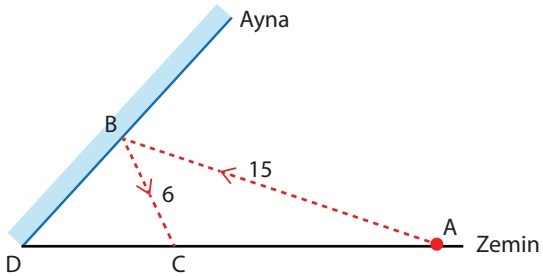
4. Tanımladığınız sürgülerin farklı değerleri için yeni üçgenler oluşturunuz. Bu üçgenlerde 3. maddenin 9. adımındaki hesaplanan oranların aldığı yeni değerleri inceleyerek genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Oluşturduğunuz genellemeden hareketle üçgende bir dış açıortayın kestiği kenar ile üçgenin diğer iki kenarı arasındaki ilişkiyi üçgenlerde benzerlik yardımıyla gösteriniz ve bir önerme olarak ifade ediniz. Bunun için yanda bulunan BAE dış açısının [AD] açıortayı çizilmiş ve [AC] ile [BF] nın paralel olduğu ABC üçgenine ait şekilden yararlanınız.

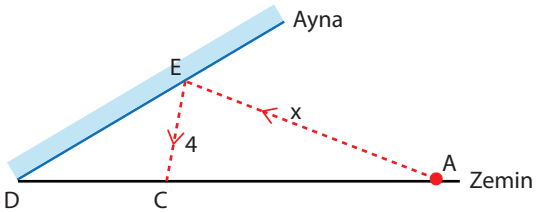


6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Düz bir zemin üzerinde A noktasına yerleştirilmiş ışık kaynağından gönderilen ışın düz bir aynaya çarptıktan sonra yansıyarak zemindeki C noktasına ulaşmıştır. Aynaya gelen ışının aynayla yaptığı açının ölçüsü, aynadan yansıyan ışının ayna ile yaptığı açının ölçüsüne eşittir.



Şekil 1



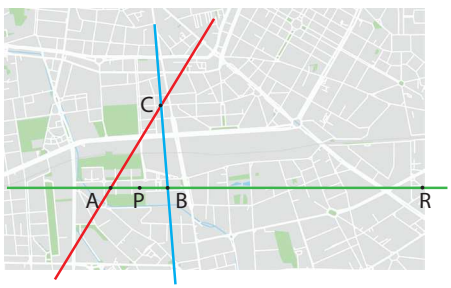
Şekil 2

Ayna Şekil 1'deki konumda iken ışın aynaya B noktasında çarparken, ayna Şekil 2'deki konuma getirildiğinde ışın aynaya E noktasında çarpmaktadır.

|AB| = 15 birim, |BC| = 6 birim ve |EC| = 4 birim olduğuna göre |AE| = x in kaç birim olduğunu bulunuz.

8. Örnek

Yandaki şekilde A, B ve C noktalarında bulunan yerleşim yerlerini birbirine bağlayan doğrusal üç yolun kırmızı, mavi ve yeşil yol ile gösterildiği bir harita görseli verilmiştir.



A noktasında bulunan bir hareketli, yeşil yol üzerinde 4 km ilerlediğinde kırmızı ve mavi yollara eşit uzaklıkta bulunan bir P noktasına ulaşmıştır.

Hareketli, yeşil yol üzerinde 24 km daha ilerlediğinde ikinci defa kırmızı ve mavi yollara eşit uzaklıkta bulunan R noktasına ulaşmıştır.

Buna göre A ile B yerleşim yerlerinin arasındaki uzaklığın kaç km olduğunu bulunuz.

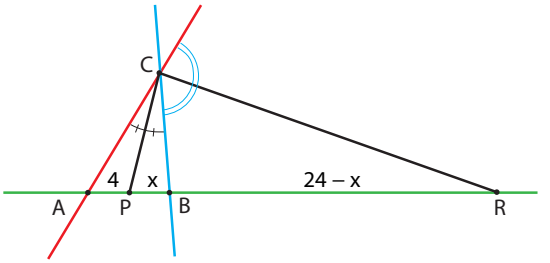
Çözüm

Bir açının kollarına eşit uzaklıktaki nokta o açının açıortayı üzerinde bulunur.

Buna göre P noktası C köşesine ait iç açıortay üzerinde iken R noktası C köşesine ait dış açıortay üzerindedir.

ABC üçgeninde [CP] iç açıortay olduğundan $\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{x}{4}$ tür.

ABC üçgeninde [CR] dış açıortay olduğundan $\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{24-x}{28}$ dir.



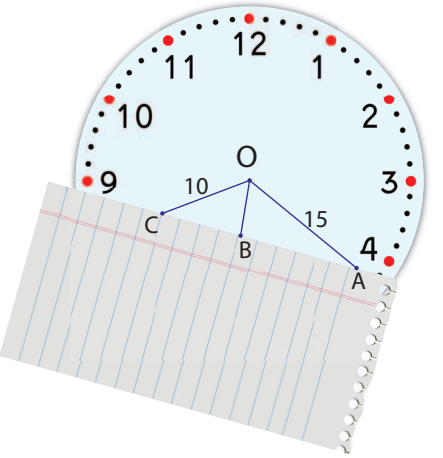
Bu iki ifade birbirine eşitlenirse

$\frac{x}{4} = \frac{24-x}{28} \Rightarrow x = 3$ olur ve $|AB| = 4 + 3 = 7$ km bulunur.

7. Sıra Sizde

Yandaki görselde dairesel bir saat ile saatin bir kısmını kapatan dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. Evren, saatin O noktasında bulunan ve dakikayı gösteren kadranının kâğıdın kenarı ile kesiştiği noktaları onar dakikalık aralıklarla A, B ve C olarak işaretlemiştir. Evren daha sonra O noktasının A, B ve C noktalarına uzaklıklarını hesaplamış ve $|OA| = 15$ cm, $|OC| = 10$ cm olarak bulmuştur.

Buna göre |OB| nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.



11. Uygulama

Üçgenin İki Dış Açıortayı ile Diğer Köşesinden Çizilen İç Açıortayın Kesişimi

Öğretmeniniz rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız ve 8. uygulamada ulaştığınız sonuçlardan yararlanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. Bir üçgenin iki köşesinden çizilen dış açıortaylar ile diğer köşesinden çizilen iç açıortayın aynı noktada kesişip kesişmediğini, kesişiyorsa bu noktanın özelliğini grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden yola çıkarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir üçgenin iki köşesinden çizilen dış açıortaylar ile diğer köşesinden çizilen iç açıortayın aynı noktada kesişip kesişmediğini ve kesişiyorsa bu noktanın özelliğine ulaşmak için yaptığınız varsayımlar hakkında grup arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Yazılımın **Doğru** aracını kullanarak ABC üçgeni oluşturacak şekilde AB, BC ve AC doğrularını çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Açıortay** aracını kullanarak ABC üçgeninin iki iç açısına ait dış açıortayları çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 2. adımda çizdiğiniz açıortayların kesim noktasını belirleyiniz ve K olarak isimlendiriniz.

4. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak K noktasından 1. adımda çizdiğiniz doğrulardan herhangi birine dik olan bir doğru çiziniz.

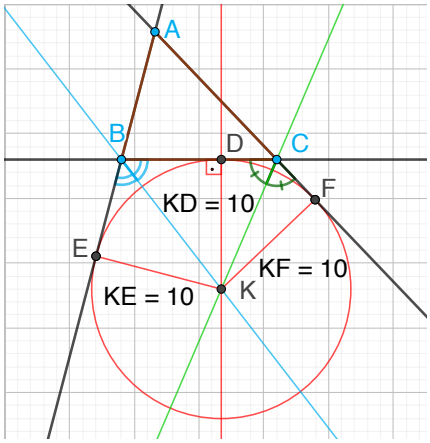
5. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 4. adıma çizdiğiniz dik doğrunun diğer doğruyu kestiği noktayı belirleyiniz ve D olarak isimlendiriniz.

6. adım: Yazılımın **Çember** aracını kullanarak merkezi K noktası ve yarıçapı |KD| na eşit olan bir çember çiziniz.

7. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 6. adımda çizdiğiniz çemberin diğer doğrular ile olan kesim noktalarını belirleyiniz, ardından bu noktaları E ve F olarak isimlendiriniz.

8. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |KD|, |KE| ve |KF| nu hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



9. adım: Yazılımın **Taşı** aracıyla üçgeni herhangi bir köşesinden tutarak sürükleyiniz.

Üçgenin farklı durumları için çizdiğiniz çemberi inceleyiniz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Her durumda çember ile üçgenin ilişkisini inceleyerek değerlendirmelerinizi yazınız.

b) Her durumda |KD|, |KE| ve |KF| arasındaki ilişkiyi inceleyip değerlendirmenizi yazınız.

c) Bir üçgenin dış bölgesinde olup üçgenin köşelerinden geçen doğrulara teğet olan çember dış teğet çember olarak adlandırılır. Buna göre dış teğet çemberin merkezi olan noktanın özelliklerini yazarak belirtiniz.

4. Oluşan her üçgen için 3. maddedeki etkinlik sonucu ulaştığınız sonuçlardan hareketle genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

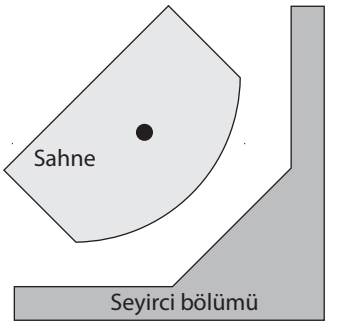
5. Bir üçgenin iki köşesinden çizilen dış açıortaylar ile diğer köşesinden çizilen iç açıortayın aynı noktada kesişip kesişmediğini, kesişiyorsa bu noktanın özelliğine dair önermenizi ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Yandaki şekilde seyirci bölümü üç farklı yönden sahneye bakacak şekilde kenarları düz tasarlanmış bir gösteri salonunun görseli verilmiştir.

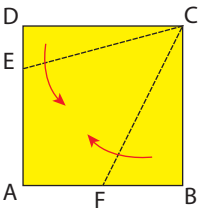
Bu salonda sahneye çıkan bir oyuncunun seyirci bölümlerinin üçüne de eşit uzaklıkta olması istenmektedir.

Buna göre oyuncunun sahnede bulunması gereken konumunu belirleyecek yöntemi yazınız.

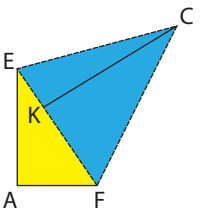


9. Örnek

Ön yüzü sarı, arka yüzü mavi olan kare biçimindeki bir kâğıt Şekil 1'deki gibi [CE] ve [CF] boyunca katlandığında karenin BC kenarı ve CD kenarı Şekil 2'deki gibi B ve D köşeleri K noktasına gelecek şekilde [EF] üzerinde çakışmaktadır.



Şekil 1



Şekil 2

Buna göre

a) ECF açısının ölçüsünü bulunuz.

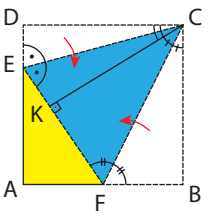
b) AEF üçgeni için C noktasının özelliğini belirleyiniz.

c) Karenin çevresi ile AEF üçgeninin çevresi arasında nasıl bir ilişki olduğunu belirleyiniz.

Çözüm

Katlama işlemlerine göre yandaki şekilde gösterildiği gibi CDE ile CKE ve CBF ile CKF üçgenleri eş üçgenler olduğundan

$m(\widehat{KCE}) = m(\widehat{DCE})$, $m(\widehat{KCF}) = m(\widehat{BCF})$ ve $|DE| = |EK|$, $|BF| = |FK|$ olur.



Buna göre

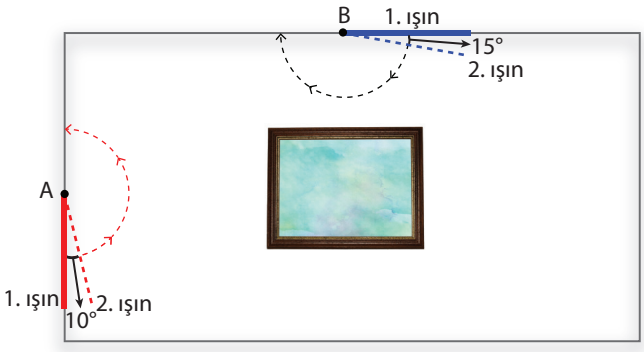
a) $m(\widehat{ECF}) = \dfrac{m(\widehat{BCD})}{2} = 45°$ dir.

b) [EC] ve [FC], AEF üçgeninin dış açıortayları olduğundan C noktası AEF üçgeninin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.

c) $Ç(\widehat{AEF}) = |AE| + |EK| + |AF| + |FK| = |AE| + |DE| + |AF| + |FB| = |AB| + |AD|$

$Ç(ABCD) = |AB| + |BC| + |CD| + |AD| = 2 \cdot Ç(\widehat{AEF})$ dir.

8. Sıra Sizde



Bir müzede sergilenen tablonun asılı olduğu dikdörtgen biçimindeki duvarın iki kenarına A ve B lazer cihazları yerleştirilmiştir. Bu cihazlardan her biri, birinci ışınını bulunduğu duvar kenarı boyunca göndermektedir. Cihazlar sonraki her seferde aynı sabit açılarla dönerek bir sonraki ışınını göndermektedir.

Yandaki şekilde gösterildiği gibi A cihazı 10°lik açılarla saat yönünün tersi yönde, B cihazı 15°lik açılarla saat yönünde hareket etmektedir.

A cihazından çıkan 13. ışınla B cihazından çıkan 11. ışın aynı doğru boyunca ilerlemektedir.

Buna göre

a) A cihazından çıkan 7. ışın ile B cihazından çıkan kaçıncı ışının kesim noktasının, cihazların bulunduğu kenarlara eşit uzaklıkta olduğunu bulunuz.

b) B cihazından çıkan 12. ışın ile A cihazından çıkan kaçıncı ışının kesim noktasının, cihazların bulunduğu kenarlara eşit uzaklıkta olduğunu bulunuz.

Üçgenin Kenarortayları

Kenarortay bir üçgende, bir köşeden karşısındaki kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasıdır. Bu kavram denge ve simetri sağlayıcı bir araç olarak kullanılır ve mühendislikten mimariye kadar pek çok alanda kritik bir rol oynar. Köprü tasarımlarında kenarortay prensiplerinden yararlanılarak yüklerin eşit bir şekilde dağıtılması sağlanır. Bu sayede köprünün ağırlığı dengelenir ve taşıma kapasitesi artırılır. Benzer şekilde gökdelenler gibi büyük yapılarda yapının ağırlık merkezi ve statik dengesi, kenarortay hesaplamaları ile en iyi şekilde gerçekleştirilir. Kenarortaylar, bir yapının farklı noktalarına kuvvetlerin eşit dağılımını sağlayarak hem güvenliği artırır hem de yapının ömrünü uzatır.

12. Uygulama

Üçgenin Kenarortayları ve Ağırlık Merkezi

Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen etkinlik adımlarını gerçekleştiriniz ve soruları cevaplandırınız.

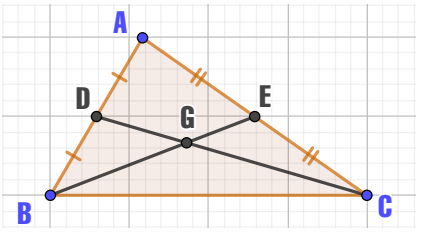
1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak bir ABC üçgeni çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Orta Nokta** aracını kullanarak ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz, ardından sırasıyla D ve E olarak isimlendiriniz.

3. adım: Yazılımın **Doğru Parçası** aracını kullanarak ABC üçgeninin BE ile CD kenarortaylarını çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak BE ile CD kenarortaylarının kesim noktasını belirleyiniz ve G olarak isimlendiriniz.

Yukarıda verilen adımların matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. Bir üçgende kenarortayların kesim noktasının kenarortayları belli bir oranda bölüp bölmediğine dair sınıf arkadaşlarınızın görüşlerini de dikkate alarak varsayımlarda bulununuz. Bunun için yukarıda BE ve CD kenarortayları çizilen ABC üçgeninden yararlanınız.

2. Bir üçgende kenarortayların kesim noktasının kenarortayları belli bir oranda bölüp bölmediğine dair yaptığınız varsayımlar hakkında sınıf arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz. Bu süreçte arkadaşlarınızın düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak uzlaşma sağlayınız.

3. Matematik yazılımıyla oluşturduğunuz ABC üçgeninde yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak aşağıdaki tabloda verilen uzunlukları ve oranlarını hesaplayınız. Buna göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$\lvert BG\rvert$	$\lvert EG\rvert$	$\lvert CG\rvert$	$\lvert DG\rvert$	$\lvert CD\rvert$	$\frac{\lvert EG\rvert}{\lvert BG\rvert}$	$\frac{\lvert DG\rvert}{\lvert CG\rvert}$

4. Yazılımın **Taşı** aracını kullanarak üçgeni herhangi bir köşesinden tutup sürükleyiniz. Üçgenin farklı durumları için 3. maddedeki tabloda hesaplanan uzunlukların ve oranların aldığı yeni değerleri inceleyerek genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Bir üçgende kenarortayların kesim noktasının kenarortayları belli bir oranda bölüp bölmediğine dair önermenizi yazarak ifade ediniz.

6. Bir üçgende herhangi iki kenarortayın kesim noktası üçgenin ağırlık merkezidir. Oluşturduğunuz önermeden hareketle üçüncü kenarortayın üçgenin ağırlık merkezi ile ilişkisini yazarak ifade ediniz.

7. Oluşturduğunuz önermeden hareketle bir üçgende ağırlık merkezinin kenarortayları belli bir oranda bölüp bölmediğine dair ulaştığınız sonucu yazarak ifade ediniz.

8. Öğretmeniniz rehberliğinde sınıfınızda 4 kişilik gruplara ayrılıp aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Aşağıdaki kareli kâğıt üzerine A köşesi dik olan bir ABC üçgeni çiziniz.

2. adım: BC kenarının orta noktasını belirleyiniz ve D olarak isimlendiriniz.

3. adım: [AD] nı çiziniz ve aşağıdaki tabloda verilen uzunluk değerlerini cetvel yardımıyla ölçerek tabloyu doldurunuz.

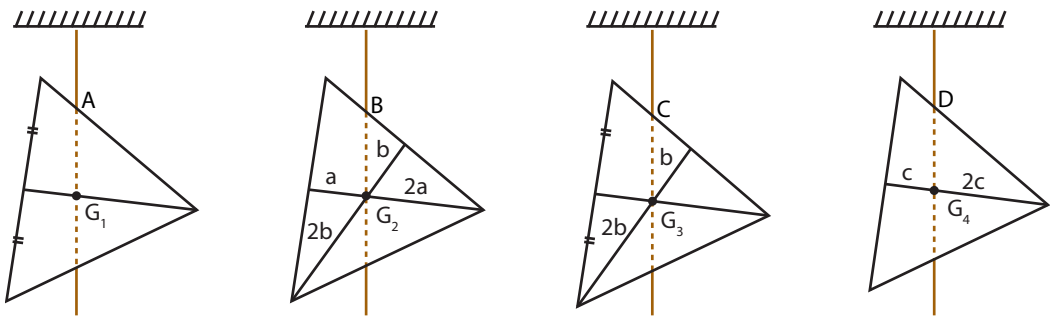
|BC|	|BD|	|CD|	|AD|

4. adım: Elde ettiğiniz değerlere göre bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğunun ayırdığı parçaların uzunluğu ile ilişkisini ifade ediniz. Belirlediğiniz ilişkiyi diğer gruplarla paylaşınız ve ortak bir çıkarım yapınız. Yaptığınız çıkarımı yazarak ifade ediniz.

9. 7. maddede oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

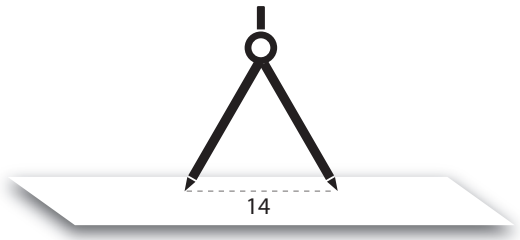
Bir cisim ağırlık merkezi dışındaki bir noktadan asıldığında cismin ağırlık merkezi, asılan noktadan geçen düşey doğru üzerinde bulunur.

Buna göre aşağıdaki şekillerde A, B, C, D noktalarından asılmış ve dengede duran üçgen biçimindeki nesnelerin hangilerinde G_1, G_2, G_3, G_4 ile gösterilen noktaların kesinlikle cismin ağırlık merkezi olduğu söylenebilir? Açıklayınız.

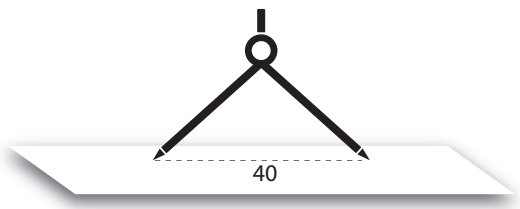


10. Örnek

Ayakları eşit uzunlukta olan bir pergel kâğıt düzlemine dik tutulup Şekil 1'deki gibi ayaklarının uç noktaları arasındaki uzaklık 14 birim olacak şekilde açılıyor. Bu durumda pergel ile kâğıt arasında oluşan üçgensel bölgenin ağırlık merkezinin kâğıda uzaklığı 8 birim olmaktadır.



Şekil 1

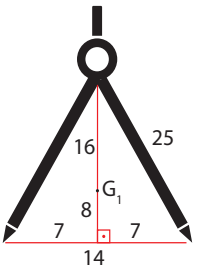


Şekil 2

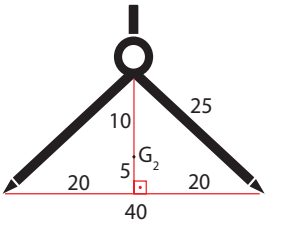
Buna göre bu pergel Şekil 2'deki gibi ayaklarının uç noktaları arasındaki uzaklık 40 birim olacak şekilde açıldığında oluşan üçgensel bölgenin ağırlık merkezinin kâğıda uzaklığının kaç birim olacağını bulunuz.

Çözüm

Pergelin ayakları eşit uzunlukta olduğundan oluşan üçgenler ikizkenar üçgenlerdir. İkizkenar üçgenlerin ağırlık merkezi tabana ait yükseklik üzerinde bulunur. Şekil 1'deki üçgende tabana ait yükseklik çizildiğinde tabanda oluşan parçalar eşit uzunlukta ve her biri 7 birim olur. Bu üçgenin ağırlık merkezi olan G_1 noktasının üçgenin kenarına uzaklığı 8 birim verildiğinden bu kenarın karşısındaki köşeye uzaklığı 16 birimdir. Dik kenar uzunlukları 7 birim ve 24 birim olan dik üçgende Pisagor teoreminden ayakların uzunluğu $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ birim bulunur.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 2'deki üçgende tabana ait yükseklik çizildiğinde tabanda oluşan parçalar eşit uzunlukta ve her biri 20 birim olur. Hipotenüs uzunluğu 25 birim ve dik kenarlarından birinin uzunluğu 20 birim olan dik üçgende Pisagor teoreminden diğer dik kenar olan yükseklik $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ birim bulunur. Bu üçgenin ağırlık merkezi olan G_2 noktasının üçgenin köşesine olan uzaklığı, bu köşenin karşısındaki kenara olan uzaklığının 2 katına eşit olduğundan G_2 noktasının tabana uzaklığı $\frac{15}{3} = 5$ birimdir.

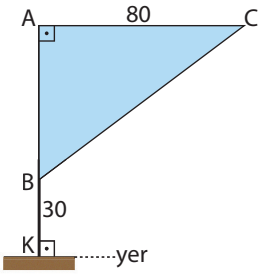
9. Sıra Sizde

Şekil 1'de K noktasında yere dik olan bir [AK] direğine A ve B köşelerinden vidalanmış ABC dik üçgeni şeklinde bir tabela bulunmaktadır.

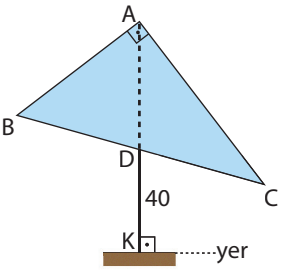
Bu tabela, B köşesindeki vidanın çıkması sonucu A köşesi etrafında dönerek Şekil 2'deki konuma gelip dengede kalmıştır.

|BK| = 30 birim, |DK| = 40 birim, |AC| = 80 birim olduğuna göre

a) Direğin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.



Şekil 1

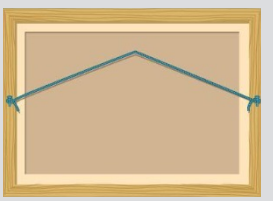


Şekil 2

b) Tabelanın çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

Yanda görseli verilen tablo, ip ile düzgün şekilde duvarda bulunan bir çiviye asılmak istendiğinde ipin iki ucunun tabloda düşey doğrultuya göre simetrik olan noktalara tutturulması ve çivinin düşey doğrultu üzerinde olması gerekmektedir. Bu sayede ağırlık dengeli dağılır ve tablo eğrilmeden düzgün şekilde asılı kalır. Bu ve buna benzer simetri ve dengenin sağlanması gereken durumlarda kenar orta dikme bilgisinden faydalanılır.



13. Uygulama

Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri ve Çevrel Çemberinin Merkezi

Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen etkinlik adımlarını gerçekleştiriniz ve soruları cevaplandırınız.

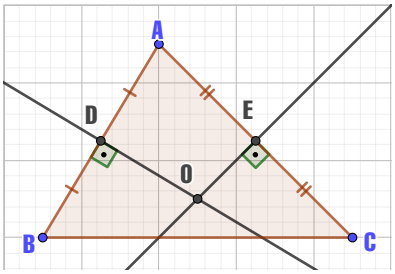
1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak bir ABC üçgeni çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Orta Nokta** aracını kullanarak ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz, ardından sırasıyla D ve E olarak isimlendiriniz.

3. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak D ve E noktalarından sırasıyla AB ve AC kenarlarına dik doğrular çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 3. adımda çizdiğiniz doğruların kesim noktasını belirleyiniz ve O olarak isimlendiriniz.

Yukarıda verilen adımların matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. Öğretmeniniz rehberliğinde 6 kişilik gruplara ayrılınız. Bir üçgende herhangi iki kenar orta dikmenin kesim noktası ile üçüncü kenar orta dikme arasındaki ilişkiyi grup arkadaşlarınızla birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak tartışınız. Uzlaştığınız fikirlerden yola çıkarak varsayımlarda bulununuz.

2. Bir üçgende herhangi iki kenar orta dikmenin kesim noktası ile üçüncü kenar orta dikme arasındaki ilişkiye dair yaptığınız varsayımlar hakkında grup arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Matematik yazılımıyla oluşturduğunuz ABC üçgeninde yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak aşağıdaki tabloda verilen uzunlukları hesaplayınız ve tabloyu doldurunuz.

|OA|	|OB|	|OC|

Yazılımın **Taşı** aracını kullanarak üçgeni herhangi bir köşesinden tutup sürükleyiniz. Üçgenin farklı durumları için 3. maddedeki tabloda hesaplanan uzunlukların aldığı yeni değerleri inceleyerek genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

4. Bir üçgende iki kenar orta dikmenin kesim noktası ile üçüncü kenar orta dikme arasındaki ilişkiye dair önermenizi ifade ediniz.

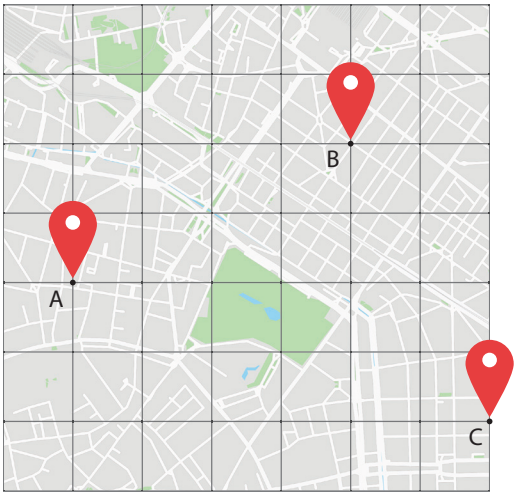
5. Bir üçgenin üç köşesinden de geçen çember, üçgenin çevrel çemberi olarak adlandırılır. Oluşturduğunuz önermeden hareketle bir üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktasının üçgenin çevrel çemberinin merkezi ile ilişkisini ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

Eş karesel bölgelere ayrılmış harita üzerinde bir zincir marketin üç şubesinin yeri A, B ve C noktaları ile gösterilmiştir.

Marketlere ürün temini için kurulacak bir deponun üç markete de eşit uzaklıkta olması istenmektedir.

Buna göre



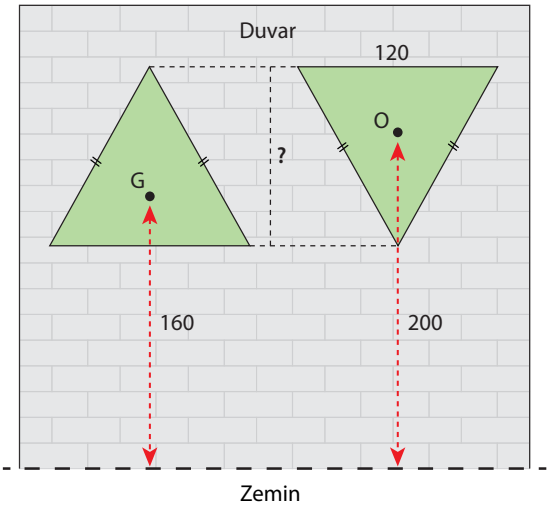
a) Haritada üç noktanın her birine eşit uzaklıkta olan noktanın nasıl belirlenebileceğini açıklayınız.

b) Haritayı iki farklı yerden katlayarak üç noktaya da eşit uzaklıkta olan noktanın nasıl bulunabileceğini yazınız.

11. Örnek

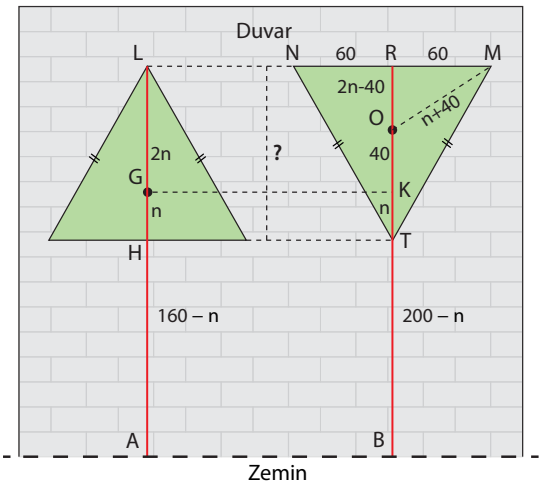
Bir odanın duvarına ikizkenar üçgen biçiminde birbirine eş iki dekoratif tablo, zemine uzaklıkları eşit olacak şekilde yanda gösterildiği gibi asılmıştır. Tabloların 120 cm uzunluğundaki taban kenarları odanın zeminine paralel olacak şekilde birisi ağırlık merkezi olan G noktasından, diğeri çevrel çemberinin merkezi olan O noktasından asılmıştır.

G ve O noktalarının odanın zeminine olan uzaklıkları sırasıyla 160 cm ve 200 cm olduğuna göre tabloların yüksekliğinin kaç santimetre olduğunu bulunuz.



Çözüm

Tablolar ikizkenar üçgen biçiminde olduğundan yandaki şekilde gösterildiği gibi [HL] ve [TR] hem kenarortay hem de yükseklik olur.



$|GH| = n$ olsun, [HT] na paralel [GK] çizilirse $|GH| = |KT| = n$, ağırlık merkezi kenarortayı $\frac{1}{2}$ oranında böleceğinden $|GL| = |KR| = 2n$ olur.

G ve O noktalarının zemine uzaklıkları 160 cm ve 200 cm ise

$|OK| = 200 - 160 = 40$ cm, $|OR| = 2n - 40$

O çevrel çemberin merkezi olduğundan ve [TR] kenar orta dikme olacağından $|MR| = |NR| = 60$ cm, $|OM| = |OT| = n + 40$ olur. ORM dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$(n + 40)^2 = (2n - 40)^2 + 60^2$

$3n^2 - 240n + 3600 = 0 \Rightarrow n^2 - 80n + 1200 = 0$

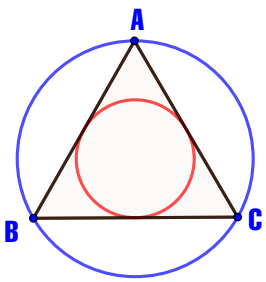
$(n - 60) \cdot (n - 20) = 0 \Rightarrow n = 60$ veya $n = 20$

$n = 20$ için $|OR| = 0$ olacağından $n = 60$ olmalıdır.

Tabloların yüksekliği $|HL| = |TR| = 3n = 3 \cdot 60 = 180$ cm bulunur.

10. Sıra Sizde

Yandaki şekilde çevrel çemberi ile iç teğet çemberi çizilmiş olan bir ABC eşkenar üçgeni verilmiştir.



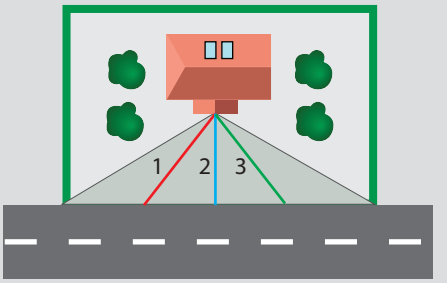
Bu şekilden faydalanarak aşağıda verilen soruları cevaplandırınız.

1. **ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olan I noktası ile çevrel çemberinin merkezi olan O noktasını şekil üzerinde belirleyiniz.**

2. **ABC üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı olan R ile iç teğet çemberinin yarıçapı olan r nin üçgenin bir kenar uzunluğu olan a türünden eşitini bulunuz.**

Üçgenin Yükseklikleri

Yandaki görselde kuş bakışı görünen bir ev verilmiştir. Bu evin giriş kapısından caddeye kadar uzanan bir taş yol yapılması için 1, 2 ve 3 numaralı yollardan biri seçilmek istendiğinde hangi yolun en uygun güzergâh olduğunu belirlemede üçgende yükseklik kavramından faydalanılabilir. Bir üçgenin en temel özelliklerinden biri olan yükseklik, bir köşeden karşısındaki kenara veya bu kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasıdır. Bu kavram, yalnızca bir geometrik unsur olmaktan öte günlük hayatta sık sık karşımıza çıkmaktadır.



14. Uygulama

Üçgenin Yükseklikleri

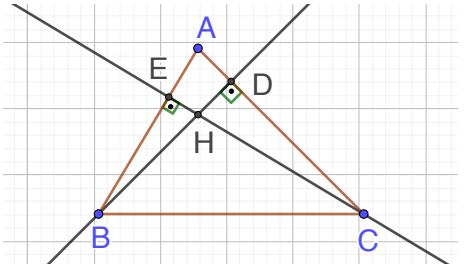
Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen etkinlik adımlarını gerçekleştiriniz ve soruları cevaplandırınız.

1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak bir ABC üçgeni çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak ABC üçgeninin B ve C köşelerinden sırasıyla AC ve AB kenarlarına dik doğrular çiziniz. Çizdiğiniz dik doğruların AC ve AB kenarlarını kestiği noktaları belirleyiniz ardından sırasıyla D ve E olarak isimlendiriniz.

3. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 2. adımda çizdiğiniz BD ve CE doğrularının kesim noktasını belirleyiniz ve H olarak isimlendiriniz.

Yukarıda verilen adımların matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. Bir üçgende herhangi iki kenara ait yüksekliğin kesim noktası ile üçüncü kenara ait yükseklik arasındaki ilişkiye dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız, arkadaşlarınızın görüşlerini de dikkate alarak varsayımlarda bulununuz. Bunun için yukarıda iki kenarına ait yüksekliğini çizdiğiniz ABC üçgeninden yararlanınız.

2. Bir üçgende herhangi iki kenara ait yüksekliğin kesim noktası ile üçüncü kenara ait yükseklik arasındaki ilişkiye dair yaptığınız varsayımlar hakkında sınıf arkadaşlarınızla tartışarak genellemelerinizi oluşturunuz. Bu süreçte arkadaşlarınızın düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak uzlaşma sağlayınız.

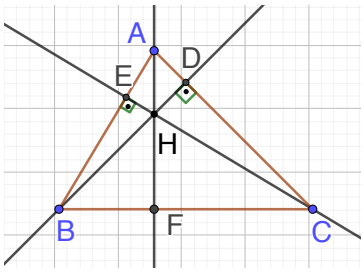
3. Matematik yazılımlarını kullanarak yaptığınız etkinliğin adımlarına aşağıdaki gibi devam ediniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Doğru** aracını kullanarak AH doğrusunu çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak AH doğrusunun BC kenarını kestiği noktayı belirleyiniz ve bu noktayı F olarak isimlendiriniz.

3. adım: Yazılımın **Açı** aracını kullanarak $\widehat{AFB}$ ya da $\widehat{AFC}$ nın ölçüsünü hesaplayınız.

Yukarıda verilen adımların matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



4. Hesapladığınız açı ölçülerine göre bir üçgende herhangi iki kenara ait yüksekliğin kesim noktası ile üçüncü kenara ait yükseklik arasındaki ilişkiye dair yaptığınız genellemeleri varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Bir üçgende herhangi iki kenara ait yüksekliğin kesim noktası ile üçüncü kenara ait yükseklik arasındaki ilişkiye dair önermenizi ifade ediniz.

6. Matematik yazılımı kullanarak yaptığınız etkinliğin adımlarına aşağıdaki gibi devam ediniz ve soruları cevaplayınız.

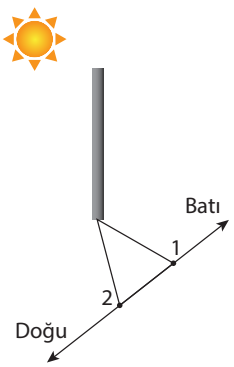
1. adım: Yazılımın **Açı** aracını kullanarak ABC üçgenine ait $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ ve $\widehat{BAC}$ nın ölçülerini hesaplayınız.

2. adım: Yazılımın **Taşı** aracını kullanarak ABC üçgenini herhangi bir köşesinden tutup sürükleyiniz. Üçgenin açılarının aldığı değerlere göre yüksekliklerinin kesim noktası olan H'nin üçgene göre bulunduğu konumları inceleyiniz. Yaptığınız gözlemlere göre ulaştığınız sonuçları uygun seçeneği yazarak aşağıdaki tabloda belirtiniz.

Üçgen Türü	Yüksekliklerin Kesim Noktası (İçinde/Dışında)
Dar Açılı Üçgen	
Dik Açılı Üçgen	
Geniş Açılı Üçgen	

7. Oluşturduğunuz önerme yardımı ile aşağıda verilen problemi çözünüz.

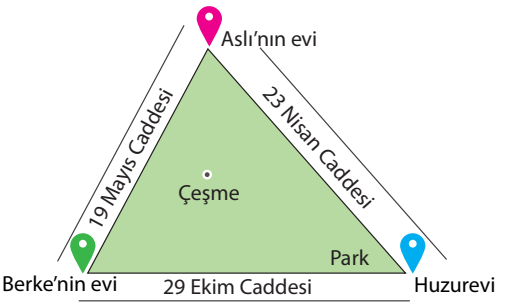
Yön bulma yöntemlerinden biri de gölge yöntemidir. Bu yöntemde önce uzunluğu 1 metre civarında olan bir çubuk dik olacak şekilde yere saplanır. Güneşin oluşturduğu ilk gölgenin uç noktası işaretlenir. Aradan 15-30 dakika civarı bir süre geçtikten sonra oluşan yeni gölgenin uç noktası işaretlenir. İşaretlenen noktalardan geçen bir doğru çizildiğinde doğrunun 1. nokta tarafı batıyı, 2. nokta tarafı doğuyu gösterecektir.



Buna göre kuzey–güney doğrultusunun tespit edilebilmesi için yerde gölgelerin ve doğrunun oluşturduğu üçgenin hangi yardımcı elemanlarından faydalanılır, açıklayınız.

12. Örnek

Okullarında yürütmekte oldukları sosyal sorumluluk projesi kapsamında yanda krokisi verilen yerleşim yerinde gösterilen huzurevini ziyarete gitmek için evlerinden yola çıkarak parkta buluşmak isteyen Aslı ve Berke arasında aşağıdaki telefon konuşması geçiyor.



Aslı: "Ben evden 29 Ekim Caddesi'ne parktan geçen en kısa yoldan yürüyorum."

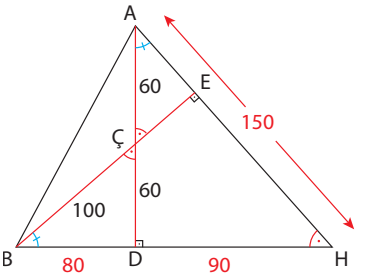
Berke: "Ben de evden 23 Nisan Caddesi'ne parktan geçen en kısa yoldan yürüyorum."

Aslı ve Berke sırasıyla 60 ve 100 metre yürüdükten sonra parkın içindeki çeşmenin bulunduğu noktada buluşuyorlar.

Çeşme, Aslı'nın evine ve 29 Ekim Caddesi'ne eşit uzaklıkta olduğuna göre Aslı ve Berke'nin evlerinin huzurevine uzaklıklarının kaçar metre olduğunu hesaplayınız.

Çözüm

Problemdeki verilere göre oluşturulan taslak çizim yanda verilmiştir. Bu çizime göre Aslı ve Berke en kısa yollardan yürüdüklerine göre ABH üçgeninde sırasıyla AD ve BE yükseklikleri üzerinde bulunmaktadırlar. Buluştukları çeşme bu iki yüksekliğin kesim noktası olan Ç dir.



Buna göre $|BÇ| = 100$ metre , $|AÇ| = 60$ metre olur. Çeşme Aslı'nın evine ve 29 Ekim Caddesi'ne eşit uzaklıkta olduğundan $|ÇD| = 60$ metredir.

BÇD üçgeninde Pisagor teoreminden $100^2 = 60^2 + |BD|^2$ olup buradan $|BD| = 80$ metre bulunur.

$m(\widehat{EBH}) = m(\widehat{DAH})$ ve $m(\widehat{BÇD}) = m(\widehat{AÇE}) = m(\widehat{AHB})$ olduğundan BÇD üçgeni ile AHD üçgeni benzer üçgenlerdir.

Buradan $\frac{80}{120} = \frac{100}{|AH|} \Rightarrow |AH| = 150$ metre ve $\frac{80}{120} = \frac{60}{|DH|} \Rightarrow |DH| = 90$ metre bulunur.

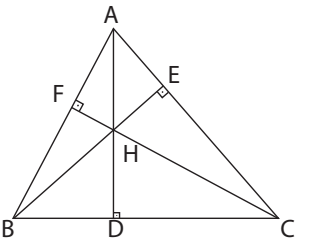
Buna göre Aslı'nın evinin huzurevine uzaklığı $|AH|=150$ metre,

Berke'nin evinin huzurevine uzaklığı $|BH| = 170$ metredir.

11. Sıra Sizde

ABC üçgeninde AD, BE ve CF yükseklikleri H noktasında kesişmektedir.

Buna göre A, B, C, D, E, F ve H noktalarının her birinin yüksekliklerin kesim noktası olduğu üçgenleri tespit ediniz.



Performans Görevi

Adı:	**Üçgenin Yardımcı Elemanları ve Özellikleri**
Beklenen Performans:	• Üçgenin yardımcı elemanları (açıortay, kenarortay, kenar orta dikme ve yükseklik) ile ilgili bilgileri araştırmak ve bu bilgileri yaratıcı yollarla sunmak • Matematiksel bilgiyi görselleştirmek ve iletişim becerilerini geliştirmek • Dijital araçlar kullanarak özgün bir ürün (hikâye, sunum, poster, video veya afiş) tasarlamak
Görev:	Bu görevde öğretmeniniz tarafından gruplara verilecek üçgenin farklı bir yardımcı elemanına (açıortay, kenarortay, kenar orta dikme veya yükseklik) ait özellikler hakkında bilgi edinmeniz istenmektedir. Bu elemanların özelliklerini analiz ederek çıkarımlar yapmanız ve çalışmanızı sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Öğretmeniniz rehberliğinde sınıfınızda 6 kişilik gruplara ayrılınız. • Grupça bir çalışma planı oluşturunuz. Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. • Grup üyelerinizle bir iş bölümü yaparak herkesin görev almasını sağlayınız. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. • Araştırma yaparken veya dijital ortamda çalışırken ihtiyaç duyduğunuzda öğretmenizden yardım alabilirsiniz. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Size verilen yardımcı elemanın tanım ve özellikleri ile matematiksel kullanımı ve formülleri hakkında bilgi toplayınız ve edindiğiniz bilgileri birleştiriniz. • Araştırdığınız yardımcı eleman ile ilgili gerçek yaşam örneklerini araştırınız. • Çalışmanızı nasıl sunacağınıza karar veriniz. • Çalışmanız için hikâye, sunum ya da afiş gibi dijital bir ürün hazırlayınız. • Grupla seçtiğiniz dijital ürünü oluşturmak için uygun araçları belirleyiniz. • Ürününüzü matematiksel doğrulukla hazırlamaya özen gösteriniz. • Görselliği ve anlaşılabilirliği artırmak için örnekler, şekiller ve grafikler kullanınız. • Çalışma sürecinde ekip arkadaşlarınızla iletişiminizi karşılıklı saygı çerçevesinde sürdürünüz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız. • Çalışmanızla ilgili sorulara açık olunuz ve açıklamalarınızı net bir şekilde yapmaya çalışınız. • Sunumlar sırasında diğer grupların farklı çıkarımlarını dinleyerek kendi analizlerinizle kıyaslayınız. • Hazırladığınız dijital ürünü öğretmeninizin belirttiği dijital platforma yükleyerek diğer gruplarla paylaşınız. • Çalışmanızı öğretmeninize zamanında teslim ediniz.
Değerlendirme:	• Aşağıdaki karekodlarda verilen akran değerlendirme formu ile sınıf arkadaşlarınızı, grup değerlendirme formu ile de grup arkadaşlarınızı değerlendiriniz. • Performans göreviniz, öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda yer alan analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Grup değerlendirme formu

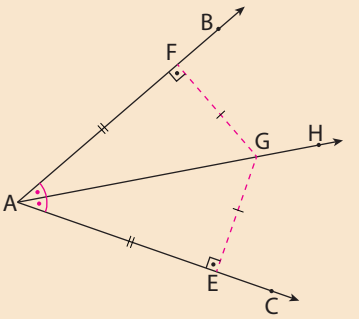
Akran değerlendirme formu

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Kontrol Noktası

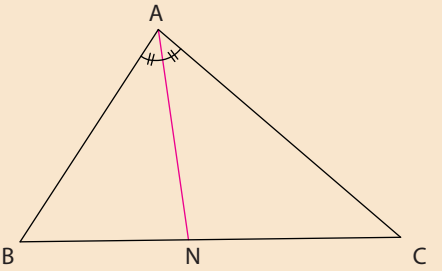
- Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir nokta, açının kollarına eşit uzaklıktadır.

  $[AH$, $\widehat{BAC}$ nın açıortayı, $G \in [AH$, $F \in [AB$, $E \in [AC$, $[GF] \perp [AB$, $[GE] \perp [AC$ ise $|GF| = |GE|$ ve $|AF| = |AE|$ dir.

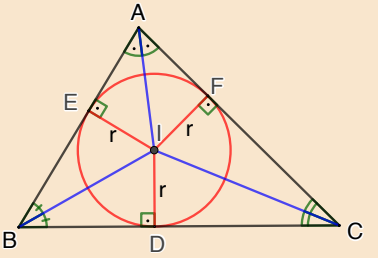


- Bir üçgende herhangi bir iç açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, diğer iki kenarın uzunlukları oranına eşittir.

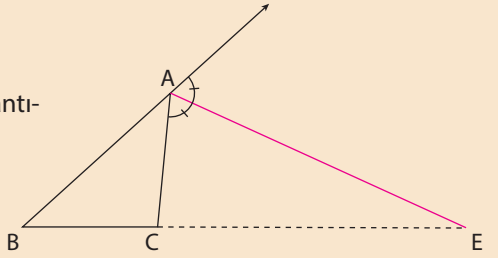
  ABC üçgeninde $[AN]$, $\widehat{BAC}$ nın açıortayı olmak üzere $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|}$ dir.



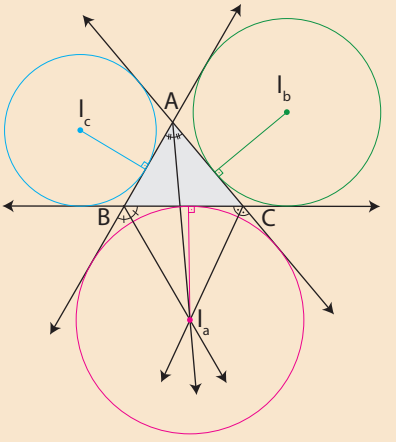
- Bir üçgenin iç açıortayları üçgenin kenarlarından eşit uzaklıkta bir noktada kesişir. Bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.



- Bir ABC üçgeninde A açısının dış açıortayı BC kenarının uzantısını E noktasında kesiyorsa $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|EC|}$ dir.

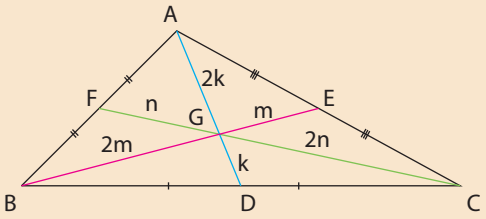


- Bir üçgende iki dış açıortay ile bu dış açılara komşu olmayan iç açının açıortayı tek noktada kesişir. Bu nokta üçgenin dış teğet çemberinin merkezidir. Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.

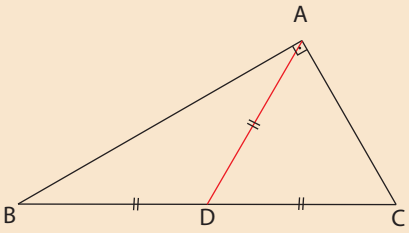


- Bir üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir ve bu nokta üçgenin ağırlık merkezidir.

  ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] kenarortaylar ve [AD] ∩ [BE] ∩ [CF] = {G} olmak üzere G, ABC üçgeninin ağırlık merkezidir ve $\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GF|} = 2$'dir.

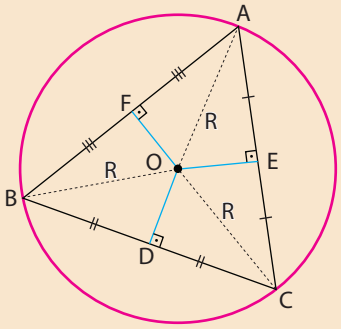


- Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

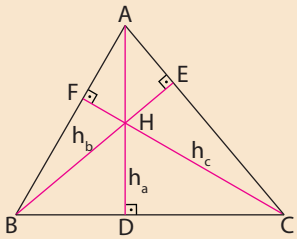


- Bir üçgenin kenar orta dikmeleri tek noktada kesişir, bu nokta üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

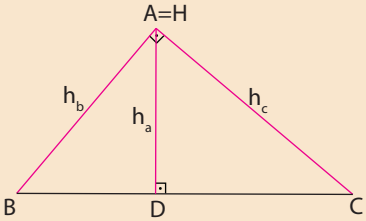
  ABC üçgeninde [OD], [OF] ve [OE] kenar orta dikmelerdir. Buna göre O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir ve çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğu R olmak üzere |OA| = |OB| = |OC| = R dir.



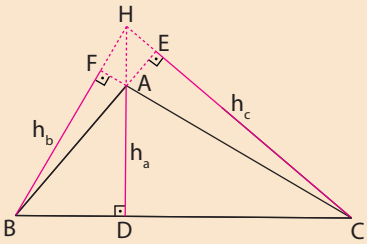
- Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir. Yüksekliklerin kesim noktası, üçgen dar açılı ise üçgenin iç bölgesinde, dik açılı ise üçgenin dik köşesinde ve geniş açılı ise üçgenin dış bölgesindedir. Aşağıdaki şekillerde dar, dik ve geniş açılı ABC üçgenlerinde h_a, h_b ve h_c yüksekliklerinin kesim noktası olan H gösterilmiştir.



ABC dar açılı üçgeni



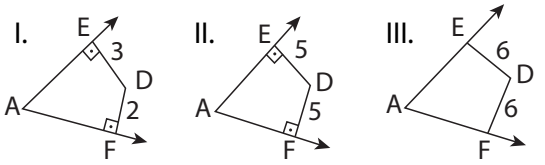
ABC dik açılı üçgeni



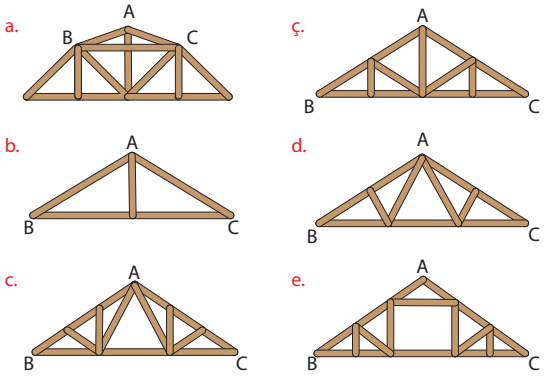
ABC geniş açılı üçgeni

Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen şekillerin hangisi ya da hangilerinde D noktasının kesinlikle A açısının açıortayı üzerinde olduğunu belirleyiniz.



2. Aşağıdaki şekillerde altı farklı kafes çatı tasarımı verilmiştir.



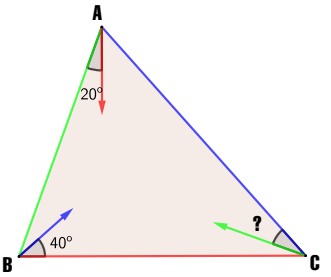
Her tasarım A köşesinden geçen dikey doğrultuya göre simetrik yapıda ve düz parçalardan oluşturulmuştur.

Buna göre çatı tasarımlarından hangilerinde

a) BAC açısının açıortayının bulunduğunu belirleyiniz .

b) BC kenarının orta dikmesinin bulunduğunu tespit ediniz.

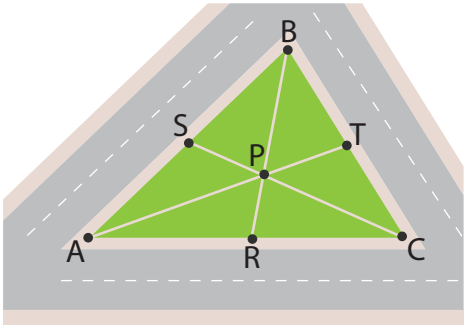
3. Atakan, Buğra ve Cihan; kırmızı, mavi ve yeşil boyalı yolların arasında bulunan üçgen biçimindeki bir parkta yürüyeceklerdir.



Parkın A köşesinde bulunan Atakan kırmızı yola, B köşesinde bulunan Buğra mavi yola, C köşesinde bulunan Cihan yeşil yola belirli hızlarla yürüyerek en kısa sürede ulaşmak istemektedir. Atakan yeşil yol ile 20°lik, Buğra kırmızı yol ile 40°lik açı yapan doğrultularda yürümektedir.

Buna göre Cihan'ın yürüdüğü doğrultunun mavi yol ile yaptığı açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

4. ABC üçgeni biçimindeki bir parkın köşelerinden geçen ve kenarlarının orta noktalarına kadar uzanan AT, BR ve CS doğrusal yürüyüş yolları parkın içindeki bir P noktasında kesişiyor. Parka A noktasından girip P noktasından dönerek B noktasından çıkan Ali 22 metre, B noktasından girip P noktasından dönerek C noktasından çıkan Banu 20 metre, C noktasından girip P noktasından dönerek A noktasından çıkan Cem 18 metre yürüyor.



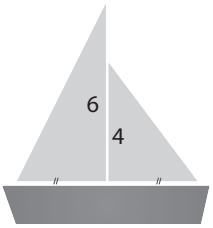
Buna göre parkın içindeki yürüyüş yollarının uzunlukları toplamının kaç metre olduğunu bulunuz.

1. Tema alıştırma ek soruları

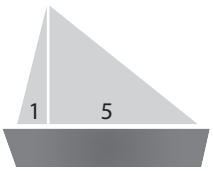
1.3. ÜÇGENDE ALAN

Konuya Başlarken

Yanda iki farklı yelkenli tasarım görseli verilmiştir. Görsel 1'deki yelkenli taban uzunlukları birbirine eşit, yükseklikleri 6 m ve 4 m olan dik üçgen şeklindeki iki yelkenden; Görsel 2'deki yelkenli yükseklikleri birbirine eşit, taban uzunlukları 1 ve 5 m olan dik üçgen şeklindeki iki yelkenden oluşmaktadır. Yelken bezinin maliyeti üretilen yelkenin alanı ile belirlenmektedir.



Görsel 1



Görsel 2

Buna göre

1. **Görsel 1 ve Görsel 2'deki yelkenlerden herhangi birinin maliyet fiyatı verildiğinde diğer yelkenin maliyetinin hesaplanması için hangi yöntem veya yöntemler kullanılabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
2. **Görsel 1'de yüksekliği 4 m olan yelkenin maliyetinin 18 000 TL olduğu bilindiğine göre yüksekliği 6 m olan yelkenin maliyetinin kaç TL olduğu nasıl hesaplanabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
3. **Görsel 2'de verilen iki yelkenin toplam maliyetinin 48 000 TL olduğu bilindiğine göre her bir yelkenin maliyetinin kaç TL olduğu nasıl hesaplanabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Bir üçgenin alanını belirleyen temel elemanlar kenar uzunlukları ve o kenara ait yüksekliklerdir. Günlük yaşamda karşılaşılan üçgen şeklindeki materyal, bahçe veya arazi gibi bölgelerin alanlarına dair çıkarımlar yapılırken kenar uzunlukları ve o kenara ait yükseklikler arasındaki ilişki dikkate alınır.

15. Uygulama

Yükseklikleri Eşit Olan Üçgenlerin Alanları ile Tabanları Arasındaki İlişki

Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak [AB] x eksenine paralel olmak üzere köşeleri ana ızgara çizgileri üzerinde olan bir ABC üçgeni oluşturunuz.

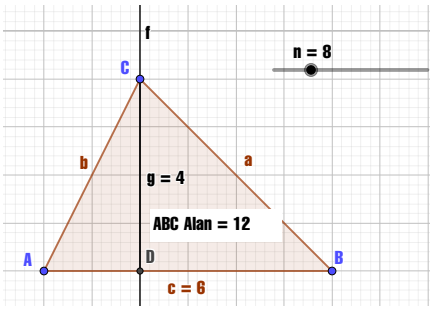
2. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak pozitif tam sayı değerleri alan n sürgüsü tanımlayınız. **Giriş** ekranında B noktasının sayı değeri ile gösterilen apsisini, sürgünün değerine (n) atayınız.

3. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak C köşesinden [AB] nı kesen bir dik doğru çiziniz. **Kesiştir** aracını kullanarak çizdiğiniz dik doğru ile [AB] nın kesim noktasını belirleyiniz ve bu noktayı D olarak isimlendiriniz. **Doğru Parçası** aracını kullanarak [CD] nı çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |AB| ile |CD| nu hesaplayınız.

5. adım: Yazılımın **Alan** aracını kullanarak oluşturduğunuz ABC üçgeninin alanını hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. n sürgüsünü hareket ettirerek farklı üçgenlerin alanlarını inceleyiniz. Oluşan farklı üçgenlerin alanlarını dikkate alarak herhangi bir üçgenin bir kenarı değiştirilip o kenara ait yüksekliği sabit tutulduğunda oluşan üçgenin alanındaki değişime ilişkin varsayımlarda bulununuz.

2. n sürgüsü hareket ettirilerek oluşturulan herhangi üç üçgenin yüksekliklerinin, taban uzunluklarının ve alanlarının değerlerini Tablo 1'deki uygun kısımlara yazınız. Tablo 1'deki değerleri kullanarak Tablo 2'deki oranları hesaplayınız ve sonuçları tablonun uygun kısımlarına yazınız.

Tablo 1

	Yükseklik (h)	Taban (a)	Alan
Üçgen 1	$h_1 =$	$a_1 =$	
Üçgen 2	$h_2 =$	$a_2 =$	
Üçgen 3	$h_3 =$	$a_3 =$	

Tablo 2

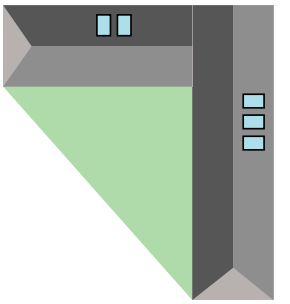
Taban Uzunlukları Oranı	Alanlar Oranı
$\frac{a_1}{a_2} =$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 1)}}{\text{Alan (Üçgen 2)}} =$
$\frac{a_2}{a_3} =$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 2)}}{\text{Alan (Üçgen 3)}} =$
$\frac{a_1}{a_3} =$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 1)}}{\text{Alan (Üçgen 3)}} =$

3. Doldurduğunuz tablodaki değerleri dikkate alarak herhangi bir üçgenin bir kenarı değiştirilip o kenara ait yüksekliği sabit tutulduğunda oluşan üçgenin alanındaki değişime ilişkin genellemenizi oluşturunuz.

4. Herhangi bir üçgenin bir kenarı değiştirilip o kenara ait yüksekliği sabit tutulduğunda oluşan üçgenin alanındaki değişime ilişkin oluşturduğunuz genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Herhangi bir üçgenin bir kenarı değiştirilip o kenara ait yüksekliği sabit tutulduğunda oluşan üçgenin alanındaki değişim ile ilgili elde ettiğiniz genellemeden hareketle üçgenin alanının hangi elemanlara göre değiştiğine ilişkin önermenizi ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.



Bir site yönetimi yanda görseli verilen birbirine dik konumlanmış iki blok arasında kalan üçgen biçimindeki bahçeyi oturma alanı, spor alanı ve yeşil alan olmak üzere üçgenlerden oluşacak şekilde üç bölgeye ayırmayı planlamaktadır.

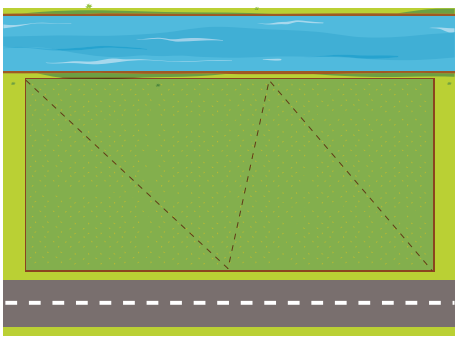
Plana göre oturma alanı spor alanının üç katı, yeşil alan oturma alanının iki katı büyüklükte olacaktır.

a) Bu bahçeyi yukarıdaki plana uygun olarak yükseklikleri eşit, taban uzunlukları farklı üç bölgeye ayrılacak şekilde tasarlayınız. Tasarımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla karşılaştırınız.

b) Bahçenin dik kenar uzunlukları 60 m ve 80 m olduğuna göre oluşturmuş olduğunuz üç bölgenin alanlarını hesaplayınız.

c) Bulduğunuz alan değerlerini bahçeyi farklı şekilde bölmüş sınıf arkadaşlarınız ile karşılaştırınız. Karşılaştırmadan elde ettiğiniz sonuçları ifade ettiğiniz önerme ile ilişkilendiriniz.

13. Örnek



Selim Bey, yanda görseli verilen dikdörtgen şeklindeki 60 dekarlık tarlasını dört çocuğuna görselde gösterildiği gibi sınırlar ile ayırarak paylaştırmıştır. Paylaşım yaparken tarlanın yola komşu olan kenarını iki eş parçaya, dereye komşu olan kenarını ise üçe iki oranında bölmüş ve gösterilen sınırlardan çitle tarlayı dört üçgensel bölgeye ayırmıştır.

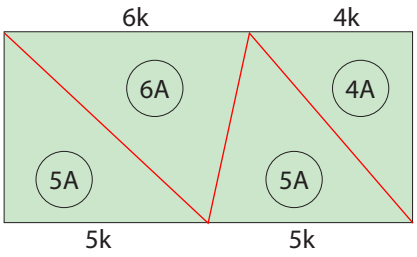
Buna göre

a) Her bir çocuğa kaç dekar tarla düştüğünü bulunuz.

b) Paylaşım çocukların yaşlarıyla orantılı olacak şekilde yapılmıştır. En küçük çocuk 24 yaşında olduğuna göre diğer çocukların yaşlarını hesaplayınız.

c) Her çocuğa eşit alanlı üçgen araziler düşecek şekilde tarlayı yeniden tasarlayınız. Bulduğunuz sonuçları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Çözüm



Verilen bilgilerle dikdörtgenin kenar uzunlukları orantılı olarak yazılır. Üçgen şeklindeki her bir tarlanın yükseklikleri birbirine eşit olduğu için alanları oranı tabanları oranına eşittir. Alanlar taban uzunluklarıyla orantılı bir şekilde yazılır.

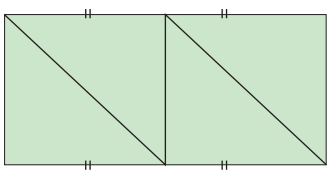
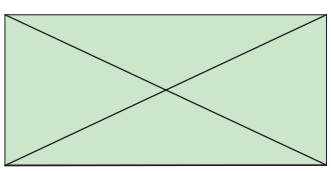
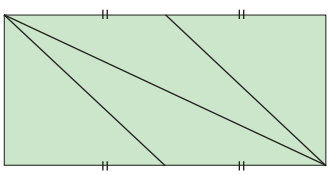
Buna göre

a) 5A + 6A + 5A + 4A = 60, 20A = 60, A = 3 bulunur.

Çocuklara 15, 18, 15, 12 dekar arazi düşmüştür.

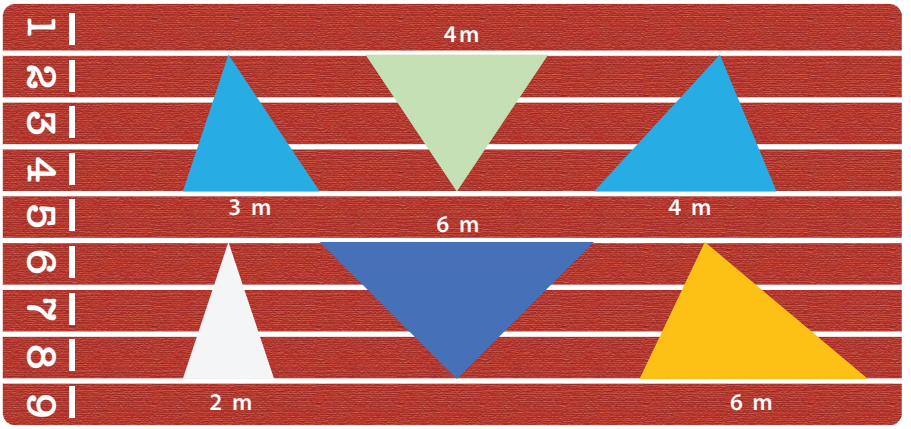
b) En küçük çocuk 24 yaşında ise ona düşen pay 12 dekardır. Selim Bey çocuklarının yaşları ile orantılı olarak paylaşım yaptığı için 12 dekar pay alan çocuğu 24 yaşında ise on beşer dekar pay alan çocukları 30 yaşında, 18 dekar pay alan çocuğu 36 yaşında olur.

c) Herkese eşit alanlı üçgen araziler düşecek şekilde yapılan birkaç paylaşım aşağıda gösterilmiştir.

12. Sıra Sizde

Aşağıda bir koşu yolu üzerine yerleştirilmiş üçgen şeklinde platform çeşitlerinden oluşan görsel verilmiştir.



Koşu yolundaki parkurları ayıranve birbirine paralel olan ardışık düz çizgiler eşit aralıklarla çizilmiştir. Platform - ların köşeleri çizgilerin üzerindedir ve üretim maliyetleri alanlarına göre belirlenmektedir.

Beyaz renkli platformun maliyeti 120 TL olduğuna göre tüm platformların toplam maliyetinin kaç TL olduğunu bulunuz.

16. Uygulama

Taban Uzunlukları Eşit Olan Üçgenlerin Alanları ile Yükseklikleri Arasındaki İlişki

Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak [AB] x eksenine paralel olmak üzere köşeleri ana ızgara çizgileri üzerinde olan bir ABC üçgeni oluşturunuz.

2. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak pozitif tam sayı değerleri alan n sürgüsü tanımlayınız. **Giriş** ekranında C noktasının sayı değeri ile gösterilen ordinatını sürgünün değerine (n) atayınız.

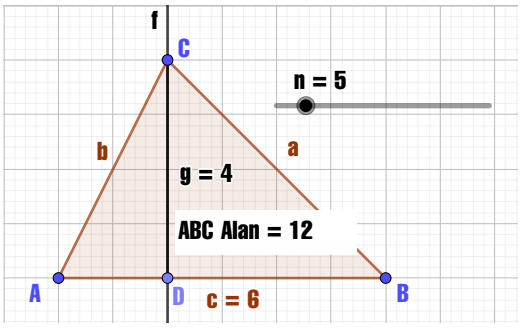
3. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak C köşesinden [AB] nı kesen bir dik doğru çiziniz.

Kesiştir aracını kullanarak çizdiğiniz dik doğru ile [AB] nın kesim noktasını belirleyiniz ve bu noktayı D olarak isimlendiriniz. **Doğru Parçası** aracını kullanarak [CD] nı çiziniz.

4. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |AB| ile |CD| nu hesaplayınız.

5. adım: Yazılımın **Alan** aracını kullanarak oluşturduğunuz ABC üçgeninin alanını hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. n sürgüsünü hareket ettirerek farklı üçgenlerin alanlarını inceleyiniz. Oluşan farklı üçgenlerin alanlarını dikkate alarak herhangi bir üçgenin yüksekliği değiştirilip o yüksekliğin bağlı olduğu kenar sabit tutulduğunda oluşan üçgenlerin alanlarındaki değişime ilişkin varsayımlarınızı yazınız.

2. n sürgüsü hareket ettirilerek oluşturulan herhangi üç üçgenin yükseklik, taban uzunluğu ve alan değerlerini Tablo 1'deki uygun kısımlara yazınız. Tablo 1'deki değerleri kullanarak Tablo 2'deki oranları hesaplayınız ve sonuçları tablonun uygun kısımlarına yazınız.

Tablo 1

	Yükseklik (h)	Taban Uzunluğu (a)	Alan
Üçgen 1	$h_1=$	$a_1=$	
Üçgen 2	$h_2=$	$a_2=$	
Üçgen 3	$h_3=$	$a_3=$	

Tablo 2

Yükseklikler Oranı	Alanlar Oranı
$\frac{h_1}{h_2}=$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 1)}}{\text{Alan (Üçgen 2)}}=$
$\frac{h_2}{h_3}=$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 2)}}{\text{Alan (Üçgen 3)}}=$
$\frac{h_1}{h_3}=$	$\frac{\text{Alan (Üçgen 1)}}{\text{Alan (Üçgen 3)}}=$

3. Doldurduğunuz tablodaki değerleri dikkate alarak herhangi bir üçgenin yüksekliği değiştirilip o yüksekliğin ait olduğu kenar sabit tutulduğunda oluşan üçgenlerin alanlarındaki değişime ilişkin genellemenizi oluşturunuz.

4. Herhangi bir üçgenin yüksekliği değiştirilip o yüksekliğin ait olduğu kenar sabit tutulduğunda oluşan üçgenlerin alanlarındaki değişime ilişkin genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemeden hareketle herhangi bir üçgenin yüksekliği değiştirilip o yüksekliğin bağlı olduğu kenar sabit tutulduğunda oluşan üçgenlerin alanlarındaki değişim ile ilgili önermenizi ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.

Yukarıda bir spor kulübünün yaptırdığı mavi ve kırmızı flamalardan oluşan görsel verilmiştir. Flamalar iki demir çubuk arasında bir ipe dizili ve aynı renkle gösterilen üçgenler birbirine eştir. Flamaların ipe asılı olduğu kenar uzunlukları birbirine eşittir. Kırmızı ve mavi flamaların eş kenarlarına ait yükseklikleri oranı $\frac{2}{3}$'tür. Alanlarına göre ücretlendirme yapılan flamalardan bir tane kırmızı flama için 120 TL ödenmiştir.

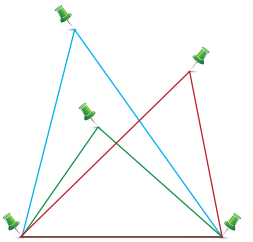
Buna göre

a) Bir tane mavi flama için kaç TL ödendiğini bulunuz.

b) Toplam 29 adet flama olduğu bilindiğine göre flamalar için toplam kaç TL ödendiğini bulunuz.

14. Örnek

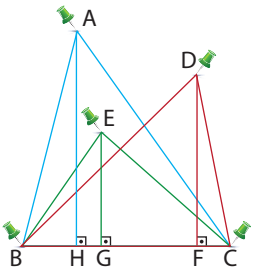
Bir öğrenci elindeki yeşil, kırmızı ve mavi lastikleri rastgele çakılmış raptiyelere takarak yanda gösterilen üçgenleri elde etmiştir. Her bir lastiğin oluşturduğu üçgenlerin ortak tabanına ait yükseklikleri hesapladığında kırmızı üçgenin yüksekliğinin yeşil üçgenin yüksekliğine oranı $\frac{3}{2}$, mavi üçgenin yüksekliğinin kırmızı üçgenin yüksekliğine oranı $\frac{5}{4}$'tür.



Buna göre mavi, kırmızı ve yeşil lastiklerin oluşturmuş olduğu üçgenlerin alanlarının hangi sayılarla orantılı olduğunu bulunuz.

Çözüm

Verilen görselde raptiyelere karşılık gelen noktalar harflendirildiğinde aşağıdaki şekil elde edilir.



ABC üçgeninin yüksekliği [AH],

BCE üçgeninin yüksekliği [EG],

BCD üçgeninin yüksekliği [DF] olmak üzere

$\frac{|DF|}{|EG|} = \frac{3}{2}$ ve $\frac{|AH|}{|DF|} = \frac{5}{4}$ orantıları elde edilir.

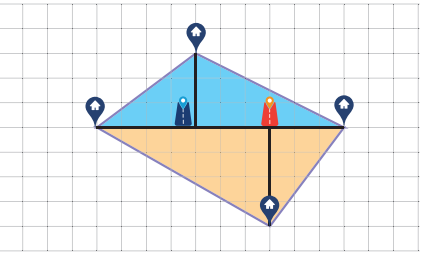
Buradan orantılar eşitlenirse $|DF| = 12k$, $|EG| = 8k$, $|AH| = 15k$ olur.

ABC, BCE ve BCD üçgenleri [BC] ortak tabanına sahiptir.

"Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanlarının oranı yüksekliklerinin oranına eşittir." önermesine göre ABC, BCE ve BCD üçgenlerinin alanlarının sırasıyla 15, 8 ve 12 sayılarıyla orantılı olduğu bulunur.

13. Sıra Sizde

Yanda bir şehrin eş karelere ayrılmış yerleşim planından bir kesit verilmiştir. Birbirini dik kesen doğrular şehrin caddelerini temsil etmektedir. Görselde bir şirketin satış mağazalarının konum noktaları ikonu ile gösterilmiştir.



Şirkete ait satış mağazalarının konum noktaları birleştirildiğinde bir dörtgen oluşmaktadır. ve konum noktaları ve ikonları ile gösterilen noktalarda servis araçları bulunmaktadır. ikonun bulunduğu noktadaki servis aracı mavi bölgedeki, ikonun bulunduğu servis aracı turuncu bölgedeki müşterilere servis hizmeti vermektedir. Servis hizmeti verilen dörtgen şeklindeki bölgenin toplam alanı 98 000 metrekaredir. Bölgede servis hizmeti alan toplam müşteri sayısı 7000'dir. Servis hizmetinden yararlanan müşteri sayısı servisin hizmet verdiği bölgenin alanına göre belirlenmektedir.

Buna göre

a) Mavi ve turuncu bölgelerin alanlarının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

b) Mavi ve turuncu bölgelerdeki servis kullanan müşteri sayılarını bulunuz.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

17. Uygulama

Paralel Doğrular Arasında Ortak Tabana Sahip Üçgenlerin Alanları Arasındaki İlişki

Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Doğru** aracını kullanarak x eksenine paralel bir AB doğrusu çiziniz. Ardından **Paralel Doğru** aracını kullanarak C noktasından geçen ve AB doğrusuna paralel olan farklı bir doğru çiziniz.

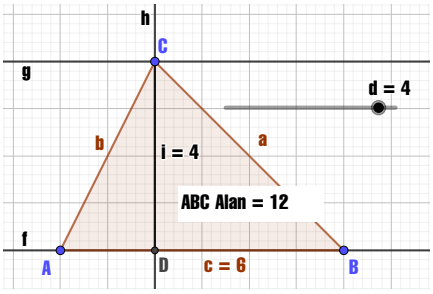
2. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak paralel doğrular üzerindeki A, B ve C noktalarını köşe kabul eden ABC üçgenini oluşturunuz.

3. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak sayısal değerler alabilen d sürgüsü tanımlayınız. **Giriş** ekranında C noktasının sayı değeri ile gösterilen apsisini sürgünün değerine (d) atayınız.

4. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak C köşesinden [AB] nı kesen bir dik doğru çiziniz. **Kesiştir** aracını kullanarak çizdiğiniz dik doğru ile [AB] nın kesim noktasını belirleyiniz ve bu noktayı D olarak isimlendiriniz. **Doğru Parçası** aracını kullanarak [CD] nı çiziniz.

5. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |AB| ile |CD| nu hesaplayınız. Yazılımın **Alan** aracını kullanarak oluşturduğunuz ABC üçgeninin alanını hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. d sürgüsünü hareket ettirerek farklı üçgenlerin alanlarını inceleyiniz. Oluşan farklı üçgenlerin alanlarını dikkate alarak paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin alanlarının değişimine ilişkin varsayımlarda bulununuz.

2. d sürgüsünü hareket ettirerek oluşturduğunuz herhangi iki üçgenin yüksekliklerinin, taban uzunluklarının ve alanlarının değerlerine göre aşağıdaki tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

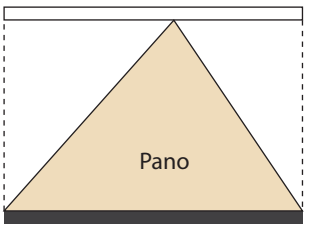
	Yükseklik	Taban Uzunluğu	Alan
Üçgen 1			
Üçgen 2			

3. Doldurduğunuz tablodaki değerleri dikkate alarak paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin alanlarının değişimine ilişkin genellemenizi oluşturunuz.

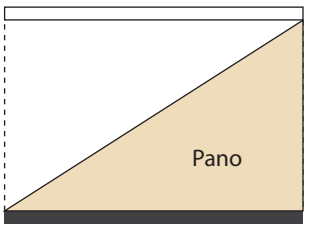
4. Paralel doğrular arasında ortak tabana sahip olan iki farklı üçgenin alanlarının değişimine ilişkin genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemeden hareketle paralel doğrular arasında ortak tabana sahip olan iki farklı üçgenin alanlarının değişimine ilişkin önermenizi yazarak ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.



Şekil 1



Şekil 2

Bir mağaza sahibi müşterilerin dikkatini çekmek için paralel iki demir çubuk arasına Şekil 1'de verilen üçgen şeklinde bir reklam panosu yaptırmak istiyor. Reklamcı daha çok dikkat çekeceğini düşündüğü için mağaza sahibine Şekil 2'de verilen üçgen şeklinde bir pano yaptırmasını öneriyor. Reklamcı ücreti panonun kapladığı alan ile orantılı olarak hesaplamaktadır.

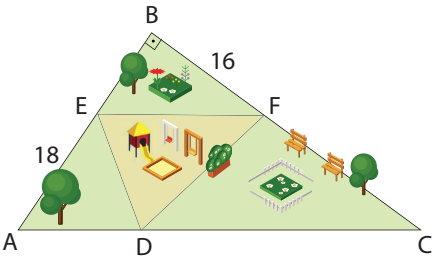
Buna göre reklam panosu Şekil 2'deki gibi hazırlandığında fiyat farkının oluşup oluşmayacağını sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. Gerekçesiyle cevabınızı yazınız.

15. Örnek

Dik üçgen şeklindeki bir parkın içine üçgen şeklinde çocuk oyun alanı yapılacaktır. Yandaki görselde parkın içine yapılması planlanan çocuk oyun alanının tasarımı verilmiştir.

$[AB] \perp [BC]$, $[EF] \,//\, [AC]$, $|AE|=18$ m, $|BF|=16$ m

olmak üzere çocuk oyun alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.



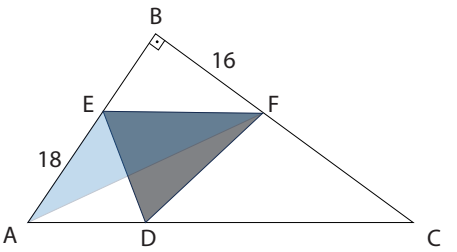
Çözüm

DEF üçgeni ile ortak taban ve eşit yüksekliğe sahip AEF üçgeni çizilir.

$A(\widehat{AEF}) = \frac{18 \cdot 16}{2} = 144\ m^2$ elde edilir.

"Ortak taban ve eşit yüksekliğe sahip olan üçgenlerin alanları eşittir." önermesine göre

$A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{AEF}) = 144\ m^2$ bulunur.



14. Sıra Sizde

Paralel doğrular arasında ortak tabana sahip üçgenlerin alanları arasındaki ilişki için günlük yaşam durumuna uygun olacak şekilde bir problem yazınız. Yazdığınız problemi ve problemin çözümünü sınıf arkadaşlarınız ile paylaşınız.

18. Uygulama

Paralel Doğrular Arasında Ortak Tabana Sahip Üçgenlerin Ortak Olmayan Bölgelerinin Alanları

Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Doğru** aracını kullanarak x eksenine paralel bir AB doğrusu oluşturunuz. Ardından **Paralel Doğru** aracını kullanarak C noktasından geçen ve AB doğrusuna paralel olan farklı bir doğru çiziniz.

2. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak C noktasından çizdiğiniz doğru üzerinde D ve E noktalarını işaretleyiniz.

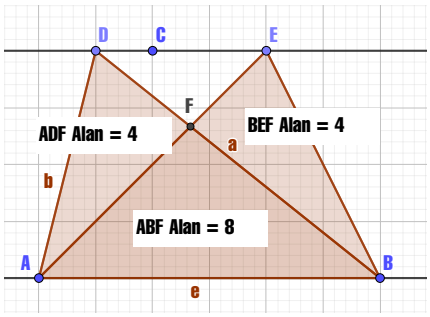
3. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak ABD üçgeni ile ABE üçgenini oluşturunuz.

4. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak [AE] ve [BD] nın kesişim noktasını F olarak belirleyiniz.

5. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak ADF, ABF ve BEF üçgenlerini belirleyiniz.

6. adım: Yazılımın **Alan** aracını kullanarak ADF, ABF ve BEF üçgenlerinin alanını hesaplayınız.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. Yazılımın **Taşı** aracını kullanarak D veya E noktasını bulunduğu doğru üzerinde farklı konumlara taşıyarak farklı üçgenler için ADF, ABF ve BEF üçgenlerinin alanlarını inceleyiniz. Oluşan farklı üçgenlerin alanlarını dikkate alarak paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin ortak olmayan bölgelerinin alanları arasındaki ilişkiye dair varsayımlarda bulununuz.

2. Yazılımın **Taşı** aracını kullanarak D veya E noktasını taşıyarak elde edilen üç farklı ABD ve iki farklı ABE üçgeni için ADF, ABF ve BEF üçgenlerinin alanlarını bularak aşağıdaki tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Taşıma Sonrası Oluşan Üçgen	Alan $(\widehat{ADF})$	Alan $(\widehat{ABF})$	Alan $(\widehat{BEF})$
Üçgen 1			
Üçgen 2			

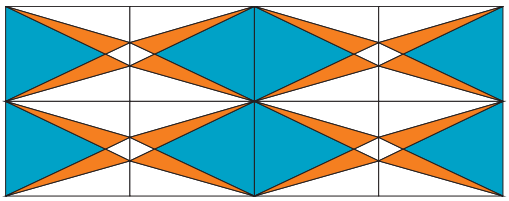
3. Doldurduğunuz tablodaki değerleri dikkate alarak paralel doğrular arasında ortak tabana sahip olan iki farklı üçgenin ortak olmayan bölgelerinin alanları arasındaki ilişkiye dair genellemenizi oluşturunuz.

4. Paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin ortak olmayan bölgelerinin alanları arasındaki ilişkiye dair genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemeden faydalanarak paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin ortak olmayan bölgelerinin alanları arasındaki ilişkiye dair önermenizi yazarak ifade ediniz.

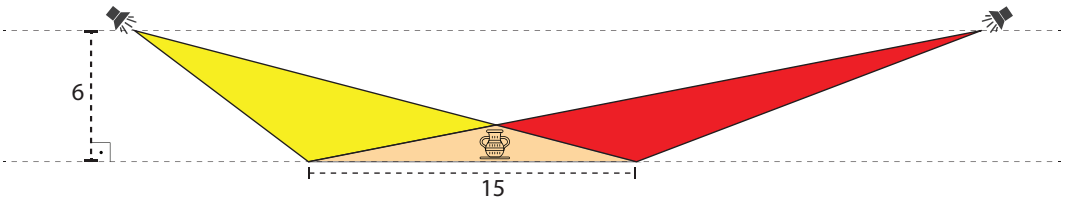
6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.

Kenar uzunlukları 18 ve 20 cm olan sekiz adet eş fayans kullanılarak bir duvara şekildeki gibi zemine paralel bir süsleme yapılıyor. Süslemede kullanılan turkuaz boyalı üçgensel bölgelerin alanları toplamı 1080 cm^2 dir.



Buna göre süslemede kullanılan turuncu boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç santimetrekare olduğunu bulunuz.

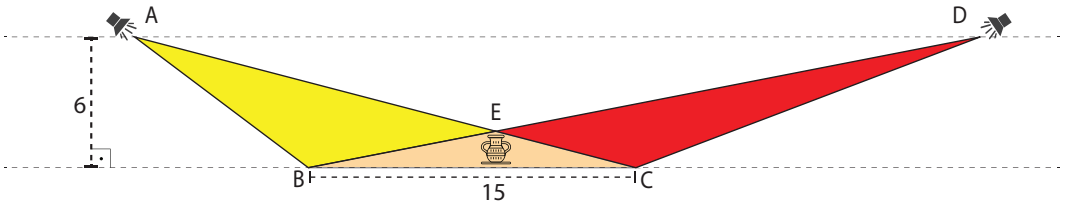
16. Örnek



Bir sergi salonundaki sanat eseri, sarı ve kırmızı ışık yayan iki projektör ile aydınlatılmaktadır. Üstteki görselde salondaki bu görüntüye ait bir kesit verilmiştir. Projektörler aynı konumu gösterecek şekilde ayarlanmış ve projektörlerin tabanda aydınlattıkları mesafe 15 metre olup yerden yükseklikleri 6 metredir.

Projektörlerin ortak aydınlattığı üçgensel turuncu bölgenin alanı 12 m^2 olduğuna göre sarı ve kırmızı üçgensel bölgelerin alanları toplamının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

Çözüm



Verilen görsele karşılık gelen noktalar harflendirildiğinde üstteki şekil elde edilir.

$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{BCD}) = \frac{15 \cdot 6}{2} = 45\ m^2$

$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABE}) + A(\widehat{BCE}) = 45\ m^2$

$A(\widehat{ABE}) + 12 = 45$

$A(\widehat{ABE}) = 33\ m^2$

$A(\widehat{BCD}) = A(\widehat{CDE}) + A(\widehat{BCE}) = 45\ m^2$

$A(\widehat{CDE}) + 12 = 45$

$A(\widehat{CDE}) = 33\ m^2$

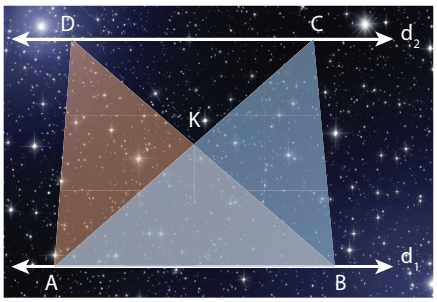
Buradan $A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{CDE}) = 33 + 33 = 66\ m^2$ elde edilir.

Sarı ve kırmızı bölgelerin alanları toplamı 66 m^2 bulunur.

15. Sıra Sizde

Evrende belirli bir bölgedeki yıldız yoğunluğunu belirlemek isteyen bir gök bilimci, geliştirmiş olduğu yöntemle yüksek çözünürlükle çekilmiş fotoğraflardan bölgenin yıldız yoğunluğunu yaklaşık olarak saptamaktadır.

Gök bilimci yanda verilen fotoğraf üzerine çizdiği iki paralel doğru üzerinde belirlediği A, B, C, D noktalarını birleştirerek ABC ve ABD üçgenleri oluşturuyor. [AC] ve [BD] nın kesim noktasını K olarak isimlendiriyor. BKC bölgesinde yaklaşık 80 000 yıldız olduğunu ve kilometrekareye 4 tane yıldız düştüğünü hesaplıyor. ADK bölgesinde yer alan yıldız sayısını yaklaşık 120 000 olarak buluyor.



Buna göre gök bilimcinin ADK bölgesi için hesapladığı kilometrekareye düşen yıldız sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

19. Uygulama

Benzer Üçgenlerin Alanları Oranı ile Benzerlik Oranı Arasındaki İlişki

Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz ve soruları cevaplayınız.

1. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak [BC] x eksenine paralel olmak üzere köşeleri ana ızgara çizgileri üzerinde olan bir ABC üçgeni oluşturunuz.

2. adım: Yazılımın **Sürgü** aracını kullanarak pozitif tam sayı değerleri alan k sürgüsü tanımlayınız.

3. adım: Yazılımın **Verilen Uzunlukta Doğru Parçası** aracını kullanarak |BC| nun k katı (k BC) olacak şekilde [DE] nı çiziniz.

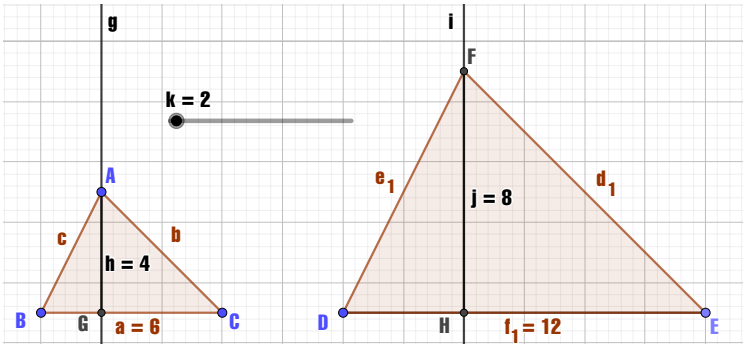
4. adım: Yazılımın **Çember: Merkez & Yarıçap** aracını kullanarak önce D merkezli |AB| nun k katı (k AB) yarıçaplı çemberi, sonra E merkezli |AC| nun k katı (k AC) yarıçaplı çemberi oluşturunuz.

5. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak çemberlerin kesim noktalarını belirleyiniz ve noktalardan birisini F olarak isimlendiriniz. **Çokgen** aracını kullanarak DEF üçgenini oluşturunuz.

6. adım: Yazılımın **Dik Doğru** aracını kullanarak A köşesinden [BC] nı kesen bir dik doğru çiziniz. **Kesiştir** aracını kullanarak çizdiğiniz dik doğru ile [BC] nın kesim noktasını belirleyiniz ve bu noktayı G olarak isimlendiriniz. **Doğru Parçası** aracını kullanarak [AG] nı çiziniz. Aynı işlemi DEF üçgeninde DE kenarına ait [FH] yüksekliğini oluşturmak için uygulayınız.

7. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |BC|, |DE|, |AG|, |FH| değerlerini; **Alan** aracını kullanarak ABC ve DEF üçgenlerinin alanlarını hesaplayınız.

Verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. k sürgüsünü hareket ettirerek oluşan üçgenlerdeki taban uzunluğu, yükseklik ve alandaki değişimi inceleyiniz. Benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiye dair varsayımlarda bulununuz.

2. k sürgüsünü hareket ettirdiğinizde oluşan herhangi üç duruma göre aşağıdaki tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

		Taban Uzunluğu	Yükseklik	Alan
k=..... için	ABC üçgeni			
	DEF üçgeni			
k=..... için	ABC üçgeni			
	DEF üçgeni			
k=..... için	ABC üçgeni			
	DEF üçgeni			

- ABC üçgeninin taban uzunluğu a_1, yüksekliği h_1; DEF üçgeninin taban uzunluğu a_2, yüksekliği h_2 olmak üzere aşağıdaki tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

k=..... için	$\frac{a_2}{a_1} =$	$\frac{h_2}{h_1} =$	$\frac{A(\widehat{DEF})}{A(\widehat{ABC})} =$
k=..... için	$\frac{a_2}{a_1} =$	$\frac{h_2}{h_1} =$	$\frac{A(\widehat{DEF})}{A(\widehat{ABC})} =$
k=..... için	$\frac{a_2}{a_1} =$	$\frac{h_2}{h_1} =$	$\frac{A(\widehat{DEF})}{A(\widehat{ABC})} =$

3. Doldurduğunuz tablodaki değerleri dikkate alarak benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiye dair genellemenizi oluşturunuz.

4. Benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiye dair genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemeden benzer üçgenlerin alanları oranı ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiye dair önermenizi yazarak ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.

Bir boya ustası üçgen şeklindeki bir zemini boyayacaktır. Zemin için gerekli boya miktarını hesaplayabilmek için $\frac{1}{20}$ oranında benzer bir üçgen zemin hazırlayıp bu zemini boyuyor. Boyacı hazırladığı benzer zemin için 300 g boya kullanıyor.

Buna göre

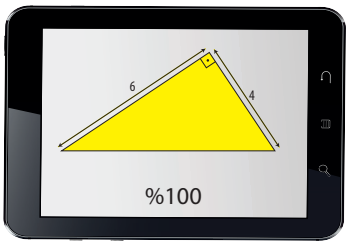
a) Boyacının yaptığı işlemin odanın boyanmasında harcayacağı boya miktarını hesaplamada nasıl bir etkisinin olacağını sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız.

b) Tüm zeminin boyanması için kaç kg boyaya ihtiyaç olduğunu bulunuz.

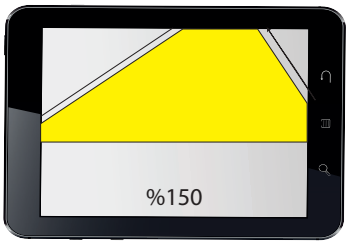
17. Örnek

Tabletinde logo tasarımı yapan bir tasarımcı Görsel 1'de verilen dik üçgen biçimindeki logo taslağını hazırlamıştır. Tabletteki şekillerin kenar uzunluklarını gösteren bir uygulama ile dik üçgenin dik kenar uzunlukları 4 ve 6 cm olarak hesaplanmıştır.

Loguyu yeterince büyük bulmayan tasarımcı Görsel 1'de oluşturduğu logoyu döndürmeden %150 oranında büyüterek Görsel 2'deki görüntüyü elde etmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Buna göre

a) Soruda verilen kenar uzunlukları ve büyütme oranı kullanılarak Görsel 2'de bir kısmı görünen üçgenin tüm alanının nasıl hesaplanabileceğini yazarak açıklayınız.

b) Farklı çözüm yöntemleri ile Görsel 2'de bir kısmı görünen üçgenin tüm alanını hesaplayınız ve bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

Çözüm

a) Görsel 2'de verilen görsel, Görsel 1'de verilen görselin %150 oranına çıkarılmış hâlidir. Başka bir deyişle Görsel 1 ile Görsel 2'deki üçgenler benzer üçgenlerdir.

Görsel 2'de oluşan üçgenin alanı "Benzer üçgenlerin kenar uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir." önermesi veya "Alanlar oranı benzerlik oranının karesine eşittir." önermeleri kullanılarak çözülebilir.

b) Görüntü %150 oranına çıkarılmış olduğu için benzerlik oranı $\frac{150}{100}$ olur.

1. Çözüm:

Uzunluğu 4 cm olan kenar $4 \cdot \frac{150}{100} = 6$ cm ve uzunluğu 6 cm olan kenar $6 \cdot \frac{150}{100} = 9$ cm olur.

Buradan Görsel 2'deki üçgenin alanı $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ cm^2 bulunur.

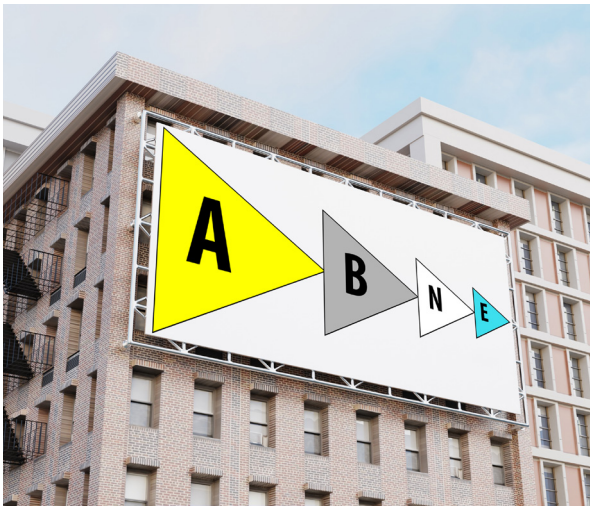
2. Çözüm:

Görsel 1'deki üçgenin alanı $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ cm^2 dir.

Benzerlik oranı $\frac{150}{100}$ ise benzerlik oranının karesi $\left(\frac{150}{100}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ olur.

Görsel 2'deki üçgenin alanı $12 \cdot \frac{9}{4} = 27$ cm^2 bulunur.

16. Sıra Sizde



Asit Baz Nötr Enstitü adında bir araştırma şirketinin logosu yandaki şekilde görülmektedir. Logodaki her bir üçgen bir önceki üçgenin kenar uzunlukları $\frac{1}{3}$ oranında kısaltılarak elde edilmiş ve üçgenlerin her birinin içine enstitünün adının baş harfleri yerleştirilmiştir.

Şirket binasının dış cephesine logoda bulunan üçgensel bölgeler boyandıktan sonra A, B, N ve E harfleri görseldeki gibi üzerine yapıştırılıyor. Tüm renkler için 3 m^2 alanın boyanmasında 1 litre boya kullanılıyor.

Buna göre

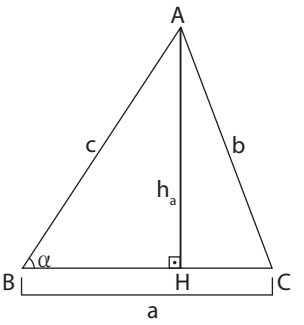
a) Sarı üçgen için 6 litre boya kullanıldığına göre gri üçgenin alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

b) Mavi üçgen için 1 litre boya kullanılmış ise beyaz üçgen için kaç litre boya kullanılacağını bulunuz.

20. Uygulama

Farklı Bir Alan Bağıntısı Oluşturma

Yanda BC kenarına ait yüksekliği çizilmiş bir ABC üçgeni verilmiştir. Bu çizimden yararlanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.



1. Üçgenin herhangi bir yüksekliği sinüs yardımıyla ifade edildiğinde oluşabilecek alan bağıntısına ilişkin varsayımlarda bulununuz.

2. ABC üçgeninden yararlanarak aşağıdaki adımları uygulayınız.

1. adım: BC kenarına ait yüksekliği sinüs yardımıyla ifade ediniz.

2. adım: ABC üçgeninin alanını BC kenarı ve bu kenara ait yükseklik cinsinden ifade ediniz.

3. adım: 1 ve 2. adımları dikkate alarak ABC üçgeninin alanını sinüs yardımıyla ifade ediniz.

3. ABC üçgeninin alanını sinüs yardımıyla ifade etmenizden hareketle üçgenin herhangi bir yüksekliği sinüs yardımıyla ifade edildiğinde bir alan bağıntısı oluştuğuna dair genellemenizi oluşturunuz.

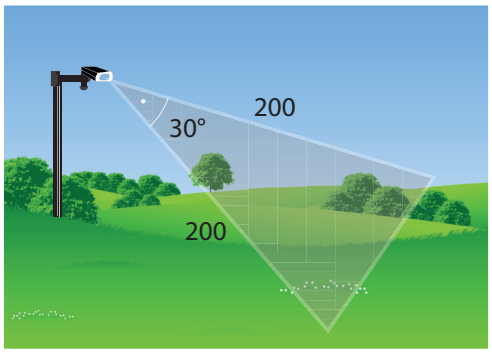
4. Üçgenin herhangi bir yüksekliği sinüs yardımıyla ifade edildiğinde bir alan bağıntısı oluştuğuna dair genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

5. Elde ettiğiniz genellemeden yola çıkarak üçgenin herhangi bir yüksekliğinin sinüs yardımıyla ifade edilmesiyle bir alan bağıntısı oluştuğuna dair önermenizi ifade ediniz.

6. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıdaki problemi çözünüz.

Bir mühendis yeni üretmiş olduğu termal kameranın taradığı üçgensel bölge şeklindeki görüş alanını hesaplayabilmek için araştırma yapmaktadır. Yandaki görselde kameranın görüş alanını gösteren üçgensel bölge verilmiştir. Mühendis, lazer mesafe ölçerle kameranın taradığı üçgenin iki kenarının uzunluğunu iki yüzer metre ve açıölçer ile bu iki kenar arasında kalan açının ölçüsünü 30° olarak hesaplıyor.

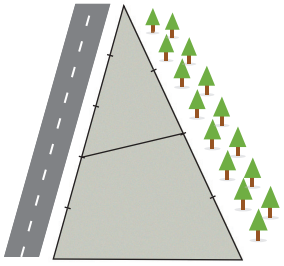
Buna göre termal kameranın taradığı üçgensel bölgenin kesit alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.



18. Örnek

Bir çiftçi 50 dekarlık üçgen şeklindeki arazisinin yola komşu olan kenarını 5 eş parçaya, ormana komşu olan kenarını 4 eş parçaya ayırmıştır. Sonra araziyi görselde görünen noktalardan doğrusal bir çitle ikiye bölmüştür. Metrekare başına eşit miktarda ekim yapan bu çiftçi, böldüğü arazilerden birine buğday diğerine arpa ekmiştir. Çiftçinin ektiği buğday miktarının arpa miktarından fazla olduğu bilinmektedir.

Buna göre buğday ekili arazinin alanının arpa ekili arazinin alanından kaç dekar fazla olduğunu bulunuz.

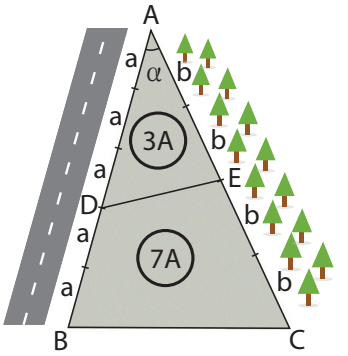


Çözüm

Verilen görsele karşılık gelen eş parçalar harflendirildiğinde yandaki şekil elde edilir. Harflendirilen kenar uzunluklarından ve ortak açıdan faydalanılarak

$A(\widehat{ADE}) = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2b \cdot \sin\alpha$ ve $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 4b \cdot \sin\alpha$

Buradan $\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{3}{10}$ bulunur.

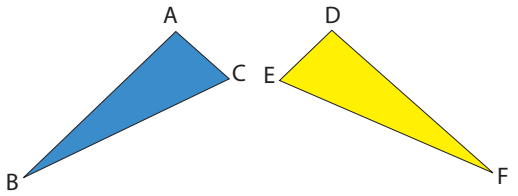


Demek oluyor ki $A(\widehat{ADE}) = 3A$ ise $A(BCED) = 10A - 3A = 7A$ dır.

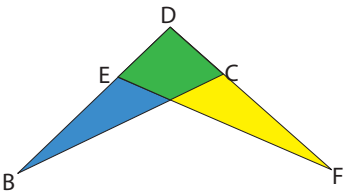
Buğday ektiği arazi, arpa ektiği araziden daha fazla olduğu için BCED bölgesine buğday, ADE bölgesine arpa ekmiştir.

Arazinin tamamı 50 dekar olduğu için $A(\widehat{ABC}) = 10A = 50$'den $A = 5$ elde edilir.
Buğday ektiği arazi $7 \cdot 5 = 35$ dekar, arpa ektiği arazi $3 \cdot 5 = 15$ dekardır.
Buğday ekili arazinin alanı arpa ekili arazinin alanından $35 - 15 = 20$ dekar fazladır.

17. Sıra Sizde



Şekil 1



Şekil 2

Elif Şekil 1'de verilen üçgen şeklindeki mavi ve sarı iki cam parçasını güvenli bir şekilde [AB] ve [DF] kenarları boyunca çakıştırdığında A ve D noktalarının üst üste geldiğini ve üst üste gelen cam parçalarının yeşil renge dönüştüğünü görmüştür.

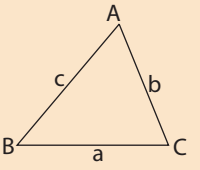
$|AB| = 8$ cm, $|AC| = 3$ cm, $|DF| = 10$ cm **olmak üzere Şekil 2'de verilen mavi ve sarı üçgenlerin alanları birbirine eşit olduğuna göre $|DE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Kontrol Noktası

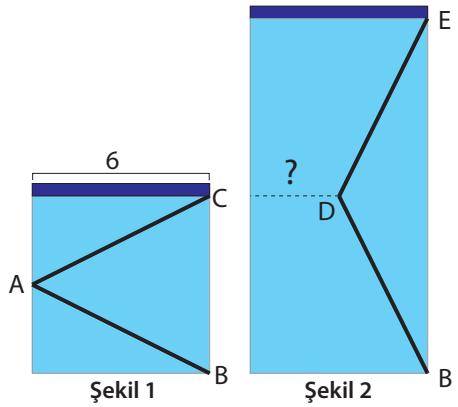
- Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranı, eşit yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir.
- Taban uzunlukları eşit üçgenlerin alanları oranı, eşit taban uzunluklarına ait yükseklikleri oranına eşittir.
- Paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin alanları birbirine eşittir.
- Paralel doğrular arasında ortak tabana sahip iki farklı üçgenin ortak olmayan bölgelerinin alanları birbirine eşittir.
- Benzer üçgenlerin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.
- Bir üçgenin iki kenarının uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açının ölçüsünün bilindiği durumda üçgenin alanı aşağıdaki bağıntı ile bulunabilir:

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A}$$



Alıştırmalar

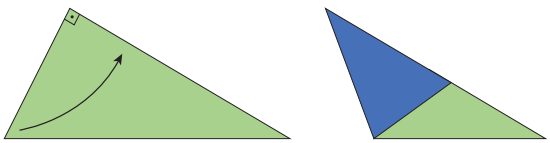
1. Aşağıda verilen dikdörtgen şeklindeki tente, doğrusal iki eş parçadan oluşan metal mekanizmanın hareketi ile açılıp kapanmaktadır.



Eni 6 metre olan tente, Şekil 1'den Şekil 2'deki konuma getirildiğinde tentenin oluşturduğu mavi dikdörtgenin alanı Şekil 2'deki konumunda Şekil 1'deki konumuna göre iki katına çıkmıştır.

Her iki konumda da metal mekanizmaların oluşturduğu ABC ve DBE üçgenlerinin alanları birbirine eşit olduğuna göre Şekil 2'de D noktasının tentenin sol kenarına olan en kısa uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.

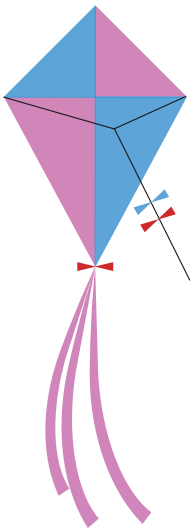
2. Aşağıda ön yüzü yeşil, arka yüzü mavi renkte dik üçgen şeklindeki bir karton Şekil 1'de gösterildiği gibi bir köşesi diğer kenar üzerine gelecek şekilde katlanarak Şekil 2'deki görsel elde ediliyor.


Şekil 1

Şekil 2

Şekil 1'de verilen üçgenin dik kenar uzunlukları 12 ve 15 cm olduğuna göre Şekil 2'de yeşil üçgenin görünen kısmının alanının kaç santimetrekare olduğunu bulunuz.

3. Bir fabrikada yanda görseli verilen, ortak tabana sahip iki ikizkenar üçgenden oluşan dörtgen şeklinde uçurtma üretimi yapılmaktadır. Uçurtma yapılırken iskelet için iki farklı uzunlukta çıta kullanılmakta, çıtaların etrafı gergin şekildeki bir iple bağlanarak uçurtmanın iskeleti oluşturulmaktadır.

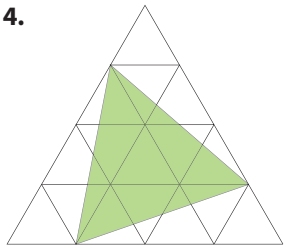


Uçurtma iskeleti, üstteki ikizkenar üçgenin alanı alttaki ikizkenar üçgenin alanının $\frac{2}{5}$'i olacak şekilde tasarlanmaktadır.

Bir uçurtmanın üretiminde kullanılan yatay çıta 80 cm, dikey çıta 105 cm olduğuna göre çıtaların etrafını sarmak için kullanılan ipin uzunluğunun en az kaç santimetre olduğunu bulunuz.

(Çıta kalınlıklarını ve çıtaların sarımında kullanılan ipi göz ardı ediniz.)

4.



Yanda görseli verilen birbirine eş eşkenar üçgenlerden oluşan zeminin bir kısmı yeşil halı ile kaplanmıştır.

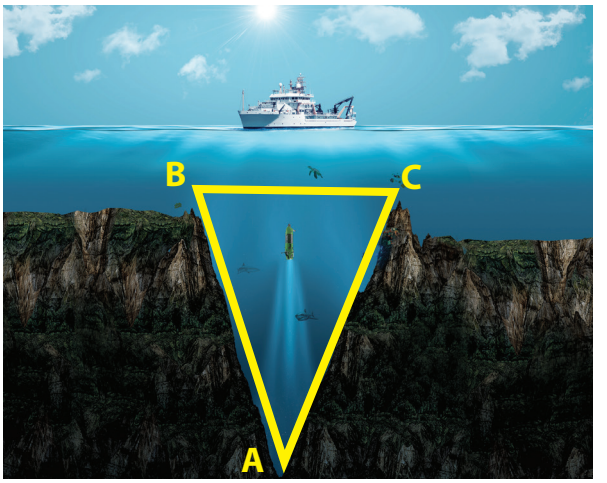
Tüm zeminin alanı 16 m^2 olduğuna göre yeşil halının alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

1. Tema alıştırma ek soruları

1.4. SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMLERİ

Konuya Başlarken

1. Okyanus dibi araştırmaları yapan bir grup bilim insanı, bir çukurun şeklini ortaya çıkarmak için yüzey tarayıcılarıyla donatılmış bir denizaltı kullanarak derin bir dalış gerçekleştiriyor. Denizaltıdan elde edilen veriler, okyanus yüzeyindeki gemide bulunan bir bilgisayara aktarılıyor ve burada özel bir program yardımıyla çukurun gerçek boyutlardaki şekli hakkında bilgi elde ediliyor. Bu bilgiler ışığında çukurun en dip noktası ile başlangıcındaki iki uç birleştirildiğinde yandaki görselde verildiği gibi bir ABC üçgeninin oluştuğu görülüyor.



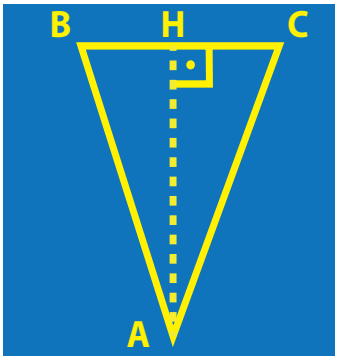
Buna göre

a) B ve C açılarının ölçülerinin bilinmesi durumunda AB ve AC kenar uzunluklarının bulunabilmesi için hangi ek bilgilere ihtiyaç duyulur? Sınıf arkadaşlarınızla tartışarak belirleyiniz.

b) AB ve BC kenar uzunluklarının bilinmesi durumunda $\frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{C}}$ değerini bulma yöntemlerini sınıf arkadaşlarınızla tartışarak belirleyiniz.

c) AB kenar uzunluğunun ve $\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}}$ değerlerinin bilinmesi durumda AC kenar uzunluğu bulunmak istendiğinde uygulanacak adımları sınıf arkadaşlarınızla belirleyiniz.

2. Çukurun giriş kısmında belirlenen B ve C köşelerinden çizilerek oluşturulacak BC kenarının uzunluğu, denizaltının BC kenarına dik açı ile giriş yapıp doğrultusunu değiştirmeden A köşesine ulaştığı, denizaltının BC kenarına dik giriş yaptığı noktanın (H) C köşesine olan uzaklığı (|CH|) ve AC kenar uzunluğu bilinmektedir. Bu durum yan tarafta görselleştirilmiştir.



Buna göre

a) Çukurun bilinmeyen kenar uzunluğunun (|AB|) bulunabileceği yöntemi belirleyiniz.

b) Verilen bilgilere göre AB kenar uzunluğunun bulunmasındaki yönteme ulaşılmaya çalışılırken doğruluğundan emin olunan hangi ön bilgilerin kullanıldığını belirtiniz.

Sinüs Teoremi

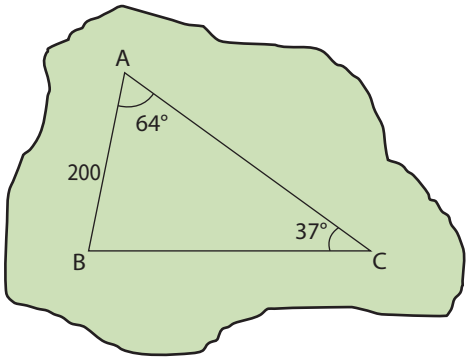
Bir cismin yüksekliğini, başka bir cisme mesafesini ya da üçgen şeklindeki arsanın sınırlarına çekilecek metal telin kaç metre olması gerektiğini belirlemek amacıyla çevre uzunluğunu hesaplamak gibi birçok günlük hayat problemi; belirli geometrik bilgilerin kullanılmasıyla çözülebilir. Örneğin bir üçgende iki açının ölçüleri ve bir kenar uzunluğu bilindiğinde diğer kenar uzunlukları ve üçgenin çevre uzunluğu trigonometrik yöntemlerle kolayca bulunabilir. Benzer şekilde bir açının karşısındaki kenar uzunluğunu veya yüksekliğini hesaplamak için açı ölçüleri ve diğer kenar uzunluklarıyla yapılan oranlar kullanılabilir. Bu tür yöntemler, karmaşık görünen soruların basit adımlarla çözülmesini sağlar.

21. Uygulama

Ek Çizimler Yardımıyla Uzunluk Bulma ve Sinüs Teoremi

Bir arsanın kenar uzunlukları veya arsa üzerinde ayrılacak bir parçanın kenar uzunlukları harita mühendisliğinde optik yöntem denen bir yöntem ile bulunabilir. Optik yöntemde teodolit adı verilen açı ölçme aleti kullanılarak belirlenen iki komşu sınır çizgileri arasındaki açı ölçüsü bulunabilir.

Yan tarafta şekli verilen bir arsanın içine ABC üçgeni şeklinde bir çocuk parkı inşa edilmek isteniyor. Açıların ve kenar uzunluklarının belirlenmesi maksadıyla optik yöntem ile çocuk parkının kenar uzunlukları ve açılarının ölçüleri belirleniyor. İnşaat alanının sınırlanması için A , B ve C noktalarından işaret şeritleri çekiliyor. A ile B noktaları arası çekilen şeridin uzunluğu 200 metre, $m(\widehat{A}) = 64°$, $m(\widehat{C}) = 37°$ olarak bulunuyor.



Buna göre B ve C noktaları arasına çekilecek şeridin uzunluğunun kaç metre olduğunun bulunması ile ilgili aşağıda verilen soruları cevaplayınız. ($\sin 64° \approx 0{,}9$ $\sin 37° \approx 0{,}6$ alınız.)

1. Sorunun çözümünün ek çizimler yardımıyla nasıl yapılabileceğine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşarak üzerinde tartışınız.

2. Edindiğiniz bilgilerden yola çıkarak B ve C köşeleri arasına çekilecek şeridin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

3. Herhangi bir ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olmak üzere üçgenin açı ölçüleri ve kenar uzunluklarından bazılarının verilmesi durumunda ek çizim yapmaya gerek kalmayacak şekilde diğer açı ölçülerinin değerleri veya kenar uzunlukları sinüs teoremi olarak adlandırılan $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ eşitliğinden yararlanılarak bulunabilir.

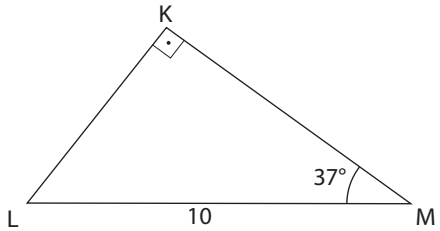
Buna göre çocuk parkı inşaatı için B ve C noktaları arasına çekilecek şeridin uzunluğunun kaç metre olması gerektiğini verilen eşitlik yardımı ile bulunuz.

22. Uygulama

Sinüs Teoreminin Üçgen Çeşitlerine Uygulanması

Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1.



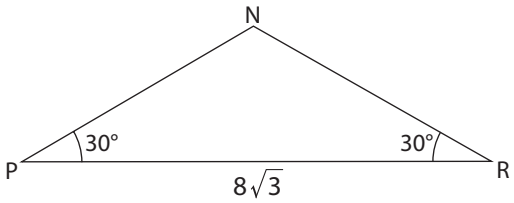
Yandaki KLM dik üçgeninde
$m(\widehat{MKL}) = 90°$
$m(\widehat{KML}) = 37°$
$|LM| = 10$ birim olarak verilmiştir.

Buna göre

a) Trigonometrik oranları kullanarak KL ve KM kenar uzunluklarını bulunuz. ($\sin 37° \approx 0{,}6$ $\sin 53° \approx 0{,}8$ alınız.)

b) Sinüs teoremini kullanarak KL ve KM kenar uzunluklarını bulunuz. ($\sin 37° \approx 0{,}6$ $\sin 53° \approx 0{,}8$ alınız.)

2.



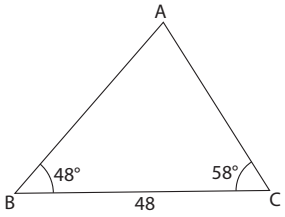
Yandaki PNR üçgeninde
$m(\widehat{NPR}) = m(\widehat{NRP}) = 30^\circ$
$|PR| = 8\sqrt{3}$ birim olarak verilmiştir.

Buna göre

a) Ek çizimler yaparak PN kenar uzunluğunu bulunuz.

b) Sinüs teoremini kullanarak PN kenar uzunluğunu bulunuz.

3.



Yandaki ABC üçgeninde
$m(\widehat{ABC}) = 48^\circ$
$m(\widehat{ACB}) = 58^\circ$
$|BC| = 48$ birim
olarak verilmiştir.

Buna göre

a) Verilenleri dikkate alarak ek çizimler yardımıyla AB ve AC kenar uzunluklarını bulunuz. ($\sin 48° \approx 0{,}74$ $\sin 58° \approx 0{,}84$ $\sin 74° \approx 0{,}96$ alınız.)

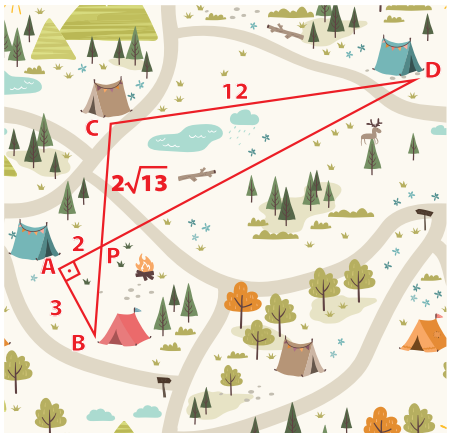
b) Sinüs teoremini kullanarak AB ve AC kenar uzunluklarını bulunuz. ($\sin 48° \approx 0{,}74$ $\sin 58° \approx 0{,}84$ $\sin 74° \approx 0{,}96$ alınız.)

4. İlk üç maddede yapılanlar dikkate alındığında sinüs teoreminin her üçgen için geçerli olup olmadığını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

19. Örnek

Bir grup arkadaş doğa yürüyüşü yapmak amacıyla kurulan kamp alanında A, B, C, D noktalarındaki çadırlara yerleşmiştir.

Yan tarafta görseli verilen kamp haritası üzerinde A, B, C ve D noktaları [DA]⊥[BA]; B, P, C doğrusal olacak şekilde birleştirildiğinde $|AB| = 3$ birim, $|AP| = 2$ birim, $|DC| = 12$ birim, $|CP| = 2\sqrt{13}$ birim olarak ölçülüyor.



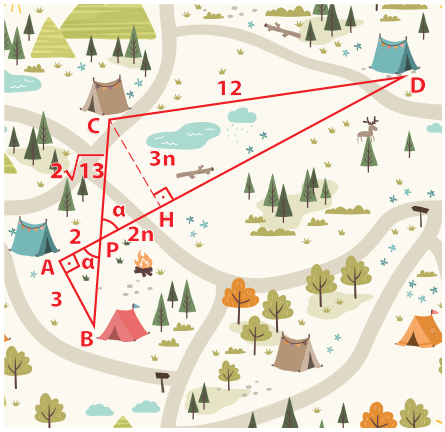
Buna göre

a) **DPC açısının sinüs değerini bulunuz.**

b) **CDP açısının ölçüsünü sinüs teoremi yardımıyla bulunuz.**

c) **CDP açısının ölçüsünü verilen kamp haritası üzerinde ek çizimler yardımıyla bulunuz.**

Çözüm



a) BAP dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$|BP|^2 = 2^2 + 3^2$

$|BP| = \sqrt{13}$ olur.

$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{DPC})$ olacağından (ters açılar)

$\sin(\widehat{APB}) = \sin(\widehat{DPC}) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ bulunur.

b) CDP üçgeninde sinüs teoremi uygulandığında

$$\frac{12}{\sin(\widehat{DPC})} = \frac{2\sqrt{13}}{\sin(\widehat{CDP})} \Rightarrow \frac{12}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sin(\widehat{CDP})}$$

$\sin(\widehat{CDP}) = \frac{1}{2}$ olur.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ olduğundan $m(\widehat{CDP}) = 30^\circ$ bulunur.

c) BAP dik üçgeninde $m(\widehat{APB}) = \alpha$ olsun

$\tan\alpha = \frac{3}{2}$ olur.

[CH]⊥[PD] olacak şekilde C köşesinden dikme indirildiğinde

$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{DPC})$ (ters açılar), $m(\widehat{DPC}) = \alpha$,

$\tan\alpha = \frac{3}{2}$ olduğundan $\tan\alpha = \frac{|CH|}{|PH|} = \frac{3 \cdot n}{2 \cdot n}$ olur.

PHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$(2\sqrt{13})^2 = (3n)^2 + (2n)^2$

olduğudan $n = 2$ bulunur.

$|CH| = 3 \cdot n = 3 \cdot 2 = 6$

CDH dik üçgeninde $\sin(\widehat{CDP}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ olur.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ olduğundan $m(\widehat{CDP}) = 30^\circ$ bulunur.

18. Sıra Sizde

Bir şehirde Begüm, Piraye ve Nevra adlı üç arkadaşın bulunduğu konumlar şehir haritası üzerinde sırasıyla B, P ve N noktaları ile gösterilmiştir. $m(\widehat{BPN}) = 65°$, $m(\widehat{BNP}) = 46°$ ve Piraye (P noktası) ile Nevra (N noktası) arasındaki uzaklık 744 metredir. ($\sin 46° \approx 0{,}72$ $\sin 65° \approx 0{,}91$ $\sin 69° \approx 0{,}93$ alınız.)

Buna göre

a) Piraye (P noktası) ile Begüm (B noktası) arasındaki yaklaşık uzaklığı bulunuz.

b) Nevra (N noktası) ile Begüm (B noktası) arasındaki yaklaşık uzaklığı bulunuz.

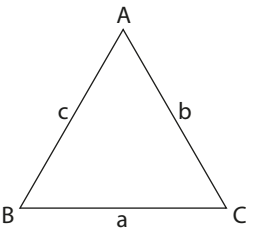
23. Uygulama

Sinüs Teoreminin İspatı

Herhangi bir ABC üçgeninde

$|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olmak üzere sinüs teoremi olarak adlandırılan

$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ eşitliğini doğrulamak amacıyla aşağıdaki soruları cevaplayınız.



1. Sinüs kavramı hakkındaki önceki öğrenmelerinizden yararlanarak yandaki üçgende ne gibi eşitlikler yazılabileceğini düşününüz, fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile paylaşarak tartışınız.

2. Aşağıda verilen sinüs teoremi ispatında sinüs trigonometrik oranını içeren üçgende alan formülünden yararlanarak boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

İspat

ABC üçgeninin alanı

$A(\widehat{ABC}) = \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \sin \widehat{A}$ (I)

$= \_\_\_ \cdot a \cdot c \cdot \_\_\_\_$ (II)

$= \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot b \cdot \sin \widehat{C}$ (III)

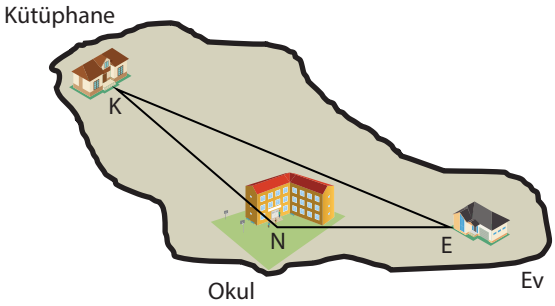
I ve II numaralı ifadelerin eşitliği kullanılarak ..... eşitliği bulunur.

I ve III numaralı ifadelerin eşitliği kullanılarak ..... eşitliği bulunur.

Sonuç olarak ..... eşitlikleri elde edilir.

20. Örnek

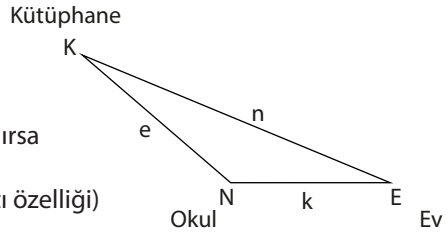
Bir şehir haritası üzerinde evini, okulunu ve şehir kütüphanesinin konumlarını işaretleyen Berk belirlediği noktaları birleştirdiğinde EKN üçgeni oluştuğunu görüyor. Harita ölçeğini dikkate alarak yaptığı hesapta evinden başlayıp tekrar evine gelmesi için EKN üçgeninin kenarları üzerinde hareket etmesi hâlinde bu uzunluğun 930 metre olduğunu ve $3 \cdot \sin\widehat{E} = 5 \cdot \sin\widehat{K} = 2 \cdot \sin\widehat{N}$ eşitliğinin sağlandığını görüyor.



Buna göre ev ile okul arasındaki mesafenin kaç metre olduğunu bulunuz.

Çözüm

$3 \cdot \sin\widehat{E} = 5 \cdot \sin\widehat{K} = 2 \cdot \sin\widehat{N}$ eşitliğinde



$\sin\widehat{E} = 10 \cdot a$, $\sin\widehat{K} = 6 \cdot a$, $\sin\widehat{N} = 15 \cdot a$ olsun.

$e + k + n = 930$, $e + n = 930 - k$ olur. Sinüs teoremi yazılırsa

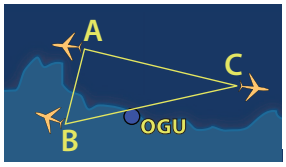
$$\frac{e}{\sin\widehat{E}} = \frac{k}{\sin\widehat{K}} = \frac{n}{\sin\widehat{N}} \Rightarrow \frac{k}{\sin\widehat{K}} = \frac{e+n}{\sin\widehat{E}+\sin\widehat{N}} \text{ (orantı özelliği)}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{6 \cdot a} = \frac{930-k}{10 \cdot a + 15 \cdot a}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{6 \cdot a} = \frac{930-k}{25 \cdot a} \Rightarrow 31 \cdot k = 6 \cdot 930$$

$\Rightarrow k = |EN| = 180$ metre bulunur.

19. Sıra Sizde



Ordu–Giresun Havalimanı üzerindeki hava yolu trafiğine ait anlık görüntü yandaki gibidir. Uçakların bulunduğu konumlar birleştirildiğinde ABC üçgeni şeklinin oluştuğu görülüyor.

Buna göre

a) ABC üçgeninin tüm iç açılarının sinüs değerlerinin ve herhangi iki uçağın arasındaki uzaklığın bilinmesi durumunda üçüncü uçağın diğer uçaklar ile arasındaki uzaklığının nasıl bulunabileceğini gösteriniz.

b) ABC üçgeninin iç açılarının sinüs değerleri arasında $\sin^2(\widehat{A}) = \sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C})$ eşitliğinin sağlandığı durumda ABC üçgeninin türünün ne olacağını bulunuz.

Kosinüs Teoremi

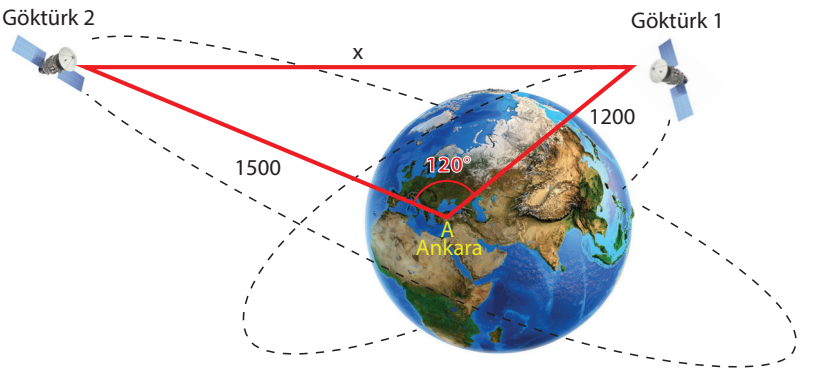
Üçgen şeklindeki bir cismin iki kenarının uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açı ölçüsü bilindiğinde üçüncü kenar uzunluğunu ölçmeye gerek kalmadan hesaplamak mümkündür. Örneğin doğa yürüyüşü yapmaya hazırlanan bir sporcu, harita üzerinde belirlediği üçgen şeklindeki bir parkurun tüm kenar uzunluklarını bildiğinde kenarlar arasındaki açıların ölçülerini dolayısıyla güzergâhın dönüş açılarının ölçülerini hesaplayabilir. Bu tür durumlar, kenarlar ve açıların arasındaki ilişkileri kullanan matematiksel hesaplamalarla çözülebilir. Bu yöntemler pek çok geometri problemini kolaylaştırır; özellikle mesafe ölçümü, yön bulma, alan hesaplama gibi konularda pratik çözümler için önemli rol oynar.

24. Uygulama

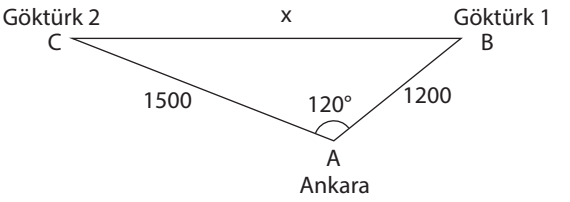
Ek Çizim Yardımıyla Uzunluk Bulma ve Kosinüs Teoremi

Göktürk 1 ve Göktürk 2 uyduları coğrafi kısıtlama olmaksızın Dünya üzerinde herhangi bir bölgeden askerî ve sivil amaçlı yüksek çözünürlüklü görüntü elde edilmesine imkân tanıyan, büyük oranda yerli imkânlar ile geliştirilip yörüngeye yerleştirilen iki yer gözlem uydusudur.

Sürekli hareket hâlinde olan uydulardan etkin şekilde yararlanmak için iki uydu arasındaki mesafenin 2300 – 2400 km arasında olması istenmektedir. Her iki uydu Ankara'da bulunan yer istasyonu ile kontrol altında tutulmaktadır. Anlık bir görüntü alındığında Ankara'daki yer istasyonunun Göktürk 1 uydusu ile arasındaki mesafe 1200 km, Göktürk 2 uydusu ile arasındaki mesafe 1500 km olarak ölçülmüştür. Oluşan ölçüm çizgileri arasındaki açının ölçüsü 120° olarak belirlenmiştir. Aşağıda bu duruma ait bir görsele yer verilmiştir.



Buna göre Göktürk 1 ve Göktürk 2 uyduları arasındaki mesafenin istenen aralıkta olup olmadığını aşağıda istenenleri gerçekleştirip soruları cevaplayarak bulunuz.



1. Verilen ABC üçgeninde [CA] nı A köşesinden uzatıp B köşesinden bu uzantıya dik indirerek [CK] ⊥ [BK] olacak şekilde bir AKB dik üçgeni oluşturunuz.

a) B köşesinden indirilen dikmenin hangi değerleri bulmaya yardımcı olabileceğini açıklayınız.

b) A veya C köşelerinden indirilecek dikmenin problemin çözümüne katkısının olup olmadığını inceleyiniz.

2. |BK| = h uzunluğunun kaç kilometre olduğunu bulunuz.

3. |AK| = n uzunluğunun kaç kilometre olduğunu bulunuz.

4. Oluşan BKC dik üçgeninde $|BC| = x$ uzunluğunun kaç kilometre olduğunu bulunuz.

5. Bulduğunuz sonuca göre Göktürk 1 ve Göktürk 2 uyduları arasındaki mesafenin istenen aralıkta olup olmadığını gösteriniz.

6. Herhangi bir ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olmak üzere bu üçgenin bir iç açısının ölçüsü ve iç açıyı oluşturan iki kenarının uzunluğu ile üçüncü kenarının uzunluğu kosinüs teoremi olarak adlandırılan

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$

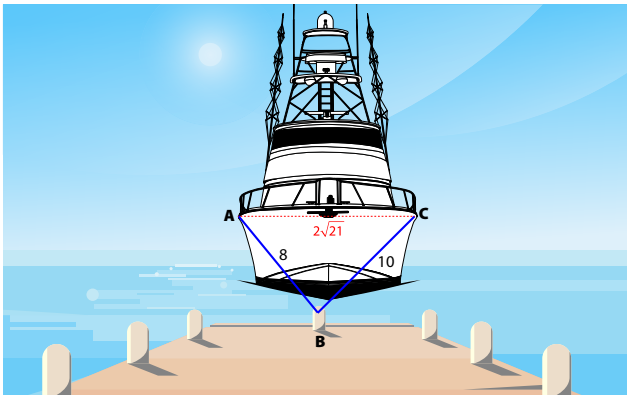
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$

eşitliklerinden yararlanılarak bulunabilir.

Buna göre

Göktürk 1 ve Göktürk 2 uyduları arasındaki mesafenin kaç kilometre olduğunu kosinüs teoremi kullanarak bulunuz.

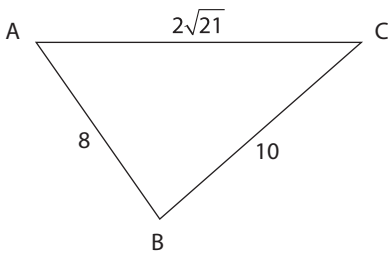
21. Örnek



Yanda görselde verilen genişliği $2\sqrt{21}$ metre olan bir tekne, genişliğinin uç noktaları olan A ve C noktalarından iskeledeki B noktasına halat ile bağlanıyor. Halatın gergin hâldeki uzunlukları 8 metre ve 10 metre olarak ölçülüyor.

Buna göre iskele ile tekne arasında bulunan gergin halatlar arasındaki açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Kosinüs teoremi uygulanırsa

$(2\sqrt{21})^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$

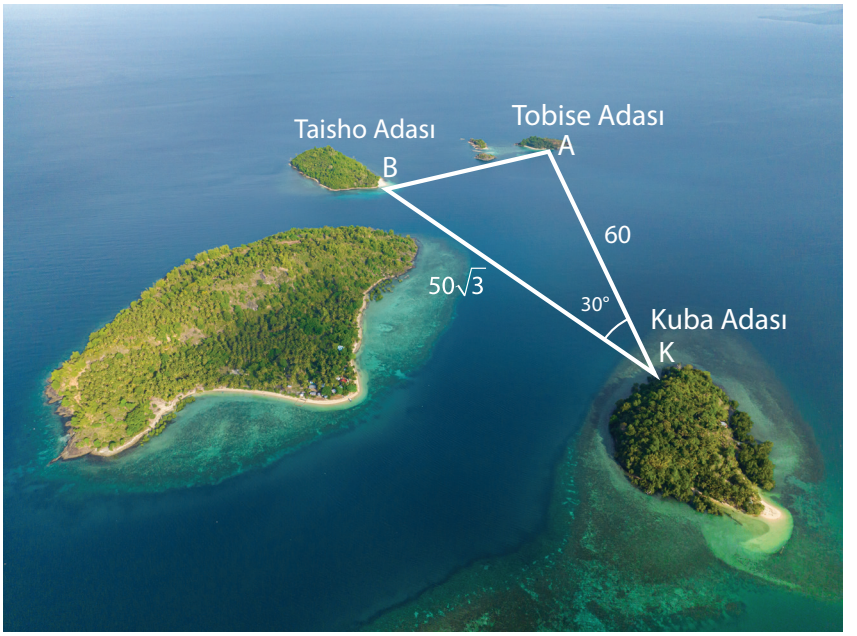
$84 = 64 + 100 - 160 \cdot \cos \widehat{B}$

$-80 = -160 \cdot \cos \widehat{B}$

$\cos \widehat{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ B açısının ölçüsü 60° olarak bulunur.

20. Sıra Sizde

Japonya'da bir grup adadan oluşan bölgedeki üç adanın görseli aşağıdaki gibidir.



Kuba (Kuba) Adası'nda K noktasında bulunan Kenan, elindeki lazer metre ile Tobise (Tobise) Adası'nda bir A noktası belirleyip ölçüm yaptığında bulunduğu nokta ile arasındaki uzaklığı 60 mil olarak ölçüyor. Lazer metreyi 30° kadar saatin tersi yönünde çevirdiğinde Taisho (Taişo) Adası üzerindeki bir B noktasının bulunduğu noktaya uzaklığını $50\sqrt{3}$ mil olarak ölçüyor. (Mil bir uzunluk birimidir, lazer metre uzaklığı istenen birimde ölçebilmektedir.)

Buna göre

a) **Verilenler yardımıyla A ile B noktaları arasındaki uzaklığın lazer metre kullanılmadan bulunması istendiğinde uygulanması gereken yöntemleri yazınız.**

b) **A ile B noktaları arasındaki uzaklığın kaç mil olduğunu kosinüs teoremi yardımıyla bulunuz.**

c) **A ile B noktaları arasındaki uzaklığın kaç mil olduğunu verilen görsel üzerinde ek çizimler yardımıyla bulunuz.**

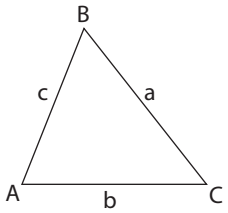
25. Uygulama

Teorem İspatı

Herhangi bir ABC üçgeninde

$|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olmak üzere kosinüs teoremi olarak adlandırılan

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$ eşitliği için aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.



1. Verilen eşitliğe ulaşabilmek için ne tür bir ek çizim yapılması gerektiğine dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile paylaşarak tartışınız.

2. Pisagor teoremi ve trigonometrik oranlardan yararlanarak bu üçgende ne gibi eşitlikler yazılabileceğini düşününüz, fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile paylaşıp ortak bir sonuca ulaşmaya çalışınız. Verdiğiniz ortak kararı yazınız.

3. Kosinüs teoreminin ispatına yönelik verilen adımları takip ederek soruları cevaplayıp ispatı tamamlayınız.

1. adım: $[BH] \perp [AC]$ olacak şekilde B köşesinden dikme indiriniz.

a) Üçgenin B köşesinden dikme indirilmesinin sebebini açıklayınız.

b) Dikme herhangi bir köşeden indirilebilir mi? Farklı köşelerden indirilen dikmeler teoremin ispatında ne tür bir değişikliğe yol açar? Açıklayınız.

2. adım: $|BH| = h$, $|AH| = x$ şeklinde adlandırarak $|HC|$ nu b ve x türünden yazınız.

3. adım: ABH dik üçgeninde h^2 yi c ve x türünden elde ediniz.

4. adım: BHC dik üçgeninde h^2 yi a, b, x türünden elde ediniz.

5. adım: 3 ve 4. adımda elde ettiğiniz eşitlikleri kullanarak a^2 yi b, c, x türünden bulunuz.

6. adım: AHB dik üçgeninde x i c ve $\cos\widehat{A}$ türünden bulunuz.

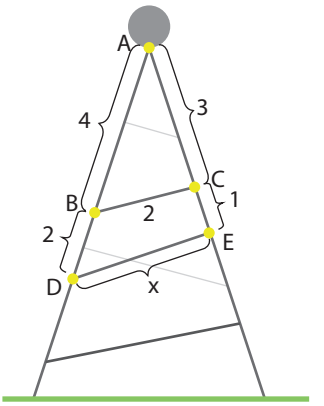
7. adım: 5 ve 6. adımda bulduklarınızı kullanarak a^2 yi b, c ve $\cos\widehat{A}$ türünden bulunuz.

22. Örnek

Yan tarafta bir baz istasyonu direğinin bazı bağlantı çubuklarının görseli verilmiştir.

Direkteki bağlantı noktaları arasındaki uzunluklar $|AB| = 4$ m, $|BD| = 2$ m, $|AC| = 3$ m, $|CE| = 1$ m, $|BC| = 2$ m ve $|DE| = x$ metredir.

Buna göre D ve E noktaları arasındaki bağlantı çubuğunun uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.



Çözüm

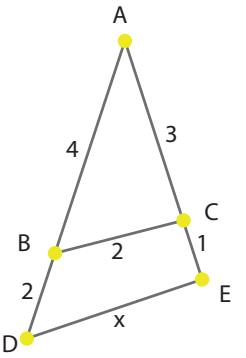
ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\widehat{A}$

$4 = 25 - 24 \cdot \cos\widehat{A}$

$24 \cdot \cos\widehat{A} = 21$

$\cos\widehat{A} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ bulunur.



ADE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos\widehat{A}$

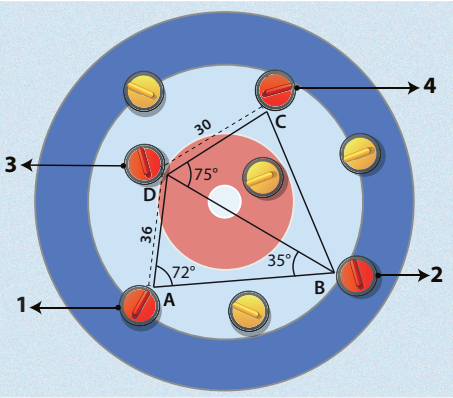
$x^2 = 52 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{7}{8}$

$x^2 = 52 - 42$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$ metre bulunur.

21. Sıra Sizde



Curling (körling), buz bir pist üzerinde oynanan takım oyunudur. Oyunda iki farklı renkte taş kullanan takımlar iç içe geçmiş halkalardan oluşan "ev" adı verilen hedefin merkezinde taşları durdurmayı amaçlar.

Bir körling antrenmanı sırasında yapılan atışlar sonrasındaki taşların "ev" içinde durdukları son noktalar görselde veriliyor. Takım antrenörü atış analizi yapabilmek amacıyla kırmızı taşlar üzerinde belirlediği noktalar arasındaki uzunlukları ölçerek kaydediyor. Taktik tahtasına görseldeki gibi taşların son konumlarını çizerek ölçtüğü bazı uzunlukları ve açı ölçülerini yazıyor.

Görsel üzerinde verilenleri dikkate alarak soruları cevaplayınız.
($\sin 35° \approx 0{,}57$ $\sin 72° \approx 0{,}95$ $\cos 75° \approx 0{,}2$ alınız.)

a) **2 ve 4 numaralı taşların belirlenen noktaları arasındaki uzaklığının yaklaşık kaç cm olduğunu bulunuz.**

b) **2 ve 4 numaralı taşların belirlenen noktaları arasındaki uzaklığı bulmak için uyguladığınız adımları, varsa kullandığınız özellik veya teoremi belirterek yazınız.**

c) **Sinüs ve kosinüs teoremlerinin hangi durumlarda kullanıldığı ile ilgili fikirlerinizi aşağıdaki alana yazınız.**

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

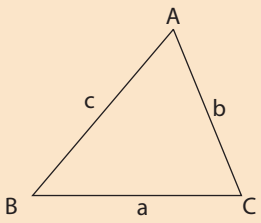
Herhangi bir ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olmak üzere

- Sinüs teoremi $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$
- Kosinüs teoremi

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$

  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$

  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$ dir.

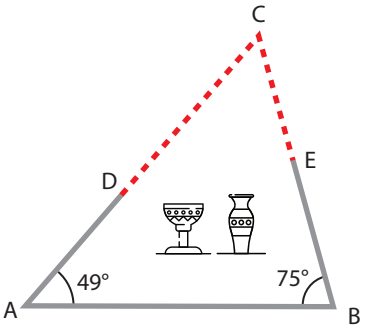


Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki görselde bir arkeoloji kazısında ortaya çıkarılan iki antik heykel kalıntısının üçgen şeklinde taş duvar ile çevrilmiş olduğu düşünülmektedir.



Taş duvarın bir kısmı kazı sırasında ortaya çıkarılmış, henüz kazı yapılmamış kısım kesik çizgilerle gösterilmiştir. Kazı sırasında ortaya çıkarılmış duvarların uzunlukları $|DA| = 10$ m, $|AB| = 24$ m, $|BE| = 12$ m olup duvarlar arasındaki açıların ölçüleri 49° ve 75°dir. (Hesaplamalarınızda duvar kalınlığını göz ardı ediniz. $\sin 49° \approx 0{,}7$ $\sin 56° \approx 0{,}8$ $\sin 75° \approx 0{,}9$ alınız.)

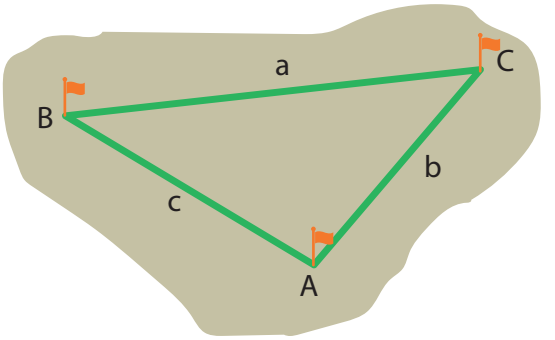
Buna göre

a) Kazı yapılarak ortaya çıkarılması beklenen duvarlardan DC kısmının uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

b) Kazı yapılarak ortaya çıkarılması beklenen duvarlardan CE kısmının uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

c) Her 1 metre duvar kazısı için 4 işçinin her birinin 8 saat çalışması gerekmekte ve her işçinin 1 saatlik çalışma ücreti 100 TL'dir. Buna göre kazının kalan kısmının kaç saatte biteceğini ve kazının kalan kısmı için işçilere ödenecek ücretin kaç TL olduğunu bulunuz.

2. Jalon: Arazi ölçümlerinde noktaların geçici olarak işaretlenmesi ve karşıdan görülmesini sağlayan metal veya tahta çubuklardır. Bitki örtüsünün rahat görüşü engellediği durumlarda jalonların üstüne flama asılır.



Bir harita mühendisi krokisini çıkarmak istediği arazide A, B, C noktalarına jalonları yerleştirerek noktalar arasındaki uzaklıkları ve iki doğru parçası arasındaki açıların ölçülerini tespit etmiştir. Ölçüm sonuçlarını bir kâğıda yazmış fakat kâğıdın bir kısmı yıpranarak bazı ölçüm sonuçları okunamaz hâle gelmiştir.

Buna göre

a) B ve C noktalarına yerleştirilen jalonlar arasındaki mesafenin bilinmemesi durumunda hangi açı ölçüleri ve kenar uzunlukları bilinirse $|BC| = a$ uzunluğu bulunabilir?

Kullanacağınız teoremi de belirterek cevabınızı aşağıdaki alana yazınız.

Açılar	Kenarlar	Teorem
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

b) B ve C noktalarına yerleştirilen jalonlar arasındaki mesafenin bilinmemesi durumunda alanı bilinen ABC üçgeninin hangi açı ölçüleri ve kenar uzunlukları bilinirse $|BC| = a$ uzunluğu bulunabilir? Kullanacağınız teoremi de belirterek cevabınızı aşağıdaki alana yazınız.

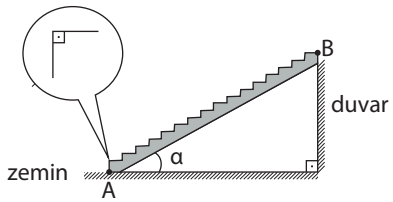
Açılar	Kenarlar	Teorem
.....	.....	.....
.....	.....	.....

1. Tema alıştırma ek soruları

1. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 14 soru verilmiştir.

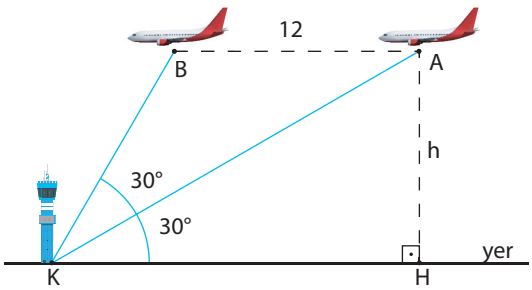
1. 16 özdeş basamağı olan taşınabilir bir merdiven, alt ucu düz bir zemindeki A noktasına; üst ucu zemine dik olan duvardaki B noktasına temas edecek şekilde aşağıdaki gibi konumlandırılmıştır:



A ile B noktaları arasındaki uzaklık 8 metre ve merdivenin zeminle yaptığı açının ölçüsü α olmak üzere $\tan\alpha = \frac{3}{4}$'tür.

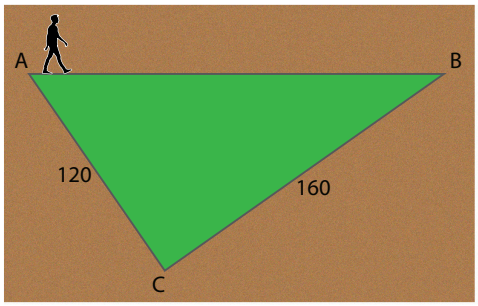
Buna göre merdivenin basamak genişliği ile basamak yüksekliğinin kaçar cm olduğunu hesaplayınız.

2. K noktasındaki kontrol kulesinde bulunan bir görevli, yerden belirli bir yükseklikte yere paralel uçan bir uçağın, A noktasından B noktasına kadar 12 kilometrelik hareketini radarla izliyor. Aşağıda bu durumu temsil eden bir görsel verilmiştir.



$m(\widehat{AKH}) = m(\widehat{AKB}) = 30^\circ$ **olduğuna göre uçağın yerden yüksekliği olan h değerinin kaç kilometre olduğunu bulunuz.**

3. Aşağıdaki şekilde |AC| = 120 m ve |BC| = 160 m olan ABC üçgeni biçiminde bir bahçe görseli verilmiştir. Bahçenin A köşesinde bulunan Eren, bahçenin AB kenarındaki yolu kullanarak B köşesine doğru sabit hızla yürümeye başlıyor. Eren, 3 dakika sonra bahçenin AC ve BC kenarlarına eşit uzaklıkta olan bir D noktasına geldiğinde 10 metre daha yürürse gideceği yolun yarısını yürümüş olacaktır.



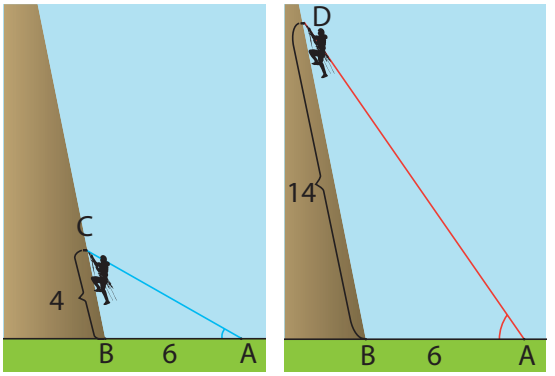
Buna göre

a) **AB yolunun uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.**

b) **Eren'in AB yolunu kaç dakikada yürüyeceğini hesaplayınız.**

c) **Aynı sabit hızla A köşesinden C köşesine doğru yürüdüğünde AB ve BC kenarlarına eşit uzaklıkta olan noktaya kaç saniyede ulaşacağını hesaplayınız.**

4. Hakan'ın gerekli güvenlik önlemlerini alarak bir dağa yaptığı iki farklı tırmanışın görselleri aşağıda verilmiştir.



Hakan; bu dağın düz yamacına tırmanırken kullandığı kırmızı ve mavi renkteki halatların bir ucunu dağın B noktasına, diğer ucunu 6 metre uzaklıktaki zeminde bulunan bir A noktasına sabitliyor. B noktasından tırmanmaya başlayan Hakan, 4 metre tırmandıktan sonra mavi halatın diğer ucunu C noktasına, 14 metre tırmandıktan sonra da kırmızı halatın diğer ucunu D noktasına sabitliyor.

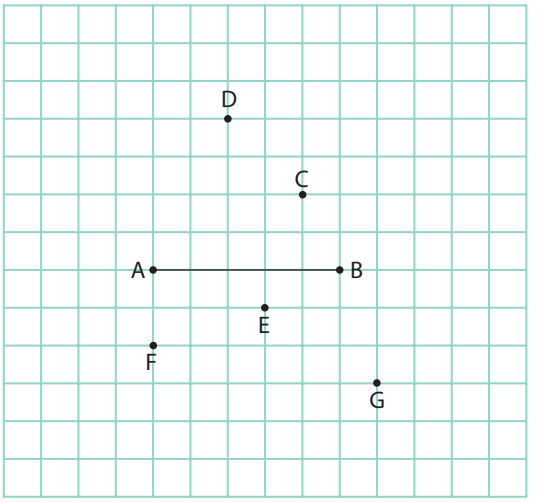
Kırmızı halatın zeminle yaptığı açının ölçüsü, mavi halatın zeminle yaptığı açının ölçüsünün iki katı olduğuna göre kırmızı halatın uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

5. Aşağıdaki şekilde bir yerleşim yerine ait taslak çizim verilmiştir.

Belediye parkın içerisine Kütüphane ve Müze bulvarlarından eşit uzaklıkta olacak şekilde bir sosyal tesis kurmayı planlamaktadır. Şehirde yaşayanlar kurulacak sosyal tesisisin müze ve kütüphaneye de eşit uzaklıkta olmasını istemektedir.

Buna göre taslak çizim üzerinde sosyal tesisin inşa edilmesi gereken noktayı belirleyip gerekçesini açıklayınız.

6. Aşağıdaki birimkareli kâğıtta A, B, C, D, E, F ve G noktaları işaretlenmiştir.



Kareli kâğıt üzerinde bir kenarı [AB] ve diğer köşesi C, D, E, F ve G noktalarından biri seçilerek oluşturulan üçgenler çizilecektir.

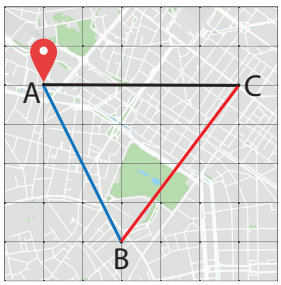
Buna göre

a) Hangi nokta ile birleştirilerek oluşturulan üçgenin alanının en büyük olacağını bulunuz.

b) Ortak kenarı [AB] olmak üzere diğer köşesi C, D, E, F ve G noktalarından biri olan farklı iki üçgen seçildiğinde hangi üçgenlerin alanlarının birbirine eşit olacağını bulunuz.

c) Ortak kenarı [AB] olmak üzere diğer köşesi C, D, E, F ve G noktalarından biri olan farklı iki üçgen seçildiğinde hangi üçgenlerin alanları oranının $\frac{1}{3}$ olacağını bulunuz.

7. Eş karesel bölgelere ayrılmış haritalı bir kâğıt üzerinde bir yerleşim yerindeki doğal gaz boru hattının geçtiği [BC] ana hattı ile bir binayı temsil eden A noktası aşağıda gösterilmiştir. Binaya doğal gaz bağlamak için ana hat ile bina arasına borular döşenecektir.

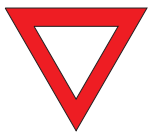


Buna göre

a) Boru maliyetinin en az olması için borunun döşeneceği hattın nasıl bir yol izlemesi gerektiğini açıklayınız ve bu hattı şekil üzerinde gösteriniz.

b) Borunun döşeneceği hattın uzunluğunu hesaplayabileceğiniz bir yol öneriniz. Şekil üzerinde çizdiğiniz hattın uzunluğunu cetvel ile ölçerek önerdiğiniz yol ile bulduğunuz sonucu karşılaştırınız.

8. Aşağıda kenarları birbirine paralel iki eşkenar üçgenden oluşan "YOL VER" trafik levhasının görseli verilmiştir.



Levhayı oluşturan üçgenlerin çevreleri oranı $\frac{2}{3}$'tür. Levha üzerindeki kırmızı bölgeyi boyamak için kullanılan boya, beyaz bölgeyi boyamak için kullanılan boya miktarından 150 ml fazladır.

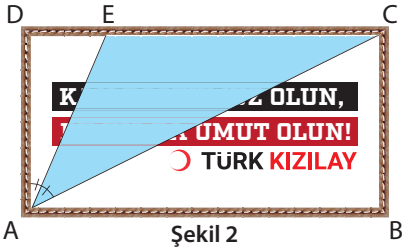
Buna göre tüm şekli boyamak için kullanılan beyaz ve kırmızı boya miktarı kaç mililitredir?

9. Aşağıda Türkiye Kızılay Derneğinin kan bağışlarını artırmak için yapılmış ve köşelerinde farklı renklerde ışık yayan ledlerle aydınlatılan dikdörtgen biçimindeki reklam panosunun görseli verilmiştir.

Şekil1

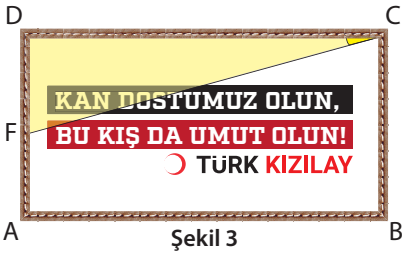
$|AD| = 6$ metre, $|CD| = 8$ metre

A köşesindeki mavi ışık yayan led ile C köşesindeki sarı ışık yayan ledin aydınlattığı alanlar Şekil 2 ve Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 2

$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAC})$

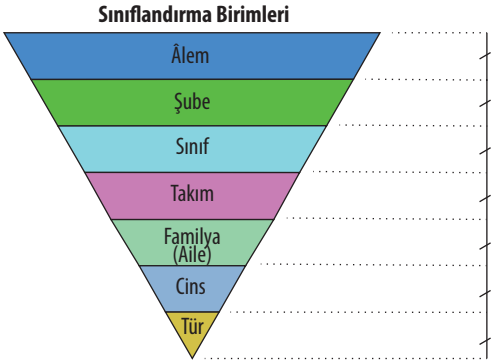


Şekil 3

$|AF| = |FD|$

Buna göre A ve C köşelerindeki ledlerin reklam panosunda aydınlattığı ortak bölgenin alanı kaç metrekaredir?

10. Birbirine paralel ve eşit aralıklar ile çizilmiş doğrulardan oluşan aşağıdaki piramit, canlıların sınıflandırılma basamaklarını ve bu basamaklarda yer alan bireylerin dağılımını ifade etmektedir.

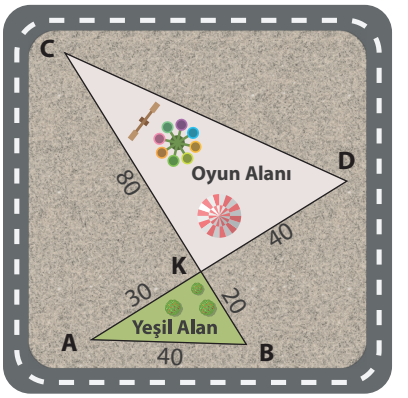


Piramidin her bölümü farklı renkler ile boyanarak oluşturulmuştur. Piramidin âlem, şube, sınıf bölümlerinin boyanması için 66 desilitre boya kullanılmıştır.

Buna göre piramitteki tür ve familya bölümleri için kaç desilitre boya kullanılmıştır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

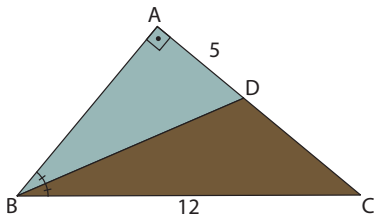
11. Aşağıda yeşil alan ve çocuk oyun alanı üçgensel bölge şeklinde tasarlanmış; A, K, D ve B, K, C noktaları doğrusal olan bir park görseli verilmiştir.



Bu parktaki oyun alanı ve yeşil alan çevresine çit yapmak isteyen belediye çalışanları $|AB| = 40$ m, $|BK| = 20$ m, $|AK| = 30$ m, $|KD| = 40$ m ve $|KC| = 80$ m olarak ölçüyor fakat $|CD|$ ölçülmeden acil bir iş için parktan ayrılmak zorunda kalıyorlar.

Buna göre çiti yapacak firmanın bu bilgileri kullanarak $|CD|$ nu nasıl hesaplayabileceğini açıklayınız ve $|CD|$ nun kaç metre olduğunu bulunuz.

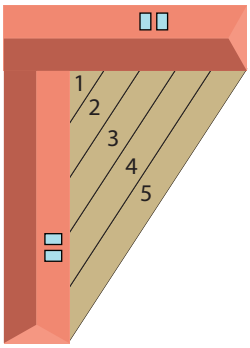
12. Aşağıda BAC dik üçgeni şeklindeki bir beton zemin görseli verilmiştir.



Zemin B köşesinden B açısının açıortayı olacak şekilde bir hat ile iki parçaya ayrılıyor. Kahverengi ile gösterilen BCD üçgeni biçimindeki parça zemini kauçuk ile kaplanıyor. Bir zeminin kauçuk kaplamasının maliyeti metrekare başına 2500 TL'dir.

|AD| = 5 metre, |BC| = 12 metre olduğuna göre kahverengi bölgenin kauçuk kaplama maliyetinin kaç TL olacağını bulunuz.

13. Mehmet Bey evinin verandasının üstünü aşağıdaki görselde planladığı şekilde birbirine eş ahşap blokları kesip birleştirerek kapatmak istemektedir.

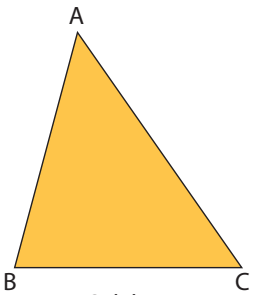


Ölçüp numaralandırdığı ahşap blokları marangozda kestiren Mehmet Bey, ödeme esnasında kesilen her bir parçanın alanına göre fiyatlandırma yapıldığını öğrenmiştir.

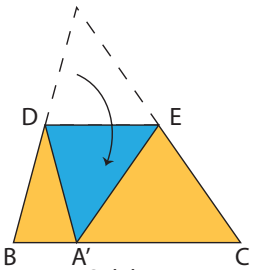
4 numaralı parça için 2800 TL ödeyen Mehmet Bey'in tüm parçalar için ödeyeceği toplam tutar aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10000 B) 12000 C) 14000 D) 16000 E) 18000

14. Şekil 1'de ön yüzü turuncu, arka yüzü mavi renkli ABC üçgeni biçimindeki bir kâğıt görseli verilmiştir.



Şekil 1



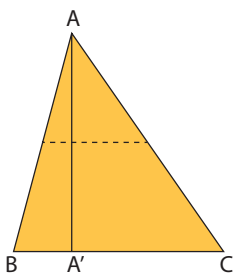
Şekil 2

Bu kâğıt, A köşesi BC kenarı üzerindeki A' noktasına gelecek biçimde Şekil 2'deki gibi katlanıyor.

Kâğıt tekrar açıldığında oluşan DE katlama izinin BC kenarına paralel olduğu görülüyor.

Buna göre

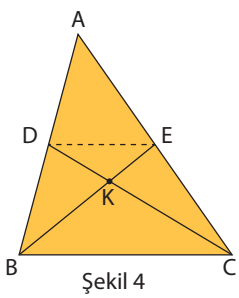
a) **BC kenarı üzerindeki A' noktası ile A noktası Şekil 3'teki gibi birleştirildiğinde elde edilen [AA'] nın üçgenin hangi yardımcı elemanı olduğunu belirleyiniz.**



Şekil 3

b) Katlama izinin uç noktaları olan D ve E noktaları ile B ve C noktaları, Şekil 4'teki gibi birleştirilerek [BE] ile [CD] çizilsin.

Bu iki doğru parçasının kesim noktası olan K noktasının ABC üçgeni için hangi özel noktaya karşılık geldiğini belirleyiniz.



Şekil 4

1. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

2. TEMA

İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ

2.1. İki Kategorik Değişkenin İlişkililiğini İçeren İstatistiksel Problemi Oluşturma, Veri Toplama, Analiz Etme ve Yorumlama

2.2. Başkaları Tarafından Oluşturulan İki Kategorik Değişkenli Verilerin İlişkililiğine Dayalı İstatistiksel Sonuç veya Yorumları Tartışma

Anahtar Kavramlar

- **iki kategorik değişken**
- **iki yönlü tablo**
- **ilişkililik**
- **koşullu göreli sıklıklar**
- **kümeli sütun grafikleri**
- **veri dağılımları**

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, açık uçlu soruları cevaplamanız, performans görevlerini yerine getirmeniz, proje ve araştırma ödevlerini yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

2. Tema
Karekodu

2. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- iki kategorik değişkenli veri ile çalışabilmeniz ve iki kategorik değişken arasındaki ilişkililiğe dayalı karar verebilmeniz,
- başkaları tarafından oluşturulan iki kategorik değişkenli verilerin ilişkililiğine dayalı istatistiksel sonuç veya yorumları tartışabilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

İstatistiksel araştırma süreci; verilerin toplanması, analizi ve yorumlanması adımlarını içeren sistematik bir yaklaşımdır. Bu süreç belirli bir araştırma sorusuna yanıt bulunması için planlanır ve bilimsel yöntemlere dayalı yürütülür. Amaç, elde edilen bulguların güvenilir ve geçerli sonuçlar üretmesini sağlamaktır.

Ön Değerlendirme

1. Önceki sınıflarda dâhil olduğunuz istatistiksel araştırma süreci deneyimlerinizden faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) İstatistiksel bir araştırmaya başlamadan önce yapılması gereken ilk adım nedir?

b) İstatistiksel bir araştırmada hangi yöntemler kullanılabilir?

c) İstatistiksel araştırmalarda örneklem seçimi yapmanın önemini belirtiniz.

ç) Veriler toplandıktan sonraki aşamayı yazınız.

d) İstatistiksel araştırma sonuçlarının yorumlanmasında dikkat edilecek hususlar nelerdir?

e) İstatistiksel araştırma sonuçlarının paylaşılmasında hangi yöntemlerin kullanılabileceğini belirtiniz.

2. Önceki öğrenmelerde istatistiksel araştırma sürecine ilişkin yaptığınız veya hâlihazırda yapılmış bir araştırma konusunu ve bu araştırmadan elde edilen sonuçları aşağıya kısaca yazınız.

3. İstatistiksel araştırma sonucu elde ettiğiniz veriler size araştırma konunuz hakkında bir fikir verdi mi? Elde ettiğiniz sonuçlar ile aynı araştırma konusunu çalışan arkadaşlarınızın elde ettiği sonuçlar arasında farklılıklar var mıydı? Varsa sebeplerini sınıfta tartışınız.

4. Bir okulda öğrencilerin en sevdiği etkinliklerle ilgili bir anket yapılmıştır. Ankette akademik etkinlikler, spor, gezi, oyun ve yarışma seçenekleri verilmiştir. Ankete katılan 120 öğrenciden 30'u spor, 45'i oyun, 15'i gezi, 20'si yarışma ve 10'u akademik etkinlikleri tercih etmiştir.

Verilen bilgilere göre

a) Bu ankete dayanarak öğrencilerin en sevdiği etkinlikleri gösteren bir sıklık tablosu oluşturunuz. Sıklık tablosuna bakarak en az ve en çok tercih edilen etkinlikleri belirtiniz.

b) Yukarıdaki verilere göre öğrencilerin en sevdiği etkinlikleri gösteren bir daire grafiği çiziniz. Grafiğinize bakarak hangi etkinliğin öğrenciler arasında en popüler olduğunu açıklayınız. Öğrencilerin en sevdikleri etkinlikler için sütun grafiği oluşturunuz. Sütun grafiğini değerlendirerek en büyük farkın hangi etkinlikler arasında olduğunu belirtiniz.

c) Kategorik verileri kullanarak öğrencilerin en sevdiği etkinlikleri nokta grafiğiyle gösteriniz. Nokta grafiğine bakarak spor ve gezi tercihlerinin yakın olup olmadığını değerlendiriniz.

ç) Oluşturduğunuz sıklık tablosu, daire grafiği, sütun grafiği, nokta grafiği gibi farklı görselleştirme araçları arasından bir yöntemi seçiniz ve bu yöntemin verinin hangi yönünü daha iyi anlattığını açıklayınız.

2.1. İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENİN İLİŞKİLİLİĞİNİ İÇEREN İSTATİSTİKSEL PROBLEMİ OLUŞTURMA, VERİ TOPLAMA, ANALİZ ETME VE YORUMLAMA

Konuya Başlarken

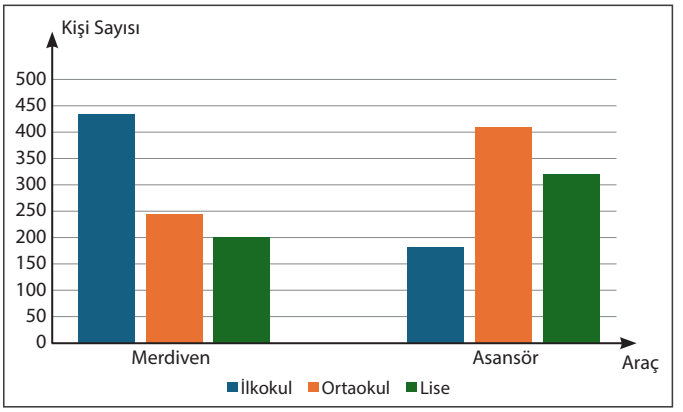
Kişilerin günlük hayatındaki farklı tercihleri ve alışkanlıkları arasında ya da dâhil oldukları gruplar ile belirli durumlar karşısındaki eğilimleri arasında bir ilişki olup olmadığını düşününüz. Örneğin "Kişilerin dinlediği müzik türü ile ilgilendiği spor branşları arasında bir ilişki var mıdır?" ya da "Öğrencilerin sınıf seviyeleri ile bağcıklı veya bağcıksız ayakkabı tercihleri arasında bir ilişki var mıdır?" sorularına nasıl cevap verilebileceğini düşününüz?

Bu tür sorulara yanıtlar ararken iki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi analiz etmek gerekir ancak bu analizleri yaparken hangi görselleştirme araçlarının kullanılacağı büyük önem taşır. Genellikle sayısal verileri görselleştirmek için kullanılan çizgi grafiği, nokta grafiği, kök-yaprak gösterimi, histogram ve kutu grafiği gibi araçlar kategorik değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek için de kullanılabilir mi? Sınıf arkadaşlarınızla bu konu üzerinde tartışınız.

Kategorik veri dağılımları ile yürütülecek istatistiksel araştırmalar, veri setindeki değişkenlerin özelliklerine göre sınıflandırıldığı durumları incelemeye odaklanır. Bu tür araştırmalar genellikle bir veya daha fazla kategorik değişkenin dağılımını anlamayı, bu değişkenler arasındaki ilişkiyi test etmeyi ve kategorik veriler arasındaki ilişkiye yönelik tahminler yapmayı amaçlar. Kategorik veri dağılımları ile yapılan araştırmalar özellikle anket çalışmaları, deneysel araştırmalar ve gözlemsel çalışmalar için kritik öneme sahiptir. Bu tür araştırmalarda kullanılan analizler verilerin yorumlanması ve anlamlı sonuçlar çıkarılması açısından güçlü araçlardır.

İki Kategorik Değişkenli Veriye Dayalı İstatistiksel Araştırmalarda Bağlam

Grafik 2.1'de verilen iki kategorik değişkenli veri dağılımına yönelik kümeli sütun grafiğinde okul seviyelerindeki öğrenci sayılarının merdiven ve asansör kategorilerine göre dağılımı gösterilmektedir.



Grafik 2.1: *İki kategorik değişkenli bir veri dağılımına yönelik sütun grafiği*

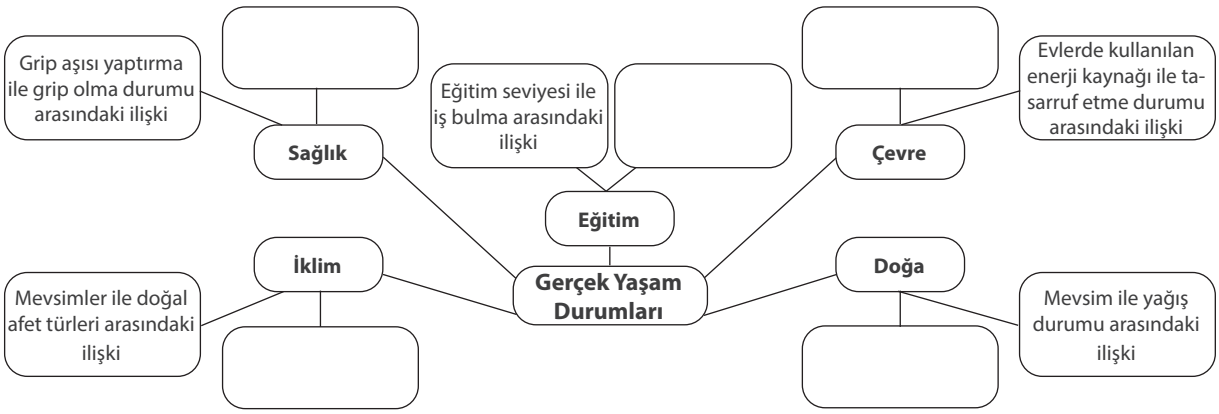
Bu verilerden anlamlı bir bilgi elde edilemez çünkü verilerin dağılımını belirleyen gerçek yaşam durumunun hangi bağlam çerçevesinde incelendiği belirtilmemiştir.

İstatistiksel araştırmalarda iki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi doğru şekilde analiz edebilmek için bağlamın açıkça belirlenmesi gerekmektedir. Bağlam; verilerin hangi koşullar altında toplandığını, hangi değişkenlerin incelendiğini ve araştırmanın amacını anlamamıza yardımcı olur. Bağlamı belirlemeden yapılan analizler, yanlış yorumlamalara ve yanıltıcı sonuçlara yol açabilir.

1. Uygulama

İstatistiksel Bağlam Oluşturma

Şema 2.1'de gerçek yaşam durumları ve bunlarla ilgili bağlamları içeren kutucuklar verilmiştir. Bu durumlardan yola çıkarak oluşturulan şemadaki iki kategorik değişkenli veriye dayalı istatistiksel bağlam örneklerini inceleyiniz.



Şema 2.1: *Gerçek Yaşam Durumları ve Bağlamları*

1. Sınıfta öğretmeniniz rehberliğinde gruplara ayrılarak verilen soruları cevaplayınız.

a) Şemada verilen bağlamların iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar olmasının nedeni ile ilgili olarak grup arkadaşlarınızla tartışınız.

b) Farklı istatistiksel bağlamları Şema 2.1'de boş bırakılan kutucuklara yazınız. Yazdığınız istatistiksel bağlamları sınıfta paylaşınız. Belirlediğiniz bu bağlamları veri toplamayı gerektirip gerektirmeme ölçütüne göre sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

2. Karekodlarda verilen akran değerlendirme formu ile grup arkadaşlarınızı, öz değerlendirme formu ile de kendinizi değerlendiriniz.

Öz değerlendirme formu

Akran değerlendirme formu

1. Örnek

Aşağıdaki gerçek yaşam durumları için iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturarak tablodaki ilgili alanlara yazınız.

Eğitim
İş Hayatı
Alışveriş

Çözüm

Araştırma yapılan konularda odaklanılan noktalar için iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren farklı bağlamlar oluşturulabilir. Örnekteki tabloda verilen gerçek yaşam durumları için iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bazı bağlamlar aşağıda yer almaktadır:

Eğitim	• Öğrencilerin sosyal etkinliklere katılım durumu ile ders başarısı arasındaki ilişki • Öğrencilerin okula ulaşım şekli ile okuduğu okul türü arasındaki ilişki
İş Hayatı	• Çalışma yeri ile çalışan verimliliği arasındaki ilişki • Çalışanların eğitim seviyeleri ile iş tercihleri arasındaki ilişki
Alışveriş	• Cinsiyet ile alışveriş yapılan zaman dilimi arasındaki ilişki • Yaş grupları ile tercih edilen ürün kategorisi arasındaki ilişki

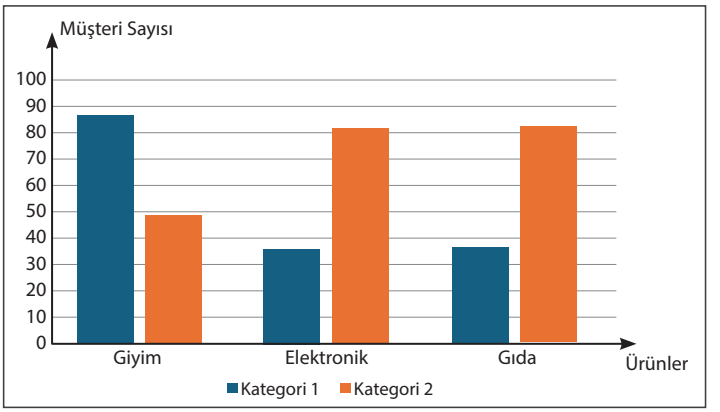
1. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloyu verilen gerçek yaşam durumlarına yönelik iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturarak doldurunuz. Oluşturduğunuz bağlamların iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar olup olmadığını sınıf arkadaşlarınızla nezaket kuralları çerçevesinde tartışınız. Gerçek yaşam durumları sütununda boş bırakılan kısımlara merak ettiğiniz, ilgi duyduğunuz birer gerçek yaşam durumu ve bu gerçek yaşam durumuna yönelik iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar yazınız.

Gerçek Yaşam Durumları	İki Kategorik Değişkenli Veri Toplamayı Gerektiren Bağlam
Tarım	
Spor	

İki Kategorik Değişkenin İlişkililiğini İçeren İstatistiksel Araştırma Sorusu Oluşturma

Grafik 2.2'deki kümeli sütun grafiğinde bir işletmede satılan giyim, elektronik ve gıda ürünlerini tercih eden müşteri sayılarının bazı kategorilere göre dağılımı gösterilmektedir.



Grafik 2.2: *Bir işletmede satılan ürünlerin dağılımı*

Yukarıda verilen grafik, farklı istatistiksel araştırma soruları sonucunda oluşturulmuş olabilir. Örneğin bu işletmeden alışveriş yapan erkeklerin ve kadınların belirli bir ürün kategorisindeki tercihlerinin nasıl farklılık gösterdiği ya da müşterilerin yaşları ile belirli ürünleri satın alma eğilimleri arasında nasıl bir ilişki olduğu sorularından hareketle elde edilmiş olabilir. Grafiğe uygun farklı araştırma sorularının neler olabileceğini arkadaşlarınızla tartışınız.

İki kategorik değişken arasındaki ilişkinin ortaya koyulmasına yönelik istatistiksel araştırma soruları oluşturulurken dikkat edilmesi gereken bazı temel ölçütler vardır. Bu sorularda bulunması gereken ölçütler aşağıda yer almaktadır. Bu ölçütler araştırmanın geçerliliğini, güvenilirliğini ve elde edilen verilerin anlamlılığını artırmayı hedefler.

1. **Amacı net olmalıdır.**

   İstatistiksel araştırma sorularında amaç, net olarak belirtilmelidir. Araştırma sorusunun amacı sorunun "ilişkilendiren" türde olmasıdır.

   Uygun Örnek: "Çalışanların cinsiyeti ile mesleki doyum arasında bir ilişki var mıdır?" (Soru iki kategorik değişken arasındaki ilişkiye odaklanmaktadır.)

   Uygun Olmayan Örnek: "İşle ilgili bazı şeylerin çalışanlar üzerindeki etkisi nedir?" (Belirli bir ilişki tanımlanmamıştır.)

2. **Araştırmaya uygun olmalıdır.**

   Araştırma sorusu; toplumsal, bilimsel veya pratik olarak anlamlı ve yararlı olmalıdır. Sorunun yanıtı, belirli bir problemi anlamaya veya çözmeye katkı sağlamalıdır.

Uygun Örnek: "Çocuklarda paketli gıda tüketimi ile obezite arasında bir ilişki var mıdır?"(Halk sağlığı açısından önemlidir.)

Uygun Olmayan Örnek: "Kahve içme alışkanlığı ile kırmızı giysi giyme arasında bir ilişki var mıdır?" (Bilimsel veya pratik açıdan anlamlı değildir.)

3. **İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.**

   Araştırmanın hangi grup veya popülasyon ile ilgili olduğu açıkça belirtilmelidir.

   Uygun Örnek: "Üniversite öğrencilerinin spor yapma alışkanlıkları ile beslenme alışkanlıkları arasında bir ilişki var mıdır?" (Evren, üniversite öğrencileridir.)

   Uygun Olmayan Örnek: "Bazı insanların spor yapma alışkanlıkları ile beslenme alışkanlıkları arasında bir ilişki var mıdır?" (Hangi insanların kastedildiği belirsizdir.)

4. **Değişken açık bir şekilde görülmelidir.**

   İki kategorik değişkenin ne olduğu net bir şekilde tanımlanmış olmalıdır.

   Uygun Örnek: "Yaş grubu ile sosyal medya kullanım sıklığı arasında bir ilişki var mıdır?" (Değişkenler, yaş grubu ve sosyal medya kullanım sıklığıdır.)

   Uygun Olmayan Örnek: "İnsanların bazı özellikleri ile genel ağ kullanımı arasında bir ilişki var mıdır?" (Hangi özelliklerin incelendiği belirtilmemiştir.)

5. **Veri toplanabilir olmalıdır**.

   Sorunun yanıtlanabilmesi için veri toplanması mümkün olmalıdır. İlgili veri ya mevcut olmalı ya da toplanabilir olmalıdır.

   Uygun Örnek: "Diyet yapma durumu ile kilo verme oranı arasında bir ilişki var mıdır?" (Bu veriler hastaneler ve kliniklerden toplanabilir.)

   Uygun Olmayan Örnek: "Orta Çağ'da yaşayan insanların ruh hâli ile çalışma alışkanlıkları arasında bir ilişki var mıdır?" (Bu dönem için yeterli veri bulunması çok zor olabilir.)

6. **Değişebilirliği yansıtmalıdır.**

   Değişkenlerde gözlemlenen farklılıklar verilerdeki değişebilirliği ortaya çıkarmaktadır.

   Uygun Örnek: "Ege Bölgesi'ndeki insanların yaşam alanları (dağlık/düzlük) ile spor tercihleri (doğa sporu/salon sporu) arasında bir ilişki var mı?" (Soruda değişkenler görülmektedir. Dolayısıyla bu değişkenlerin gözlemlenmesinde ortaya çıkacak farklılıklar değişebilirliği yansıtmaktadır.)

   Uygun Olmayan Örnek: "İnsanların otomobil tercihleri arasında bir ilişki var mıdır?" (Kategorik değişken eksik olduğu için değişebilirlik görülmemektedir.)

7. **Odaklanılan grup, araştırma yapmaya imkân vermelidir.**

   Araştırmanın yapıldığı grup araştırmanın uygulanabilirliğini desteklemeli ve verilerin toplanması pratik olmalıdır.

   Uygun Örnek: "İlkokul öğrencilerinin beslenme alışkanlıkları ile ders başarısı arasında bir ilişki var mıdır?" (Veri, okullardan toplanabilir.)

   Uygun Olmayan Örnek: "Dünyadaki tüm insanların uyku düzeni ile mutluluk düzeyi arasında bir ilişki var mıdır?" (Çok geniş bir evren ve veri toplama pratik olarak zordur.)

8. **Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.**

   Değişkenler kategorik olmalıdır yani belirli gruplara veya sınıflara ayrılabilir olmalıdır.

   Uygun Örnek: "Kişilerin medeni durumu ile araçlarının manuel veya otomatik vites olması arasında bir ilişki var mıdır?" [Her iki değişken de kategoriktir: medeni durum (evli/bekâr) ve vites tercihi (manuel/otomatik)]

   Uygun Olmayan Örnek: "Kişilerin yaşları ile aldıkları aylık maaş arasında bir ilişki var mıdır?" (Yaş ve maaş sürekli nicel verilerdir, kategorik veri değildir.)

2. Uygulama

İki Kategorik Değişkenli Veri Toplamayı Gerektiren Araştırma Sorusu Oluşturma

Duru, bir gazetede aşağıda görseli verilen haber metnini okuduktan sonra bu konuda araştırma yapmak istemiştir.

Haberler

Çevre — 22 Mart 2025

"Su tüketimine ilişkin elde edilen veriler, 2011 yılında kırk bir ülkede su sıkıntısı yaşandığını göstermiş, bu ülkelerden on tanesinde ise temiz su kaynaklarının tükenmek üzere olduğu belirlenmiştir. Artan kuraklık ile önlem alınmadığı takdirde bu durumun daha da kötüleşeceği ve 2050 yılına kadar her dört insandan en az birinin su sıkıntısından etkileneceği tahmin edilmektedir."

(Kısaltılmıştır.)

(Basından alınmıştır.)

Duru, yaptığı araştırmalar sırasında "Dünya Sağlık Örgütüne (WHO) göre temel ihtiyaçlarını (içme, temizlik, yemek pişirme vb.) karşılamak için bir insan günde en az 25 litre suya gereksinim duymaktadır ve küresel olarak bir kişinin günlük ortalama su tüketimi 80 litredir." bilgisine ulaşmıştır. Duru, bulunduğu sitedeki evlerin hangilerinde su tasarrufu yapılıp yapılmadığını anlamak için hanede yaşayan kişi sayısı, çocuk sahibi olma durumları, aylık (30 gün) su faturasında yazan ilk ve son endeks bilgileri ile kişi başı su tüketimini gösteren aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur. (1 m^3 = 1000 litre)

Daire No	Hanede Yaşayan Kişi Sayısı	Çocuk Var/ Yok	İlk Endeks (m^3)	Son Endeks (m^3)	Kişi Başı Günlük Su Tüketimi (m^3)
1	3	Var	611	619	
2	5	Var	927	940	
3	1	Yok	355	357	
4	4	Yok	823	832	
5	2	Yok	647	650	
6	8	Var	1256	1277	
7	6	Var	1190	1207	
8	7	Var	1350	1361	
9	3	Yok	520	527	
10	4	Var	426	436	

1. Tabloda boş bırakılan sütuna kişi başı su tüketim bilgilerini hesaplayarak uygun alanlara yazınız.

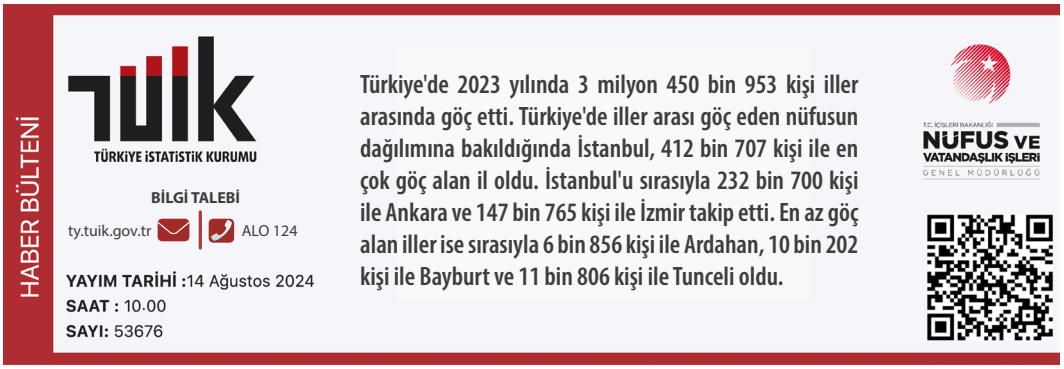
2. Tablodaki su tüketim bilgilerinden yola çıkarak kişi başı günlük 80 litre su tüketimi göz önünde bulundurulduğunda hangi hanelerde suyun tasarruflu kullanıldığı söylenebilir? Sınıf arkadaşlarınızla sözlü olarak tartışınız.

3. Duru, kişilerin evde su tasarrufu yapma davranışlarının hangi kriterlerle ilişkili olduğunu merak ederek bu konuda araştırma yapmak istemiştir. Buna göre Duru'nun su tasarrufu ile ilgili hangi kategorik değişkenlere göre araştırma yapabileceği hakkındaki görüşlerinizi arkadaşlarınızla nezaket kuralları çerçevesinde tartışınız. Tartışmalarınız sonucunda Duru'nun çalışması için oluşturabileceği araştırma sorularına örnekler yazınız. Sorularınızı verilen tabloyu kullanarak iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütlere göre inceleyiniz.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	
Araştırmaya değer olmalıdır.	
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	
Veri toplanabilir olmalıdır.	
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	

2. Örnek

Türkiye'deki iç göç araştırmaları çok boyutlu kriterler çerçevesinde ele alınır. Bu kriterler göçün nedenlerini, göç eden bireylerin özelliklerini ve göçün sonuçlarını anlamak açısından önemlidir. Türkiye'de iç göçe ilişkin bilgiler Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi'nden (ADNKS) her yıl düzenli olarak üretilmektedir. İllerin aldığı ve verdiği göçün ana nedenleri arasında ekonomik, sosyal, kültürel, coğrafi, demografik ve siyasi nedenler sayılabilir.


HABER BÜLTENİ

TÜİK
TÜRKİYE İSTATİSTİK KURUMU

BİLGİ TALEBİ
ty.tuik.gov.tr | ALO 124

YAYIM TARİHİ :14 Ağustos 2024
SAAT : 10.00
SAYI: 53676

Türkiye'de 2023 yılında 3 milyon 450 bin 953 kişi iller arasında göç etti. Türkiye'de iller arası göç eden nüfusun dağılımına bakıldığında İstanbul, 412 bin 707 kişi ile en çok göç alan il oldu. İstanbul'u sırasıyla 232 bin 700 kişi ile Ankara ve 147 bin 765 kişi ile İzmir takip etti. En az göç alan iller ise sırasıyla 6 bin 856 kişi ile Ardahan, 10 bin 202 kişi ile Bayburt ve 11 bin 806 kişi ile Tunceli oldu.

T.C. İÇİŞLERİ BAKANLIĞI
NÜFUS VE VATANDAŞLIK İŞLERİ
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

Bir öğrenci yukarıdaki görselde verilen TÜİK verisinden hareketle İstanbul, Ankara ve İzmir illerine yapılan göçün nedenleri üzerine bir çalışma yapmak istemektedir. Buna yönelik olarak "Kişilerin yaşadığı yerde çalıştığı iş kolu ile İstanbul, Ankara ve İzmir illerine göç etme durumları arasında bir ilişki var mıdır?" sorusunu oluşturmuştur.

a) Öğrencinin oluşturduğu soruyu iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütlere göre inceleyiniz. Soruda uygun olmayan ifadeler bulunduğunu düşünüyorsanız ilgili ölçütlere göre soruyu yeniden oluşturunuz.

b) Bu illere yapılan göçle ilgili başka hangi kriterlere göre araştırma yapabileceği hakkındaki görüşlerinizi arkadaşlarınızla nezaket kuralları çerçevesinde tartışınız ve belirlediğiniz kriterlere uygun iki kategorik değişkenli araştırma soruları oluşturunuz.

Çözüm

a) Bağlamda verilen amaç doğrultusunda "Kişilerin yaşadığı yerde çalıştığı iş kolu ile İstanbul, Ankara ve İzmir illerine göç etme durumları arasında bir ilişki var mıdır?" şeklinde oluşturulan istatistiksel araştırma sorusunun araştırma sorusu ölçütlerine göre incelenmesi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	Soru açık ve net bir şekilde ifade edilmiştir. Çalışılan iş kolu ile belirli büyük şehirlere göç durumu arasındaki ilişki sorgulanmaktadır. Bu, araştırmacının neyi inceleyeceğini açıkça ortaya koyar.
Araştırmaya değer olmalıdır.	Göç, ekonomik ve sosyal etkileri nedeniyle toplumda önemli bir konudur. Çalışılan iş kolunun büyük şehirlere göç üzerindeki etkisini anlamak, göç dinamiklerini ve bölgesel kalkınma stratejilerini iyileştirmede faydalı olabilir. Bu nedenle araştırma sorusu anlamlı ve araştırmaya değerdir.
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	Araştırma, "Türkiye'de yaşayan ve İstanbul, Ankara, İzmir gibi büyük şehirlere göç eden veya göç etmeyen bireyler" olmak üzere belirli bir evreni hedef alır. Bu, çalışmanın hangi grubu incelediğini açıkça belirtir.
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	Araştırmada iki değişken bulunmaktadır. Değişken 1: Kişilerin çalıştığı iş kolu (tarım, sanayi, hizmet vb.) Değişken 2: Göç durumu (İstanbul, Ankara ve İzmir'e göç edenler ve göç etmeyenler) Her iki değişken de açıkça tanımlanmış ve kategoriktir.
Veri toplanabilir olmalıdır.	İkincil veriler toplanarak soru cevaplanabilir. Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK), belediyeler ve göç araştırmaları gibi kaynaklardan iş kolları ve göç verileri temin edilebilir. Ayrıca anket ve saha çalışmalarıyla veri toplanabilir.
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	Soruda değişkenler görülmektedir. Dolayısıyla bu değişkenlerin gözlemlenmesinde ortaya çıkacak farklılıklar değişebilirliği yansıtmaktadır.
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	Odaklanılan grup, Türkiye'de yaşayan ve göç etme durumu incelenen bireylerdir. Bu, araştırma yapmaya uygun geniş bir kitledir. Mevcut verilere dayalı olarak analiz yapılabilir ve bulgular geniş bir popülasyona genellenebilir.
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	Her iki değişken de sınıflandırılabilir ve belirli kategorilere ayrılabilir özelliklere sahip olduğu için soru kategorik veri toplamaya uygundur. Göç durumu ve iş kolu bilgisi, anketler, istatistiksel veriler veya resmî kayıtlar gibi kaynaklardan kategorik olarak toplanabilir. Bu nedenle araştırma sorusu bu ölçüte uygunluk göstermektedir.

Araştırma sorusu, verilen tüm ölçütlere uygunluk göstermektedir. Bu nedenle bu soru istatistiksel çalışma yapmak için uygun bir konudur.

b) İstanbul, Ankara ve İzmir illerine yapılan göçte ekonomik fırsatlar, sağlık hizmetlerine erişim, altyapı ve ulaşım olanakları, yaşam kalitesi ve sosyal imkânlar, tarım ve turizm potansiyeli gibi kriterlerin etkili olduğu söylenebilir. Bu kriterlere göre oluşturulan iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularına aşağıdaki gibi örnekler verilebilir:

"Kişilerin yaşadığı bölgede mevcut iş imkânları ile İstanbul, Ankara ve İzmir'e göç etme durumu arasında bir ilişki var mıdır?"

"Kişilerin yaşadıkları yerdeki sağlık hizmetlerine erişim durumu ile İstanbul, Ankara ve İzmir'e göç etme durumu arasında bir ilişki var mıdır?"

2. Sıra Sizde

Öğretmeniniz rehberliğinde sınıfınızda iki gruba ayrılınız ve aşağıdaki iki soruyu gruplar arasında paylaşarak cevaplayınız.

1. **Bir kimyager bazı elementlerle ilgili yaptığı araştırma sonucu yandaki tabloyu oluşturmuştur.**
   a) **Kimyagerin bu tabloyu hangi iki kategorik değişkenli araştırma sorusuna karşılık hazırladığını grup arkadaşlarınızla tartışarak bulunuz.**
   b) **Oluşturduğunuz soruyu iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütlere göre aşağıdaki tabloyu inceleyerek "Sorunun ilgili ölçütü karşılayıp karşılamadığına dair fikirleriniz" bölümünü doldurunuz.**

Element	Metal mi?	Kristal Yapısı
Demir	Evet	Kübik
Bakır	Evet	Kübik
Alüminyum	Evet	Kübik
Titanyum	Evet	Kübik
Kalsiyum	Evet	Kübik
Kurşun	Evet	Kübik
Cıva	Evet	Kübik
Grafit	Hayır	Kübik değil
Kükürt	Hayır	Kübik değil
İyot	Hayır	Kübik değil
Karbon	Hayır	Kübik değil
Silikon	Hayır	Kübik değil

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	
Araştırmaya değer olmalıdır.	
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	
Veri toplanabilir olmalıdır.	
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	

2. Bir biyolog, bazı canlılarla ilgili yaptığı araştırma sonucu aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.

a) Biyoloğun bu tabloyu hangi araştırma sorusuna karşılık hazırladığını grup arkadaşlarınızla tartışarak bulunuz.

Canlı Adı	Omurgalı mı?	Etçil mi?
Kedi	Omurgalı	Etçil
Aslan	Omurgalı	Etçil
Köpek	Omurgalı	Etçil
Yılan	Omurgalı	Etçil
Kartal	Omurgalı	Etçil
Tavşan	Omurgalı	Etçil değil
At	Omurgalı	Etçil değil
Maymun	Omurgalı	Etçil değil
Fil	Omurgalı	Etçil değil
Kaplumbağa	Omurgalı	Etçil değil

Canlı Adı	Omurgalı mı?	Etçil mi?
Örümcek	Omurgasız	Etçil
Ahtapot	Omurgasız	Etçil
Sinek	Omurgasız	Etçil
Akrep	Omurgasız	Etçil
Yengeç	Omurgasız	Etçil
Solucan	Omurgasız	Etçil değil
Salyangoz	Omurgasız	Etçil değil
Midye	Omurgasız	Etçil değil
Denizanası	Omurgasız	Etçil değil
Karınca	Omurgasız	Etçil değil

b) Oluşturduğunuz soruyu iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütlere göre aşağıdaki tabloyu inceleyerek "Sorunun ilgili ölçütü karşılayıp karşılamadığına dair fikirleriniz" bölümünü doldurunuz.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	
Araştırmaya değer olmalıdır.	
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	
Veri toplanabilir olmalıdır.	
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	

İki Kategorik Değişkenli Veri Toplama Planı Yapma, Verileri Toplama ve Analize Hazır Hâle Getirme

Bir problemin çözümünde sistematik olmak; adım adım, mantıklı ve düzenli bir şekilde ilerleyerek problemi çözmeye çalışmak anlamına gelir. Bu yaklaşım, karmaşık sorunları daha basit parçalara ayırarak daha etkili ve sürdürülebilir çözümler üretmeye yardımcı olur. Sistematik olmak sadece sorunu çözmekle kalmaz; aynı zamanda çözüm sürecini izlenebilir, tekrarlanabilir ve hataya daha az açık hâle getirir.

Sistematik bir yaklaşımın yararları şunlardır:

- **Şeffaflık:** Süreç açık ve izlenebilir olduğundan ilerlemeyi ölçmek daha kolaydır.
- **Hataları azaltma:** Adım adım ilerleme, hataların erken tespit edilmesini sağlar.
- **Etkinlik:** Zaman ve kaynakların daha verimli kullanılmasını sağlar.
- **Karmaşıklığı azaltma:** Karmaşık sorunlar daha küçük, yönetilebilir alt problemlere bölünür.

Sistematik yaklaşım, belirsizlikleri azaltır ve problemi çözmeye yönelik daha net bir yol haritası sunar.

İstatistiksel araştırmalarda veri toplama planı, araştırmanın başarılı ve anlamlı sonuçlar üretmesi için kritik bir adımdır. İyi yapılandırılmış bir veri toplama planı; hangi verilerin nasıl ve kimden toplanacağına, hangi yöntemlerin kullanılacağına dair ayrıntılı bir yol haritası sunar. İki kategorik değişken içeren istatistiksel araştırmalarda veri toplama planının aşamaları aşağıda verilmiştir:

1. **Veri Toplama Aracının Oluşturulması veya Belirlenmesi**

   Araştırmada kullanılacak verilerin toplanması için uygun araçların seçilmesi veya geliştirilmesidir. Bu araçlar anket, test, mülakat, gözlem formu veya elektronik cihazlar olabilir. Araç, araştırma sorularına uygun ve verileri doğru şekilde toplayabilecek nitelikte olmalıdır.

   Örneğin öğrencilerin matematik başarısını etkileyen faktörleri araştırmak için bir anket oluşturulabilir.

2. **Evren ve Örneklemin Belirlenmesi**

   Araştırmanın hedef kitlesinin (evren) ve bu hedef kitlesinden seçilecek örneklerin (örneklem) belirlenmesidir. Örneklem, araştırma sonuçlarının genellenebilmesi için yeterince büyük ve temsilî olmalıdır.

   Örneğin Türkiye'deki sürücülerin tamamı yerine, belirli bir şehirdeki (örneğin İstanbul) sürücüler üzerinde çalışma yapılabilir.

3. **Rastgeleliğin Sağlanması**

   Araştırmanın tarafsız ve genelgeçer sonuçlar verebilmesi için örneklemin rastgele yöntemlerle seçilmesi önemlidir. Rastgelelik, her bir bireyin örnekleme dâhil olma şansının eşit olduğu bir yöntemle sağlanır.

   Örneğin bir okulda öğrencilerin ders çalışma alışkanlıkları ile ilgili bir araştırma yapılacaksa tüm öğrencilerin isimleri bir listeye yazılır ve rastgele numaralarla seçilecek 50 öğrenci örneklem olarak belirlenir.

4. **Değişkenlerin Belirlenmesi**

   Araştırmada incelenmek istenen özelliklerin veya ölçütlerin tanımlanmasıdır. Değişkenler, araştırma sorusuna göre belirlenir.

   Öğrencilerin fiziksel aktivite düzeyi ile akademik başarıları arasındaki ilişkinin araştırıldığı bir çalışmada, fiziksel aktivite düzeyi ve akademik başarı değişkenleri tanımlanır.

5. **Verilerin Nerede, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi**

   Verilerin nasıl ve ne zaman toplanacağı, hangi süreçlerin izleneceği, kimlerin sorumlu olacağı gibi detaylar önceden planlanmalıdır. Verilerin sistematik bir şekilde toplanması, araştırmanın başarısını artırır.

   Örneğin öğrencilerin sınav kaygı düzeyini ölçmek için yapılan bir çalışmada veriler okulun rehberlik öğretmeni tarafından rehberlik servisinde ve hafta içi öğle tatilinde toplanabilir.

6. **Verilerin Nasıl Kaydedileceğinin Belirlenmesi**

   Toplanan veriler fiziksel formlarda ise (örneğin anket kâğıtları) dijital ortama aktarılır. Genellikle bu işlem elektronik tablolar veya istatistiksel yazılımlar kullanılarak yapılır.

   Örneğin anket cevapları elle doldurulmuşsa bu cevaplar bir elektronik tablolama programına girilir. Her satır bir katılımcıyı, her sütun ise bir değişkeni temsil eder.

7. Verilerin Gizliliğinin Sağlanması, Nesnel ve Dürüst Olunmasına Yönelik Önlemler Alınması

Veri toplama sürecinde etik kuralların ihlal edilmemesi için gerekli önlemler alınmalıdır. Katılımcıların gönüllü olarak araştırmaya katılımı sağlanmalı, gizlilikleri korunmalı ve onayları alınmalıdır.

Örneğin "Ankete katılan tüm öğrencilerin bilgileri gizli tutulacak ve sonuçlar anonim olarak raporlanacaktır."

Veri toplama, araştırmaların temel aşamalarından biridir ve doğru verilerin toplanması güvenilir sonuçlar elde etmek için oldukça önemlidir. Verilerin toplanma yöntemleri araştırmanın amacına, veri türüne ve araştırmacının ihtiyaçlarına göre değişiklik gösterir. Veri toplama yöntemleri **birincil veri** ve **ikincil veri** olarak iki ana kategoride sınıflandırılabilir.

1. Birincil Veri Toplama Yöntemleri

Birincil veriler, araştırmacının doğrudan topladığı ve orijinal verileridir. Bu yöntemle elde edilen veriler araştırmanın özel gereksinimlerine göre toplanır. Anket, gözlem, deney, test, mülakat ve görüşmeler birincil veri toplama yöntemleridir.

2. İkincil Veri Toplama Yöntemleri

İkincil veriler, başka bir araştırmacı veya kurum tarafından daha önce toplanmış olan hazır verilerin kullanılmasıdır. Bu yöntem, genellikle daha düşük maliyetli ve daha az zaman alıcıdır çünkü araştırmacı hazır veri kaynaklarına başvurur. Resmî istatistikler, akademik yayınlar ve raporlar, kurumsal veri tabanları, medya ve haber kaynakları, dijital veri tabanları ve genel ağ kaynakları ikincil veri toplama yöntemleridir.

Dijital veri kaynakları geniş bir erişim imkânı sunarken doğru sonuçlar elde edebilmek için kaynakların güvenilirliğini, güncelliğini ve uygunluğunu değerlendirmek çok önemlidir. Verilerin doğru bir şekilde analiz edilmesi ve kullanılması, araştırmanın başarısı için kritik öneme sahiptir. Dijital veri kaynakları kullanılırken göz önünde bulundurulması gereken önemli noktalar aşağıda verilmiştir:

1. Kaynağın Güvenilirliği

Veriyi sunan kuruluş veya platformun güvenilir olması gerekmektedir. Devlet kurumları (TÜİK, Merkez Bankası vb.), uluslararası kuruluşlar (Dünya Bankası, OECD vb.) ve akademik kurumlar güvenilir kabul edilir. Sosyal medya veya belirsiz kaynaklardan gelen veriler güvenilir olmayabilir.

2. Verilerin Güncelliği

Verilerin ne zaman toplandığını kontrol etmek önemlidir. Eski tarihli veriler, güncel analizler için yanıltıcı olabilir.

3. Verilerin Kapsamı ve Uygunluğu

Verinin kapsadığı zaman dilimi, coğrafi dağılımı ve içeriği araştırma sorusuyla uyumlu olmalıdır.

Örneğin Türkiye genelinde bir analiz yapılmak istenirse sadece İstanbul verileriyle sınırlı kalınmamalıdır.

4. Veri Lisansı ve Erişim Hakları

Verilerin telif hakkı, lisanslama durumu ve paylaşım politikaları kontrol edilmelidir. Bazı dijital veri kaynakları tarafından kullanım izni için belirli koşullar veya ücretler talep edilebilir. Veri kullanılmadan önce verinin kamuya açık olup olmadığı veya araştırmalarda kullanılması için izin alınması gerekip gerekmediği kontrol edilmelidir.

5. Veri Kaynaklarının Referanslanması

Kullanılan verilerin kaynağını doğru bir şekilde referanslamak, akademik veya ticari araştırmalarda önemlidir. Kaynakların doğru şekilde belirtilmesi, etik kuralların ve akademik dürüstlüğün bir gereğidir. Dijital veriler sürekli güncellenebileceği için verinin ne zaman alındığının belirtilmesi de önemlidir. Bu, veri setinin hangi döneme ait olduğunu netleştirir.

6. Veri Gizliliği ve Güvenlik

Veriler kişisel bilgiler içeriyorsa Kişisel Verilerin Korunması Kanunu (KVKK) gibi yasal düzenlemelere dikkat edilmelidir. Hassas verilerin doğru bir şekilde anonim hâle getirildiğinden emin olunmalıdır. Veri başkalarıyla paylaşılırken orijinal kaynağın gizlilik politikalarına uygun hareket edilmelidir. Özellikle kişisel veya ticari veriler söz konusuysa bu politikalar ihmal edilmemelidir.

7. Farklı Kaynaklarla Karşılaştırma

Verinin güvenilirliğinin ve doğruluğunun kontrol edilmesi için aynı konuda farklı kaynaklardan gelen veriler karşılaştırılmalıdır. Bir kaynaktan elde edilen verilerin diğer güvenilir kaynaklarla uyumlu olup olmadığının kontrol edilmesi önemlidir.

3. Uygulama

İstatistiksel Araştırma Sorusu Oluşturma ve Veri Toplama Planı Hazırlama

Beslenme, okul çağı çocuğunun büyüme ve gelişmesini sağlaması açısından son derece önemlidir. Öğrencilerin ihtiyaç duydukları besinleri yeterli ve dengeli olarak alamaması son yılların büyük sağlık problemlerinden biri olan obeziteye davetiye çıkarmaktadır. Tam gün eğitim yapılan okullarda öğrenciler, çeşitli nedenlerle öğle öğünü için okul kantinini kullanmaktadır (Görsel 2.1). T.C. Millî Eğitim Bakanlığı öğrencilerin sağlığını gözeterek okul kantinlerinde satılabilecek ve satılması yasak olan ürünlerin listesini kantin işletmecilerine yönetmelik doğrultusunda iletmektedir.

Görsel 2.1: *Kantindeki öğrenciler*

Bir lisenin rehberlik servisi, okuldaki öğrencilerin öğle yemeği tercihlerinin hangi değişkenlere bağlı olduğunu belirlemek için bir araştırma yapmaya karar vermiştir. Bu doğrultuda rehberlik servisi istatistiksel veri elde etmek için araştırma soruları hazırlayacaktır. Sınıfta öğretmeniniz rehberliğinde gruplara ayrılarak verilen soruları cevaplayınız.

1. Rehberlik servisinin yapacağı araştırma için iki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik istatistiksel araştırma soruları belirleyiniz.

2. Hazırladığınız araştırma sorularına yönelik veri toplamaya başlamadan önce bir veri toplama planı oluşturunuz. Aşağıda aşamaları verilen veri toplama planını belirlediğiniz araştırma sorusuna göre doldurunuz.

Veri Toplama Planı

a) Araştırma sorularına cevap bulunmasını sağlayacak veri toplama araçlarının belirlenmesi

b) Evren ve örneklemin belirlenmesi

c) Rastgeleliğin sağlanması

ç) Değişkenlerin belirlenmesi

d) Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi

e) Verilerin nasıl kaydedileceğinin belirlenmesi

f) Verilerin gizliliğine dikkat edilmesi, dürüst ve nesnel olunması

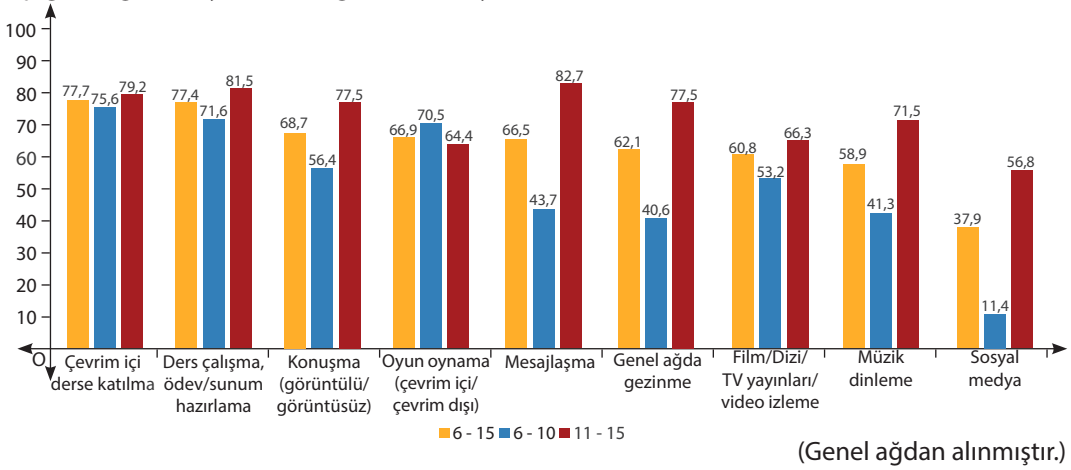
3. Hazırladığınız veri toplama planını diğer gruplarla paylaşınız. Diğer grupların paylaştığı planları ise karekoddaki kontrol formunda yer alan veri toplama planında bulunması gereken özellikler açısından inceleyiniz. İnceleme sonunda fikirlerinizi diğer gruplarla paylaşarak tartışınız.

Veri toplama planı kontrol formu

4. Hazırladığınız veri toplama planını kullanarak oluşturduğunuz veya hazır edindiğiniz bir veri toplama aracı ile verilerinizi toplayınız. Topladığınız verilerin elektronik tablolama programına veya istatistik yazılımına girişini yapınız. Bu verileri düzenleyerek 5. uygulama bölümünde kullanmak için saklayınız.

3 . Örnek

Çocukların kullandıkları bilişim teknolojileri konusunda yürütülen "Çocuklarda Bilişim Teknolojileri Kullanım Araştırması" 2021 yılında Hane Halkı Bilişim Teknolojileri Kullanım Araştırması kapsamında 6 -15 yaş grubundaki çocuklara uygulanmıştır. Düzenli genel ağ kullanan çocukların genel ağı kullanma amacına yönelik eğilimleri ele alınmıştır. Bu doğrultuda elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafikte yüzdelik değerler olarak yer almaktadır.



(Genel ağdan alınmıştır.)

Yaş gruplarına göre genel ağ kullanma oranı 6-10 yaş grubundaki çocuklarda yaklaşık %51,6, 11-15 yaş grubundaki çocuklarda ise yaklaşık %73,0 olarak görülmüştür. Bu bilgiden yola çıkarak okullardaki öğrencilerin genel ağ kullanma amaçlarını belirlemeye yönelik bir araştırma tasarladığınızı varsayınız. Çalışmanızı "A ilçesindeki liselerde öğrenim gören öğrencilerin sınıf seviyeleri ile genel ağ kullanma tercihleri arasında bir ilişki var mıdır?"sorusu üzerinden ilerletiniz.

Buna göre veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak araştırmaya yönelik bir veri toplama planı hazırlayınız.

Çözüm

Öğrencilerin genel ağı kullanma tercihlerinin sınıf seviyelerine göre nasıl farklılık gösterdiğini inceleyen iki kategorili bir istatistiksel araştırma, eğitim ve teknoloji kullanımı alanında önemli bilgiler sunabilir. Bu tür bir araştırma, sınıf seviyelerinin genel ağ kullanım alışkanlıkları üzerindeki etkilerini anlamaya yardımcı olabilir. Aşağıda bu araştırmanın veri toplama planı aşamaları açıklanmıştır.

Veri Toplama Planı

1. **Veri Toplama Aracının Oluşturulması veya Belirlenmesi**
   - Veri toplama aracı olarak anket veya çevrim içi bir form kullanılabilir. Ankette grafikteki kategoriler ele alınarak öğrencilerin genel ağı hangi amaçlarla kullandıklarını anlamak ve bu kullanımın sıklığını belirlemek amacıyla çoktan seçmeli sorular ve derecelendirme soruları yer almalıdır.
2. **Evren ve Örneklem Belirlenmesi**
   - **Evren:** Ortaöğretim seviyesindeki (9, 10, 11 ve 12. sınıf) öğrenciler
   - **Örneklem:** İlçedeki belirli sayıda okuldan, her sınıf seviyesinden (9. sınıftan 12. sınıfa kadar) rastgele seçilecek öğrenciler örneklem olarak alınacaktır. Her sınıf seviyesinden yeterli sayıda katılımcının olması, sonuçların genellenebilirliğini sağlayacaktır.
3. **Rastgeleliğin Sağlanması**
   - Rastgele örnekleme yöntemleri kullanılabilir. Örneğin her sınıf seviyesinden rastgele seçilmiş sınıflardan veya öğrenci listelerinden rastgele seçim ile belirli aralıklarla seçilecek öğrenciler dâhil edilebilir.
4. **Değişkenlerin Belirlenmesi**
   - **Değişken 1:** Öğrencinin sınıf seviyesi (9, 10. sınıf vb.)
   - **Değişken 2:** Genel ağ kullanma tercihi (eğlence, eğitim, araştırma, sosyal medya vb.)

5. **Verilerin Nereden, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi**
   - **Nereden:** Okullarda, çevrim içi platformlarda veya belirlenen örneklemin bulunduğu bölgelerde yapılabilir.
   - **Ne Zaman:** Eğitim-öğretim dönemi içerisinde, öğrencilerin genel ağ kullanım alışkanlıklarının daha rahat değerlendirilebileceği bir zaman dilimi (sınav dönemleri dışında gibi) tercih edilebilir.
   - **Nasıl:** Anket formları sınıf ortamında uygulanabilir veya öğrencilerin e-posta adreslerine çevrim içi anket bağlantısı gönderilebilir.
   - **Kimler Tarafından:** Veriler araştırmacılar ve/veya araştırma ekibi tarafından toplanabilir. Çevrim içi bir anket kullanılacaksa okulun rehberlik servisi veya öğretmenleri de sürece destek verebilir.
6. **Verilerin Nasıl Kaydedileceğinin Belirlenmesi**
   - Veriler dijital olarak toplanacaksa bir veri tabanı veya elektronik tablo kullanılarak anket sonuçları kaydedilecektir. Manuel anketler kullanılırsa bu veriler sonradan dijital forma dönüştürülecektir.
7. **Veri Gizliliğinin Sağlanması, Nesnel ve Dürüst Olunmasına Yönelik Önlemler Alınması**
   - **Gizlilik:** Öğrencilerin isimleri veya kimlik bilgileri yerine anonim kodlar kullanılacaktır. Veriler yalnızca araştırma amaçlı kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.
   - **Nesnellik ve Dürüstlük:** Anket soruları yönlendirici olmayan ve tarafsız bir dilde hazırlanmalıdır. Anket uygulanırken öğrencilerin dürüst ve samimi yanıtlar vermesi teşvik edilmelidir.
   - **Etik Onay:** Araştırmanın yapılabilmesi için gerekli etik onaylar alınacak ve velilerden izin istenecektir.

Sonuç: Bu araştırma, öğrencilerin genel ağ kullanma tercihlerinin sınıf seviyelerine göre nasıl farklılık gösterdiğini iki kategorik değişken üzerinden inceleyen bir çalışmadır. Araştırma sorusu oluşturulduktan sonra veri toplama planı hazırlanmıştır. Bu planla veriler toplanarak analiz edilebilir. Analiz sonucu elde edilen bilgiler eğitim politikaları ve öğrencilerin dijital platformlardaki davranışlarını daha iyi anlamaya katkı sağlayabilir.

3. Sıra Sizde

Türkiye Yüzyılı projelerinden Sıfır Atık Projesi ile israfın önlenmesi, doğal kaynakların daha verimli kullanılması, atık oluşum sebeplerinin gözden geçirilerek atık oluşumunun engellenmesi veya azaltılması hedeflenmiştir. Atığın oluşması durumunda ise kaynağında ayrılıp geri dönüşüme (Görsel 2.2) kazandırılmasıyla mevcut sistemin daha düzenli, sistemli ve uygulanabilir olması amaçlanmıştır.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığında görevli bir öğretmen, Sıfır Atık Projesi kapsamında hazırlanan ve öğrencilerde geri dönüşüm kültürü oluşturarak sürdürülebilir yaşam becerilerini benimsetmeyi amaçlayan etkinlikleri uygulamak üzere planlama yapmak istemektedir.

Bu amaçlar doğrultusunda öğretmen görevli olduğu ilçede bulunan öğrencilerin geri dönüşüm konusunda bilgi sahibi olup olmadıklarını belirlemeye yönelik bir araştırma tasarlamaktadır. Yapacağı etkinlikleri sınıf seviyelerine göre farklılaştırmak isteyen öğretmen "A lisesindeki öğrencilerin sınıf seviyeleri ile geri dönüşüm konusundaki bilgi sahibi olma durumları arasında bir ilişki var mıdır?" sorusundan hareketle bir veri toplama planı oluşturmuştur.

Görsel 2.2: *Sıfır atık kutuları*

Buna göre aşağıdaki veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak bu araştırmaya yönelik bir veri toplama planı hazırlayınız.

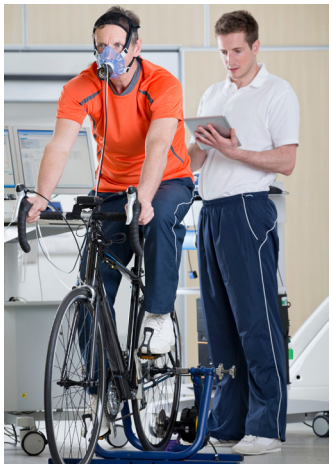
Veri Toplama Planı

1. **Veri Toplama Aracının Oluşturulması veya Belirlenmesi**
2. **Evren ve Örneklem Belirlenmesi**
3. **Rastgeleliğin Sağlanması**
4. **Değişkenlerin Belirlenmesi**
5. **Verilerin Nereden, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi**
6. **Verilerin Nasıl Kaydedileceğinin Belirlenmesi**
7. **Veri Gizliliğinin Sağlanması, Nesnel ve Dürüst Olunmasına Yönelik Önlemler Alınması**

İki Kategorik Veriye Dayalı İstatistiksel Araştırmalarda Veri Analizi Yapma ve Sonuçları Yorumlama

Kategorik veri analizi, toplanan kategorik verilerden anlamlı bilgiler çıkarma sürecidir. Günlük hayatta sorunların çözümü, daha iyi kararlar alınması veya belirli gruplar arasındaki eğilimlerin ve farklılıkların anlaşılması için kategorik veri analizi kullanılır. Kategorik veri analizinin temel amacı, ham veriyi işleyerek belirli kategoriler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak ardından bu bilgileri kullanarak gruplar arası karşılaştırmalar yapmak ve sonuçları yorumlamaktır.

Bir sporcuya ait koşma hızı, kat ettiği mesafe, kalp ritmi, yağ-kas oranı, uyku süresi ve benzeri biyometrik sayısal veriler belirli aralık veya gruplara ayrılarak kategorik veri analizi yapılır (Görsel 2.3). Bu şekilde belirli kategorilere göre sporcuların antrenman veya beslenme ihtiyaçları daha net bir şekilde belirlenebilir ve kişiye özel programlar oluşturulabilir.



Görsel 2.3: *Biyometrik veri analizi yapılan sporcu*

İki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi analiz etmek için yaygın olarak kullanılan iki önemli araç, **iki yönlü tablo (çapraz tablo)** ve **koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafikleridir.** Bu araçlar, iki kategorik değişken arasındaki olası ilişkileri hem sayısal hem de görsel olarak keşfetmeye ve analiz etmeye yardımcı olur.

1. İki Yönlü Tablo (Çapraz Tablo) ve Göreli Sıklık Tablosu

İki yönlü tablo, iki kategorik değişkenin kategorilerindeki sıklıkları bir tablo hâlinde sunar. Bu tabloda kategorik değişkenlerden biri satırlarda diğeri ise sütunlarda temsil edilir. Tablodaki her hücre, iki değişkenin kesiştiği noktada gözlenen sıklıkları gösterir. Aşağıda verilen Tablo 1, kategorilerinden biri öğrencilerin sınıf seviyesi değişkenini diğeri ise seçmek istedikleri kurs çeşidi değişkenini gösteren iki yönlü bir tablo örneğidir. Bu tabloda iki değişkenin kesiştiği noktada gözlenen değerler öğrenci sayılarıdır.

Tablo 1: *Sınıf Seviyeleri ile Kurs Tercihlerini Gösteren İki Yönlü Tablo*

Kurs Tercihi / Sınıf Seviyesi	Spor	Sanat	Toplam
9. Sınıf	32	18	50
12. Sınıf	48	2	50
Toplam	80	20	100

Göreli sıklık tablosu, iki yönlü tablodaki kategorik değişkenlerin sıklıklarını oran olarak ifade eden bir tablodur. Bu tabloda her hücredeki değer, toplam öğrenci sayısına bölünerek hesaplanır. Göreli sıklık tablosu, verilerin genel dağılımını yüzdelik ya da ondalık değerlerle sunarak farklı kategoriler arasındaki karşılaştırmaları daha kolay hâle getirir. Aşağıda verilen Tablo 2, öğrencilerin sınıf seviyesi ile seçmek istedikleri kurs çeşidi değişkenlerinin göreli sıklıklarını göstermektedir. Bu tablo, her bir sınıf seviyesindeki öğrencilerin kurs tercihlerini genel öğrenci kitlesi içindeki yüzdelik dağılımına göre anlamamıza yardımcı olur.

Tablo 2: *Sınıf Seviyeleri ile Kurs Tercihlerini Gösteren Göreli Sıklık Tablosu*

Kurs Tercihi / Sınıf Seviyesi	Spor	Sanat	Toplam
9. Sınıf	$\frac{32}{100} = 0,32$	$\frac{18}{100} = 0,18$	$\frac{50}{100} = 0,50$
12. Sınıf	$\frac{48}{100} = 0,48$	$\frac{2}{100} = 0,02$	$\frac{50}{100} = 0,50$
Toplam	$\frac{80}{100} = 0,80$	$\frac{20}{100} = 0,20$	$\frac{100}{100} = 1,00$

2. Koşullu Göreli Sıklıkları Gösteren Tablolar ve Kümeli Sütun Grafikleri

Koşullu göreli sıklık, bir kategorik değişkene bağlı olarak diğer kategorik değişkenin yüzdelik dağılımını gösterir. Kümeli sütun grafikleri ise bu göreli sıklıkları görselleştirmenin etkili bir yoludur. Bu grafikler, her bir kategori için diğer değişkenin dağılımını yüzde cinsinden temsil eder.

Tablo 1'deki verilerden hareketle sınıf seviyesine göre öğrencilerin seçmek istedikleri kursların koşullu göreli sıklığı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

9. sınıf öğrencilerinin dağılımı

- Spor: $\frac{32}{50} \cdot 100 = \%64$
- Sanat: $\frac{18}{50} \cdot 100 = \%36$

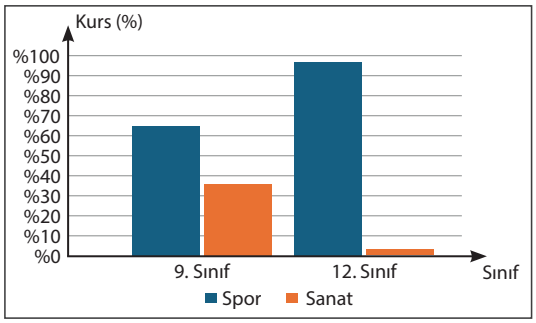
12. sınıf öğrencilerinin dağılımı

- Spor: $\frac{48}{50} \cdot 100 = \%96$
- Sanat: $\frac{2}{50} \cdot 100 = \%4$

Buna göre sınıf seviyelerine göre kurs tercihlerinin koşullu göreli sıklık tablosu Tablo 3'teki gibi, kümeli sütun grafiği Grafik 2.3'teki gibi oluşturulur.

Tablo 3: *Sınıf Seviyelerine Göre Kurs Tercihlerinin Yüzdesel Dağılımları*

Kurs Tercihi / Sınıf Seviyesi	Spor	Sanat	Toplam
9. Sınıf	%64	%36	%100
12. Sınıf	%96	%4	%100



Grafik 2.3: *Sınıf Seviyesine Göre Kurs Tercihi Dağılımı*

9. sınıf öğrencilerinin %64'ü sporla ilgilenirken %36'sı sanatla ilgilenmektedir. 12. sınıfta ise sporla ilgilenenlerin oranı oldukça yüksekken (%96) sanatla ilgilenenlerin oranı oldukça düşüktür (%4). Bu durum, 12. sınıfta sporla ilgilenen öğrenci oranının arttığını fakat sanatla ilgilenen öğrenci oranının azaldığını göstermektedir.

Tablo 1'deki veriler kullanılarak tercih edilen kurs çeşitlerine göre sınıf seviyelerinin koşullu göreli sıklığı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

Spor kursunu tercih edenlerin dağılımı

- 9. Sınıf: $\frac{32}{80} \cdot 100 = \%40$
- 12. Sınıf: $\frac{48}{80} \cdot 100 = \%60$

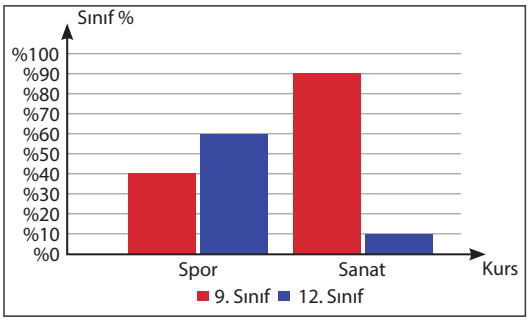
Sanat kursunu tercih edenlerin dağılımı

- 9. Sınıf: $\frac{18}{20} \cdot 100 = \%90$
- 12. Sınıf: $\frac{2}{20} \cdot 100 = \%10$

Buna göre tercih edilen kurs çeşitlerine göre sınıf seviyelerinin koşullu göreli sıklık tablosu Tablo 4'teki gibi, kümeli sütun grafiği Grafik 2.4'teki gibi oluşturulur.

Tablo 4: *Kurs Tercihlerine Göre Sınıf Seviyelerinin Yüzdesel Dağılımları*

Kurs Tercihi / Sınıf Seviyesi	Spor	Sanat
9. Sınıf	%40	%90
12. Sınıf	%60	%10
Toplam	%100	%100



Grafik 2.4: *Kurs Tercihine Göre Sınıf Seviyesi Dağılımı*

Sporla ilgilenen öğrenciler arasında 12. sınıf öğrencilerinin oranı daha yüksektir (%60). Sanatla ilgilenen öğrenciler arasında ise 9. sınıf öğrencileri ağırlıklı olarak bulunmaktadır (%90). Bu sonuçlar, sporla ilgilenen öğrencilerin büyük kısmının 12. sınıflardan, sanatla ilgilenen öğrencilerin ise çoğunlukla 9. sınıflardan olduğunu göstermektedir.

Bu verilerden sınıf seviyesi arttıkça öğrencilerin sanattan uzaklaşıp daha fazla sporla ilgilenmeye yöneldiği yorumu yapılabilir. Bu, öğrencilerin yaşları ilerledikçe ilgi alanlarının değişebileceğine dair bir fikir sunar.

Sınıf seviyesi ve sporla ilgilenme arasında bir ilişki gözlemlense bile bu gözlem, sınıf seviyesinin spor ilgisini artırdığı ya da azalttığı anlamına gelmez. Aynı şekilde, sporla ilgilenme durumunun da doğrudan sınıf seviyesine etkisi olduğu varsayımı yapılamaz. Bu tür analizler yalnızca iki değişken arasında bir ilişkinin varlığını veya yokluğunu gösterir.

İki kategorik değişkenli verilerde kullanılan görselleştirme araçları (çapraz tablolar, koşullu göreli sıklık tabloları, kümeli sütun grafikler vb.) değişkenler arasında bir ilişki durumu olup olmadığını görsel olarak anlamaya olanak tanır. Bu görselleştirmeler, değişkenler arasındaki ilişki durumunu ortaya koyar ancak bu ilişkiyi nedensellik olarak yorumlamak yanıltıcı olabilir. Özetle iki kategorik değişken arasındaki ilişki analiz edilirken yalnızca değişkenler arasında gözlemlenen bir ortaklık veya ilişki bulunduğu söylenebilir, bu ortaklığın bir nedensellik içerdiğinin söylenebilmesi için ek araştırmalar ve analizler gereklidir.

4. Uygulama

Veri Analizi Yapma

Geleceğe Nefes Ağaçlandırma Projesi; Türkiye orman sahasının ve ağaç servetinin çoğaltılması, erozyonla mücadelenin teşvik edilerek toprak, su ve bitki arasında bozulan dengenin yeniden sağlanması, biyolojik çeşitliliğin artırılması gibi amaçlarla hayata geçirilmiştir.

2019 yılından itibaren her yıl Millî Ağaçlandırma Günü olan 11 Kasım'da Orman Genel Müdürlüğünün yürüttüğü çalışmalara 7'den 70'e tüm vatandaşların da katılımı sağlanarak Türkiye genelinde toplu olarak bir ağaçlandırma seferberliği gerçekleştirilmesi amacıyla eş zamanlı fidan dikim etkinlikleri düzenlemektedir (Görsel 2.4).

Görsel 2.4: *Geleceğe Nefes Ağaçlandırma Projesi etkinliği*

Bir okulun sosyal etkinlikler kurulu, öğrencilerin (200 öğrenci) duyarlılıklarını artıracak sosyal sorumluluk projeleri başlatmayı amaçlamıştır. Bu doğrultuda uyguladığı testlerle öğrencilerinin çevresel farkındalıklarını (düşük/orta/yüksek) tespit etmiş ve daha sonra gönüllü öğrencileri ile "Geleceğe Nefes Ağaçlandırma Projesi"ne katılmıştır.

Bu etkinlik sonrasında okul rehber öğretmeni, öğrencilerin "Geleceğe Nefes Ağaçlandırma Projesi'ne katılım durumu (katıldı/katılmadı) ile çevre farkındalığı seviyeleri (düşük/orta/yüksek) arasında bir ilişki var mı?" sorusu üzerinden bir araştırma yapmıştır.

1. Okul rehber öğretmeni verileri elde edebilmek için nasıl bir veri toplama planı hazırlamış olabilir? Fikrinizi yazınız.

2. Araştırma sorusunda kullanılan değişkenler arasındaki ilişkilerin analiz edilebilmesi için hangi görselleştirme araçlarından faydalanılabilir? Öğretmeninizin rehberliğinde fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Arkadaşlarınızın fikirlerini de dikkate alarak uygun görselleştirme araçlarını belirlemede ortak bir karara varınız.

3. Okul rehber öğretmeni elde ettiği verileri analiz etmek için verileri Tablo 5'te yer alan iki yönlü tabloya kaydetmiştir.

Tablo 5: *Katılım Durumu ile Farkındalık Seviyelerini Gösteren İki Yönlü Tablo*

Kurs Tercihi / Farkındalık Seviyesi	Katıldı	Katılmadı	Toplam
Düşük	20	50	70
Orta	50	30	80
Yüksek	30	20	50
Toplam	100	100	200

Tablo 5'teki verilere ait göreli sıklıkları gösteren iki yönlü tabloyu ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini oluşturunuz. Göreli sıklık tablolarını ve kümeli sütun grafiklerini projeye katılım durumuna ve çevre farkındalık seviyelerine göre ayrı ayrı olarak oluşturunuz.

a) Katılım durumuna göre çevre farkındalık seviyelerini gösteren koşullu göreli sıklık tablosu ile kümeli sütun grafiğini aşağıya çiziniz.

b) Çevre farkındalık seviyelerine göre katılım durumunu gösteren koşullu göreli sıklık tablosu ile kümeli sütun grafiğini aşağıya çiziniz.

4. Tablolarda elde ettiğiniz değerleri ve oluşturduğunuz grafikleri yorumlayarak öğrencilerin projeye katılım durumu ile çevre farkındalığı arasındaki ilişkiler hakkındaki görüşlerinizi açıklayınız. "Bir öğrencinin çevre farkındalığı varsa projeye katılır." ya da "Bir öğrenci projeye katılmış ise çevre farkındalığı vardır." gibi kesin yargılara ulaşılıp ulaşılamayacağını arkadaşlarınızla tartışınız.

5. Elde ettiğiniz sonuçlardan hareketle "Geleceğe Nefes Ağaçlandırma Projesi'ne katılım durumu ile çevre farkındalığı seviyeleri arasında bir ilişki var mı?" sorusu üzerinden yapılan araştırmayı değerlendiriniz. Yaptığınız değerlendirmeye göre ulaştığınız sonuçları yazınız.

Kindi [Ebu Yusuf Ya'kub bin İshak el-Kindi (Görsel 2.5)], 9. yüzyılda yaşamış önemli bir İslam filozofu, matematikçi ve bilim insanıdır. Kindi, frekans analizi (sıklık analizi) alanında ilk çalışmaları yapmış kişidir ve bu alandaki katkıları kriptoloji (şifre bilimi) açısından büyük bir öneme sahiptir.

Görsel 2.5: *Kindi (Temsilî)*

Kindi ve Sıklık Analizi

Kindi, özellikle kriptografi alanında yaptığı çalışmalarla tanınır. Sıklık analizi, Kindi'nin kriptografi alanındaki en önemli keşiflerinden biridir ve şifre çözme yöntemlerinde devrim niteliği taşımaktadır. Sıklık analizi, bir dildeki harflerin ya da harf kombinasyonlarının ortaya çıkma sıklıklarına dayanarak şifrelenmiş mesajları çözmeyi amaçlar. Kindi'nin yöntemi, bir alfabenin belirli harflerinin belli bir metinde ne sıklıkla kullanıldığını gözlemlemek üzerine kuruludur. Örneğin, İngilizcede "E" harfi en sık kullanılan harflerden biridir. Kindi, bu temel bilgiyi kullanarak şifrelenmiş mesajlardaki harf sıklıklarını inceleyerek şifreli metinleri çözmenin bir yolunu geliştirmiştir.

Kindi'nin "Şifreli Mesajları Açığa Çıkarmanın Yolları" Risalesi

Kindi, "Risale fi Istikhraj al-Mu'amma" adlı eserinde sıklık analizini detaylı bir şekilde ele alır. Bu eser, şifreli metinlerin nasıl çözülebileceği üzerine yazılmış bir risaledir. Kindi bu çalışmasında, bir metindeki harflerin dağılımlarını kullanarak o metnin şifresini nasıl çözebileceğini gösterir. Metodoloji, harflerin sıklığını inceleyerek şifrelenmiş bir mesajda kullanılan şifreli harflerle gerçek harfler arasında bir ilişki kurmayı içerir.

Sıklık Analizinin Önemi

Kindi'nin sıklık analizi yöntemi, modern kriptografinin temellerinden biri olarak kabul edilir. Orta Çağ'dan önce şifreleme çoğunlukla basit yer değiştirme yöntemlerine dayanıyordu. Sıklık analizi, bu tür yer değiştirme şifrelerini çözmek için güçlü bir araç haline geldi. Kindi'nin bu çalışması, daha sonra Batı'da ve diğer İslam dünyasında kriptografik gelişmelere de ilham verdi.

Sonuç olarak Kindi'nin sıklık analizi sadece matematiksel bir buluş değil, aynı zamanda kriptografinin gelişiminde çığır açan bir keşif olarak kabul edilir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

5. Uygulama

Veri Analizi Yapma ve Sonuçları Yorumlama

Üçüncü uygulamadaki veri toplamı planını kullanarak grupça topladığınız ve kaydettiğiniz verileri istatistik programı yardımıyla açınız. Belirlediğiniz istatistiksel araştırma sorularına cevap bulabilmek için uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçerek verilerinizi analiz ediniz.

Belirlediğiniz örneklem ile topladığınız verilerden elde ettiğiniz sonuçların diğer grupların sonuçları ile olan benzerlik ve farklılıklarını inceleyiniz. Ayrıca bu verilerin araştırma sorunuza ne ölçüde cevap verdiğini ve araştırmanızdaki evreni temsil etmesi açısından uygunluğunu grup arkadaşlarınızla tartışınız.

4 . Örnek

İpek bir sinemasever ve müzikseverdir. Arkadaşlarının tercih ettiği film ile müzik türleri arasında bir ilişki olup olmadığını merak eder. Bunun için arkadaşlarının "izlediği film türleri ile dinlediği müzik türleri arasında bir ilişki var mı?" sorusu üzerinden istatistiksel bir araştırma yapmak ister. Bunun için bilim kurgu, macera, komedi ve diğer film türleri ile Türk halk müziği, Türk sanat müziği, klasik Türk müziği ve diğer müzik türleri seçeneklerinin bulunduğu aşağıda görseli verilen anketi oluşturur.

ANKET

Bu anket tercih edilen film ve müzik türünün belirlenmesi için yapılmaktadır.

Adı Soyadı:

Yönerge: Her bir maddeyi cevaplarken sadece bir seçeneği işaretleyiniz.

1. İzlemeyi tercih ettiğiniz film türünü işaretleyiniz.

☐ Bilim Kurgu ☐ Macera ☐ Komedi ☐ Diğer

2. Dinlemeyi tercih ettiğiniz müzik türünü işaretleyiniz.

☐ Türk Halk Müziği ☐ Türk Sanat Müziği ☐ Klasik Türk Müziği ☐ Diğer

İpek, arkadaşlarına yaptığı anketten elde ettiği diğer seçeneği dışındaki verileri analiz etmek için aşağıdaki tablolara yazıyor.

Öğrenci	Film Türü	Müzik Türü
1. öğrenci	Bilim Kurgu	Türk Sanat Müziği
2. öğrenci	Macera	Klasik Türk Müziği
3. öğrenci	Macera	Türk Sanat Müziği
4. öğrenci	Komedi	Türk Halk Müziği
5. öğrenci	Macera	Türk Sanat Müziği
6. öğrenci	Bilim Kurgu	Türk Halk Müziği
7. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
8. öğrenci	Komedi	Klasik Türk Müziği
9. öğrenci	Bilim Kurgu	Türk Sanat Müziği
10. öğrenci	Macera	Türk Sanat Müziği
11. öğrenci	Macera	Klasik Türk Müziği
12. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
13. öğrenci	Komedi	Türk Halk Müziği
14. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
15. öğrenci	Komedi	Türk Sanat Müziği

Öğrenci	Film Türü	Müzik Türü
16. öğrenci	Komedi	Türk Halk Müziği
17. öğrenci	Macera	Türk Halk Müziği
18. öğrenci	Macera	Türk Halk Müziği
19. öğrenci	Macera	Türk Sanat Müziği
20. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
21. öğrenci	Komedi	Türk Sanat Müziği
22. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
23. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
24. öğrenci	Macera	Türk Halk Müziği
25. öğrenci	Komedi	Türk Halk Müziği
26. öğrenci	Komedi	Türk Halk Müziği
27. öğrenci	Macera	Türk Sanat Müziği
28. öğrenci	Bilim Kurgu	Türk Sanat Müziği
29. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği
30. öğrenci	Bilim Kurgu	Klasik Türk Müziği

İpek'in topladığı verileri iki yönlü sıklık tablolarını ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini kullanarak analiz ediniz. Analizi yaparken bağımsız değişkenin film tercihleri ve müzik tercihleri olduğu durumları ayrı ayrı inceleyiniz. Analiz sonuçlarını yorumlayarak araştırma sorusu bağlamında değerlendiriniz.

Çözüm

Toplanan verilere göre oluşturulan ve kategorilerinden biri tercih edilen film türü değişkenlerinden, diğeri tercih edilen müzik türü değişkenlerinden oluşan iki yönlü tablo Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6: *Film Tercihleri ile Müzik Tercihlerini Gösteren İki Yönlü Tablo*

Müzik Tercihi \ Film Tercihi	Bilim Kurgu	Macera	Komedi	Toplam
Türk Halk Müziği	1	3	5	9
Türk Sanat Müziği	3	5	2	10
Klasik Türk Müziği	8	2	1	11
Toplam	12	10	8	30

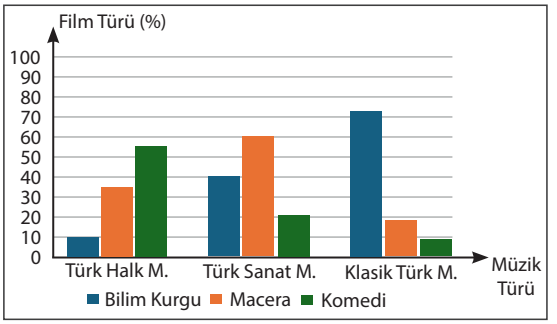
Tercih edilen müzik türüne göre film türlerinin göreli sıklık tablosu Tablo 7'deki gibi oluşturulur:

Tablo 7: *Müzik Tercihlerine Göre Film Tercihlerinin Yüzdesel Dağılımları*

Film Tercihi / Müzik Tercihi	Bilim Kurgu	Macera	Komedi	Toplam
Türk Halk Müziği	$\frac{1}{9} \cdot 100 \approx 11$	$\frac{3}{9} \cdot 100 \approx 33$	$\frac{5}{9} \cdot 100 \approx 56$	%100
Türk Sanat Müziği	$\frac{3}{10} \cdot 100 = 30$	$\frac{5}{10} \cdot 100 = 50$	$\frac{2}{10} \cdot 100 = 20$	%100
Klasik Türk Müziği	$\frac{8}{11} \cdot 100 \approx 73$	$\frac{2}{11} \cdot 100 \approx 18$	$\frac{1}{11} \cdot 100 \approx 9$	%100

Tablo 7'deki koşullu göreli sıklıklara göre oluşturulan kümeli sütun grafiği Grafik 2.5'teki gibidir:

Türk sanat müziği dinleyenler arasında macera filmi sevenlerin oranı daha yüksekken (%50), klasik Türk müziği dinleyenlerde bilim kurgu filmi tercih edenlerin oranı yaklaşık olarak %73'tür. Türk halk müziği dinleyenler arasında ise komedi filmi sevenlerin oranı yaklaşık olarak %55'tir.



Grafik 2.5: *Müzik Türüne Göre Film Türü Dağılımı*

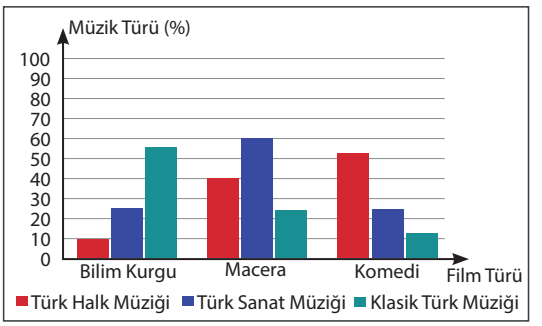
Tercih edilen film türlerine göre müzik türlerinin göreli sıklık tablosu Tablo 8'deki gibi oluşturulur:

Tablo 8: *Film Tercihlerine Göre Müzik Tercihlerinin Yüzdesel Dağılımları*

Film Tercihi / Müzik Tercihi	Bilim Kurgu	Macera	Komedi
Türk Halk Müziği	$\frac{1}{12} \cdot 100 \approx 9$	$\frac{3}{10} \cdot 100 = 30$	$\frac{5}{8} \cdot 10 = 62,5$
Türk Sanat Müziği	$\frac{3}{12} \cdot 100 = 25$	$\frac{5}{10} \cdot 100 = 50$	$\frac{2}{8} \cdot 100 = 25$
Klasik Türk Müziği	$\frac{8}{12} \cdot 100 \approx 66$	$\frac{2}{10} \cdot 100 = 20$	$\frac{1}{8} \cdot 100 = 12,5$
Toplam	%100	%100	%100

Tablo 8'deki koşullu göreli sıklıklara göre oluşturulan kümeli sütun grafiği Grafik 2.6'daki gibidir:

Bilim kurgu filmi tercih eden öğrencilerin yaklaşık %66'sı klasik Türk müziği tercih etmektedir, bu durum bilim kurgu filmi sevenlerin çoğunlukla klasik Türk müziğine eğilim gösterdiğine işaret eder. Macera filmi tercih edenlerde ise Türk sanat müziği en çok tercih edilen (%50) müzik türüyken Türk halk müziği ve klasik Türk müziği yakın oranlarda tercih edilmiştir. Komedi filmi tercih edenlerde ise Türk halk müziğinin baskın (%62,5) olduğu görülmektedir.



Grafik 2.6: *Film Türüne Göre Müzik Türü Dağılımı*

Bu analiz sonucunda belirli film türü tercihleri ile müzik türü tercihleri arasında bir ilişki olduğu söylenebilir. Örneğin bilim kurgu filmi tercih edenlerin daha çok klasik Türk müziği seçme eğiliminde olması veya komedi filmi tercih edenlerin Türk halk müziği daha fazla tercih etmesi gibi sonuçlar gözlemlenmiştir. Bu ilişki bir nedensellik anlamına gelmez başka bir deyişle film türü tercihinin müzik türü tercihine neden olduğu veya tam tersi iddia edilemez. Bu tür analizler yalnızca eğilimleri ve ilişki durumlarını gösterir.

4. Sıra Sizde

Turizm sektörü bir ülkenin ekonomik ve sosyal kalkınmasında önemli bir rol oynar. Türkiye sahip olduğu tarihî ve doğal zenginliklerden dolayı turizm potansiyeli yüksek bir ülkedir. Türkiye Yüzyılı projeleri kapsamında "Turizm Yüzyılı" programı oluşturulmuştur. Bu programa göre turizmin ülkeye sağladığı katkıları artırmak ve sürdürülebilir bir şekilde geliştirmek için tanıtım çalışmaları, altyapı yatırımları ve alternatif turizm türlerinin desteklenmesi gibi çeşitli faaliyetler yapılmaktadır.

Bu doğrultuda T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığınca bölgelerin öne çıkan turizm özelliklerine uygun fuarlar ve festivaller düzenlenmesi, yerel efsaneler ile hikâyelerin kültürel ve sanatsal alanda işlenmesi, coğrafi işaret tescilli ürün sayısının artırılması gibi uygulamalar hayata geçirilmektedir.

Bu proje kapsamında seyahat şirketlerine eğitimler verilerek ülkedeki turizmin çeşitlendirilmesi ve bütün bir yıla yayılması amaçlanmaktadır.

Seyahat şirketi işleten Metin, müşterileriyle hem konum (tarihî yerler, doğal oluşumlar, şehir turları) hem de etkinlik (yürüyüş, kamp, eğlence) tercihlerini belirlemek üzere görüşmeler yaparak her bir müşterinin tercihlerini kayıt altına almıştır. Metin, yaptığı görüşmeler sonunda 30 müşterisinden aldığı yanıtlara göre aşağıdaki tabloları oluşturmuştur.

Müşteri	Konum Tercihi	Etkinlik Tercihi
1. müşteri	Tarihî	Yürüyüş
2. müşteri	Şehir	Eğlence
3. müşteri	Tarihî	Yürüyüş
4. müşteri	Doğal	Kamp
5. müşteri	Şehir	Eğlence
6. müşteri	Şehir	Eğlence
7. müşteri	Tarihî	Kamp
8. müşteri	Doğal	Kamp
9. müşteri	Doğal	Kamp
10. müşteri	Tarihî	Yürüyüş
11. müşteri	Tarihî	Eğlence
12. müşteri	Tarihî	Yürüyüş
13. müşteri	Doğal	Yürüyüş
14. müşteri	Tarihî	Eğlence
15. müşteri	Doğal	Kamp

Müşteri	Konum Tercihi	Etkinlik Tercihi
16. müşteri	Şehir	Yürüyüş
17. müşteri	Doğal	Yürüyüş
18. müşteri	Tarihî	Eğlence
19. müşteri	Tarihî	Kamp
20. müşteri	Şehir	Eğlence
21. müşteri	Tarihî	Eğlence
22. müşteri	Şehir	Eğlence
23. müşteri	Şehir	Yürüyüş
24. müşteri	Tarihî	Kamp
25. müşteri	Doğal	Kamp
26. müşteri	Tarihî	Yürüyüş
27. müşteri	Doğal	Yürüyüş
28. müşteri	Şehir	Yürüyüş
29. müşteri	Doğal	Kamp
30. müşteri	Tarihî	Kamp

Metin, tablolardaki verilerden hareketle "Kişilerin konum tercihleri ile etkinlik tercihleri arasında bir ilişki var mı?" sorusu üzerinden bir rapor hazırlamak istemektedir.

Buna göre tablolardaki verileri iki yönlü sıklık tabloları ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini kullanarak analiz ediniz. Analizi yaparken bağımsız değişkenin konum tercihleri ve etkinlik tercihleri olduğu durumları ayrı ayrı inceleyiniz. Analiz sonuçlarını yorumlayarak araştırma sorusu bağlamında değerlendirmenizi yapınız.

Performans Görevi

Adı:	İki Kategorik Değişken Arasındaki İlişkinin Araştırılması
Beklenen Performans:	• İki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi incelemek için istatistiksel araştırma süreci uygulama. • İstatistiksel tablolardan faydalanarak ilişkili olup olmadığını analiz etme. • Analiz sonuçlarını bir rapor hâlinde sunma ve sınıf içi tartışmalarda neden-sonuç ilişkilerini değerlendirme.
Görev:	İki kategorik değişken seçerek bu değişkenler arasındaki ilişkiyi araştırmanız istenmektedir. Verileri sınıf arkadaşlarınızdan, aile bireylerinizden ya da çevrenizden toplayabilirsiniz. Topladığınız verileri analiz ederek çapraz tablolar oluşturup yüzdeler ve oranlar üzerinden değişkenler arasındaki ilişkiyi değerlendirmeniz beklenmektedir. Elde ettiğiniz sonuçları raporlamanız ve sınıfta tartışmanız istenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Öğretmeniniz rehberliğinde sınıfınızda 4 kişilik bir çalışma grubu oluşturunuz. • Grupça bir çalışma planı oluşturunuz. Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. • Grup üyelerinizle bir iş bölümü yaparak herkesin görev almasını sağlayınız. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. • Araştırma yaparken veya dijital ortamda çalışırken ihtiyaç duyduğunuzda öğretmeninizden yardım alabilirsiniz. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Çalışma sürecinde ekip arkadaşlarınızla iletişiminizi karşılıklı saygı çerçevesinde sürdürünüz. • Grupça ilgi duyduğunuz bir konuda iki kategorik değişkenli veriye dayalı, istatistiksel araştırma gerektiren bir bağlam belirleyiniz. • Belirlediğiniz bağlama yönelik iki kategorik değişken arasındaki ilişkililiğe odaklanan bir araştırma sorusu oluşturunuz. • Veri toplama planınızı hazırlayınız. • Verileri toplayınız ve analize hazır hâle getiriniz. • Araştırma sorularınız doğrultusunda topladığınız verileri analiz etmek için uygun görselleştirme veya özetleme araçlarını seçiniz. • Seçtiğiniz araçlarla verilerinizi analiz ediniz. • Elde ettiğiniz bulguları yorumlayarak sonuçlar çıkarınız. • Elde ettiğiniz sonuçları araştırma sorunuzun doğrultusunda yorumlayınız. • İstatistiksel araştırma sürecinizin tamamını rapor hâline getirerek sınıfınızdaki diğer gruplara sununuz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız. • Çalışmanızla ilgili sorulara açık olunuz ve açıklamalarınızı net bir şekilde yapmaya çalışınız. • Sunumlar sırasında diğer grupların farklı çıkarımlarını dinleyerek kendi analizlerinizle kıyaslayınız. • Elde ettiğiniz sonuçların diğer grupların sonuçları ile olan benzerlik ve farklılıklarının nedenleri üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

Değerlendirme:	• Aşağıdaki karekodlarda verilen akran değerlendirme formu ile sınıf arkadaşlarınızı, grup değerlendirme formu ile de grup arkadaşlarınızı değerlendiriniz. • Performans göreviniz, öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda yer alan analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Grup değerlendirme formu

Akran değerlendirme formu

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Kontrol Noktası

İki Kategorik Değişken: Ortak özelliklerine göre gruplanan, belli kategoriler altında toplanan verilerdir. Örnek olarak kişilerin cinsiyetlerine göre kadın veya erkek, eğitim düzeylerine göre ilköğretim, ortaöğretim veya üniversite mezunu gibi gruplandırılması gösterilebilir.

İki Yönlü (Çapraz) Tablo: İki yönlü tablo, iki kategorik değişkenin bir arada sunulmasını sağlayan bir tablo türüdür. Bu tablo, her bir değişkenin farklı kategorilerinin birbiriyle nasıl ilişkili olduğunu gösterir. Tabloda satırlar bir değişkenin kategorilerini, sütunlar ise diğer değişkenin kategorilerini temsil eder.

İlişkililik: İki değişkenin birbirine bağımlı veya bağımsız olup olmadığını ifade eder. İlişkili iki kategorik değişken, bir değişkendeki farklı kategorilerin diğer değişkenin kategorileri ile belirli bir örüntüde ilişki gösterdiği anlamına gelir. İki kategorik değişkenin ilişkili olması, bu iki değişken arasında bir neden-sonuç ilişkisi olduğu anlamına gelmez.

Değişebilirlik: İstatistiksel araştırmalarda değişebilirlik, veri setindeki farklı kategorilerin veya grupların çeşitliliğini ve dağılımını ifade eder. Kategorik veri analizinde değişebilirlik, belirli bir değişkenin farklı kategorileri arasında nasıl dağıldığını ve bu dağılımın diğer değişkenlere göre nasıl değiştiğini incelemeye olanak tanır.

Göreli Sıklıklar: Göreli sıklıklar, bir kategorik değişkenin belirli bir değerinin, toplam gözlem sayısına oranını gösterir. İki yönlü tabloda her hücredeki frekans değeri, toplam gözlem sayısına bölünerek hesaplanır. Bu oranlar, verilerin genel dağılımını daha anlaşılır hâle getirir ve farklı kategoriler arasındaki karşılaştırmaları kolaylaştırır.

Koşullu Göreli Sıklıklar: Koşullu göreli sıklıklar, belirli bir kategoriye sahip verilerin, diğer bir kategoriye göre dağılımını gösterir. İki yönlü tabloda her bir hücredeki değerler, toplam değerlere göre oranlanarak bu sıklıklar hesaplanır. Koşullu göreli sıklıklar, belirli bir kategori altında diğer kategorilerin göreli dağılımını görmemizi sağlar ve böylece iki değişken arasındaki ilişkililiği daha net bir şekilde ortaya koyar.

Kümeli Sütun Grafiği: Kümeli sütun grafiği, iki kategorik değişkenin karşılaştırmasını görsel olarak sunmak için kullanılan bir grafik türüdür. Bu grafiklerde her bir kategori için sütunlar kümelenmiş olarak gösterilir, böylece her bir kategori arasındaki dağılım farklılıkları görsel olarak ortaya çıkar.

Konu ile ilgili video

Alıştırmalar

1. Coğrafi işaret tescili; belirli bir bölgeye, yöreye veya ülkeye özgü olan ve o yerin adıyla özdeşleşmiş ürünlerin tescil edilerek korunmasını amaçlayan bir sistemdir. Tescil, ürünlerin kalitesinin korunması, sahteciliğin önlenmesi ve ürünün pazarlanma değerinin artırılması açısından büyük önem taşır. Türkiye'de 1995 yılında yürürlüğe giren "Sınai Mülkiyet Kanunu" ve "Coğrafi İşaretlerin Korunması Hakkında Kanun Hükmünde Kararname" ile coğrafi işaretler yasal bir çerçeveye oturtulmuştur. TÜRKPATENT'in yürüttüğü süreçler sayesinde yerel ürünlerin dünya çapında tanınması sağlanmakta ve kültürel miras korunmaktadır.

Tablo: *Ürünlerin Festival ve Coğrafi İşaret Durumu*

Ürün	Festival Var mı? (Evet / Hayır)	Coğrafi İşaret Tescili Var mı?(Evet / Hayır)
Antep Fıstığı	Evet	Evet
Edremit Zeytinyağı	Evet	Evet
Aydın İnciri	Evet	Evet
İzmir Boyozu	Evet	Evet
Kayseri Pastırması	Evet	Evet
Afyon Sucuğu	Evet	Evet
Maraş Dondurması	Evet	Evet
Ege Zeytini	Hayır	Evet
Giresun Fındığı	Hayır	Evet
Çorum Leblebisi	Evet	Evet
Gaziantep Baklavası	Evet	Evet
Akhisar Zeytini	Hayır	Evet
Erzurum Civil Peyniri	Evet	Evet
Kastamonu Pastırması	Evet	Hayır
Çanakkale Domatesi	Evet	Evet
Datça Bademi	Evet	Evet
Kars Kaşarı	Evet	Evet
Susurluk Ayranı	Evet	Hayır
Anamur Muzu	Evet	Evet
Balıkesir Höşmerimi	Evet	Evet
Edirne Ciğeri	Evet	Evet
Trabzon Vakfıkebir Ekmeği	Evet	Evet
Karadeniz Mısır Ekmeği	Hayır	Hayır
Malatya Kayısısı	Evet	Evet
Manisa Mesir Macunu	Evet	Evet
Beypazarı Kurusu	Hayır	Evet
Siirt Fıstığı	Hayır	Hayır
Tarsus Humusu	Hayır	Hayır
Hatay Künefesi	Evet	Evet
Sinop Nokulu	Hayır	Hayır

2. Tema alıştırma ek soruları

Diyarbakır'da Kültür, Sanat ve Karpuz Festivali'ne katılan bir grup lise öğrencisi bu festivalde yapılan konuşmalar neticesinde Diyarbakır karpuzunun coğrafi işaret tesciline sahip bir ürün olduğunu öğrenmiştir. Bunun üzerine öğrenciler Türkiye'de festivali yapılan ürünler ile coğrafi işaret tesciline sahip olan ürünler üzerine bir araştırma yaparak ürünlerin festival ve coğrafi işaret durumunu gösteren tabloda 30 ürün için verilen bilgilere ulaşmıştır.

Buna göre

a) İki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren araştırma sorusu yazınız. Sorunuzu yazarken istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini dikkate alınız.

b) Sorunuzu sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Karekodda yer alan kontrol formu ile sınıf arkadaşlarınızın sorularının istatistiksel araştırma soruları ölçütlerine uygun olup olmadığını değerlendiriniz. Değerlendirmelerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

İstatistiksel araştırma sorusu ölçütleri kontrol formu

c) Sınıfça üzerinde tartıştığınız ve uzlaştığınız araştırma sorunuzu yazınız. İlk yazdığınız soru ile sınıfça uzlaşarak yazdığınız soru arasındaki benzerlik ve farklılıkları değerlendiriniz.

ç) Tablodaki verilerin elde edilebilmesi için nasıl bir veri toplama planı hazırlanmıştır? Fikrinizi yazınız.

Plan:

d) Planınızı sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Sınıf arkadaşlarınızın sunduğu planları karekoddaki kontrol formunda verilen veri toplama planında bulunması gereken özellikler açısından değerlendiriniz. Değerlendirmelerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Sınıfça üzerinde uzlaştığınız veri toplama planını yazınız.

Veri toplama planı kontrol formu

e) Sınıfça uzlaştığınız istatistiksel araştırma sorusuna cevap bulabilmek için uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçerek veri analizlerini yapınız.

f) Analiz sonuçlarını yorumlayarak araştırma sorunuza cevap veriniz.

g) Bulunduğunuz bölgedeki coğrafi işaret tescili olan ürünleri ve festivalleri belirleyerek yukarıda yaptığınız istatistiki araştırmayı tekrarlayınız ve ulaştığınız sonuçları karşılaştırınız.

2. Bir araştırmacı grubu, 30 farklı hayvan türünün dört farklı özelliğini ele alarak bu özellikleri aşağıdaki tabloya işlemiştir. Bu tablo, her hayvanın Yaşam Alanı (Karada/Suda), Beslenme Türü (Etçil/Otçul), Gövde Kaplaması (Tüy/Deri) ve Yumurtlama (Evet/Hayır) özelliklerini göstermektedir.

Hayvan Türü	Yaşam Alanı (Karada/Suda)	Beslenme Türü (Etçil/Otçul)	Gövde Kaplaması (Tüy/Deri)	Yumurtlama (Evet/Hayır)
Aslan	Karada	Etçil	Tüy	Hayır
Yunus	Suda	Etçil	Deri	Hayır
Fil	Karada	Otçul	Deri	Hayır
Baykuş	Karada	Etçil	Tüy	Evet
Timsah	Suda	Etçil	Deri	Evet
Ayı	Karada	Etçil	Tüy	Hayır
Köpek Balığı	Suda	Etçil	Deri	Evet
Kartal	Karada	Etçil	Tüy	Evet
İnek	Karada	Otçul	Deri	Hayır
Su Samuru	Suda	Etçil	Deri	Hayır
Zürafa	Karada	Otçul	Deri	Hayır
Penguen	Suda	Etçil	Tüy	Evet
Balina	Suda	Etçil	Deri	Hayır
Su Kaplumbağası	Suda	Otçul	Deri	Evet
Kurt	Karada	Etçil	Tüy	Hayır
Akbaba	Karada	Etçil	Tüy	Evet
Tavşan	Karada	Otçul	Tüy	Hayır
Somon	Suda	Otçul	Deri	Evet
Deve	Karada	Otçul	Deri	Hayır
Yılan	Karada	Etçil	Deri	Evet
Kanguru	Karada	Otçul	Deri	Hayır
Balıkçıl Kuş	Karada	Etçil	Tüy	Evet
Semender	Suda	Etçil	Deri	Evet
Çita	Karada	Etçil	Tüy	Hayır
Denizatı	Suda	Otçul	Deri	Evet
Leylek	Karada	Etçil	Tüy	Evet
Karınca	Karada	Otçul	Deri	Evet
Kurbağa	Suda	Otçul	Deri	Evet
Kertenkele	Karada	Etçil	Deri	Evet
İguana	Karada	Otçul	Deri	Evet

Buna göre

a) Herhangi iki özellik için iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren araştırma sorusu yazınız. Sorunuzu yazarken istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini dikkate alınız.

b) Sorunuzu sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Karekodda yer alan kontrol formu ile sınıf arkadaşlarınızın sorularının istatistiksel araştırma soruları ölçütlerine uygun olup olmadığını değerlendiriniz. Değerlendirmelerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

İstatistiksel araştırma sorusu ölçütleri kontrol formu

c) Sınıfça üzerinde tartıştığınız ve uzlaştığınız araştırma sorunuzu yazınız. İlk yazdığınız soru ile sınıfça uzlaşarak yazdığınız soru arasındaki benzerlik ve farklılıkları değerlendiriniz.

ç) Tablodaki verilerin elde edilebilmesi için nasıl bir veri toplama planı hazırlanmıştır? Fikrinizi yazınız.

Plan:

d) Planınızı sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Sınıf arkadaşlarınızın sunduğu planları karekoddaki kontrol formunda verilen veri toplama planında bulunması gereken özellikler açısından değerlendiriniz. Değerlendirmelerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Sınıfça üzerinde uzlaştığınız veri toplama planını yazınız.

Veri toplama planı kontrol formu

e) Sınıfça uzlaştığınız istatistiksel araştırma sorusuna cevap bulabilmek için uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçerek veri analizlerini yapınız.

f) Analiz sonuçlarını yorumlayarak araştırma sorunuza cevap veriniz.

2.2. BAŞKALARI TARAFINDAN OLUŞTURULAN İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİLERİN İLİŞKİLİLİĞİNE DAYALI İSTATİSTİKSEL SONUÇ VEYA YORUMLARI TARTIŞMA

Konuya Başlarken

Barış çevrim içi alışveriş platformlarındaki kullanıcı yorumlarını inceleyerek alacağı ürüne dair bilinçli bir karar vermek istemektedir. Kullanıcıların ürün hakkındaki olumlu ve olumsuz değerlendirmelerinin yanı sıra genel memnuniyet, ürünün beğenilme ve tavsiye edilme durumlarını da göz önünde bulundurarak bir analiz yapmayı planlamaktadır. Bu amaçla Barış, sosyal medya platformları ve e-ticaret sitelerinden veri toplamaya başlamış ve araştırma sürecinde bazı çelişkilerle karşılaşmıştır. Elde ettiği verilere göre sosyal medya platformlarında A marka ürüne dair olumlu yorumların ön planda olduğunu, e-ticaret sitelerinde B marka ürünün daha çok tercih edildiğini gözlemlemiştir. Bu farklılık, Barış'ı başkaları tarafından oluşturulan iki kategorik değişkenli veri dağılımlarının sonuçları hakkında daha eleştirel bir analiz yapmaya yönlendirmiştir.

Metne göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

1. **Sosyal medya platformları ve e-ticaret sitelerindeki kullanıcı yorumlarının farklılıklarının nedenleri neler olabilir? Bu farklılıkların hangi faktörlere bağlı olabileceğini söyleniz.**
2. **Sosyal medya ve e-ticaret kullanıcıları yorum yaparken hangi eğilimlerde bulunabilir? Bu eğilimlerin, yorumların içeriğini nasıl etkileyebileceğini söyleyiniz.**
3. **Sosyal medya ve e-ticaret yorumlarındaki memnuniyet ifadelerinin nasıl farklılık gösterebileceğini açıklayınız. Bu farklılıkların analiz sürecini nasıl etkileyebileceğini söyleyiniz.**
4. **Barış'ın, sosyal medya ve e-ticaret yorumlarındaki çelişkileri değerlendirirken hangi yanlılıkları dikkate alması gerektiğini söyleyiniz.**
5. **Kullanıcı kitlesi ve platform özellikleri, kullanıcı yorumlarının niteliğini nasıl etkileyebilir? Bu durumun, verilerin yorumlanmasını nasıl zorlaştıracağını söyleyiniz.**
6. **Barış'ın bu iki farklı platformdaki verileri karşılaştırırken nelere dikkat etmesi gerektiğini söyleyiniz ve örneklerle açıklayınız.**
7. **Sosyal medya ve e-ticaret sitelerinde memnuniyet ve tavsiye ifadelerinin farklı sunulmasının, Barış'ın analizinde nasıl bir zorluk oluşturabileceğini söyleyiniz.**

İki kategorik değişkenli verilerin analizi, istatistiksel çalışmaların önemli bir kısmını oluşturur. Bu tür verilerle yapılan analizler, belirli kategoriler arasındaki ilişkileri anlamak için kullanılır. Başkaları tarafından oluşturulan veri dağılımlarına dayalı sonuç veya yorumlar, doğru bir şekilde değerlendirilmezse yanlış yönlendirmelere neden olabilir. Bu nedenle bu tür analizlere eleştirel bir gözle bakmak ve yapılan yorumların geçerliliğini sorgulamak büyük önem taşır.

6. Uygulama

Başkaları Tarafından Oluşturulan İki Kategorik Değişkenli Verilerin İncelenmesi

Bir ülkede yaklaşan başkanlık seçimleri için iki farklı anket şirketi, seçmenlerin aday tercihlerini cinsiyete göre analiz eden anketler yapmıştır. Şirketler, Aday A ve Aday B'yi tercih eden seçmenlerin cinsiyetlerine göre dağılımını gösteren göreli sıklık tabloları hazırlamıştır. Şirketlerin sonuçları şu şekildedir:

Cinsiyet / Aday	Erkek	Kadın
Aday A	0,46	0,51
Aday B	0,47	0,48
Diğer	0,07	0,01

1. Anket Şirketinin Sonuçları

Cinsiyet / Aday	Erkek	Kadın
Aday A	0,49	0,48
Aday B	0,45	0,50
Diğer	0,06	0,02

2. Anket Şirketinin Sonuçları

Buna göre

1. İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak anket şirketlerinin sonuçlarını inceleyiniz. Bu sonuçlardaki iki kategorik değişkenli verilerin (cinsiyet ve aday tercihi) ilişkililiği üzerine istatistiksel değerlendirme yapınız.

2. Anket şirketlerindeki sonuçların farklılığına yol açabilecek varsa olası hataların veya yanlılıkların neler olabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
3. Tespit ettiğiniz hatalar veya yanlılıklar varsa bunları çürütmek için neler yapabileceğinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

5 . Örnek

Bir halk sağlığı uzmanı, insanların gece yemek yemesi ile kilo alma durumu arasında bir ilişki bulmuş ve gece yemek yiyenlerin daha fazla kilo aldığı sonucuna ulaşmıştır. Yapılan araştırmalar sonucu elde edilen veriler aşağıdaki iki yönlü tabloda verilmiştir.

Kilo Alımı / Gece Yemeği	Alan	Almayan	Toplam
Yiyen	50	30	80
Yemeyen	20	50	70
Toplam	70	80	150

Buna göre

a) Uzmanın yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Açıklayınız.

b) Uzmanın yaptığı çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Sonuçta tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğru sonucu yazınız.

Çözüm

a) Uzmanın yaptığı çıkarım, gece yemek yiyenler ile yemeyenlerin kilo alma durumu arasındaki verilere dayanmaktadır. Uzman, gece yediği için 50 kişinin kilo aldığını fakat 30 kişinin kilo almadığını buna karşın gece yemediği hâlde 20 kişinin kilo aldığını ancak 50 kişinin kilo almadığını tespit etmiştir. Bu dağılıma dayanarak gece yemek yiyenlerde kilo alma oranının daha yüksek olduğunu ve dolayısıyla gece yemek yemenin fazla kiloya neden olduğu sonucuna varmıştır.

b) Araştırmacının çıkarımı bazı hatalar içermektedir. Bu hatalardan bazıları şunlardır:

1. **Nedensellik Yanılgısı:** Gece yemek yemek ile kilo alma arasında bir ilişki bulunsa bile bu durum gece yemek yemenin doğrudan kilo almaya neden olduğunu göstermez. Kilo almayı etkileyen faktörler sadece yemek saati ile ilgili değildir; günlük toplam kalori alımı, besin türleri, metabolizma hızı, fiziksel aktivite gibi başka birçok değişken de kilo alımını etkileyebilir.
2. **Eksik Değişken Yanlılığı:** Kilo alımını etkileyen diğer değişkenler (diyet alışkanlıkları, gün içerisindeki toplam kalori miktarı, fiziksel aktivite düzeyi, uyku düzeni vb.) dikkate alınmamıştır. Gece yemek yemeyen kişilerin yaşam tarzı, beslenme şekli veya metabolik özellikleri de gece yemek yiyenlerden farklı olabilir ve bu durum sonuçlara yansımış olabilir.
3. **Seçim Yanlılığı:** Verilerde gece yemek yemeyenlerin kilo durumu hakkında tam bir temsil durumu olmayabilir. Gece yemek yemeyen gruptaki bireylerin daha aktif, diyetine özen gösteren veya kilo kontrolü yapan kişiler olması mümkün olduğundan bu durum verileri yanıltıcı bir biçimde etkileyebilir.

c) Araştırmacı, yalnızca iki kategori arasında gözlemlenen dağılımdan yola çıkarak nedensel bir ilişki kurmuş ve diğer etkileyici faktörleri göz ardı etmiştir. Gece yemek yeme alışkanlığı tek başına kilo almanın doğrudan bir sebebi olamaz, kilo alımını etkileyen daha fazla faktör dikkate alınmalıdır.

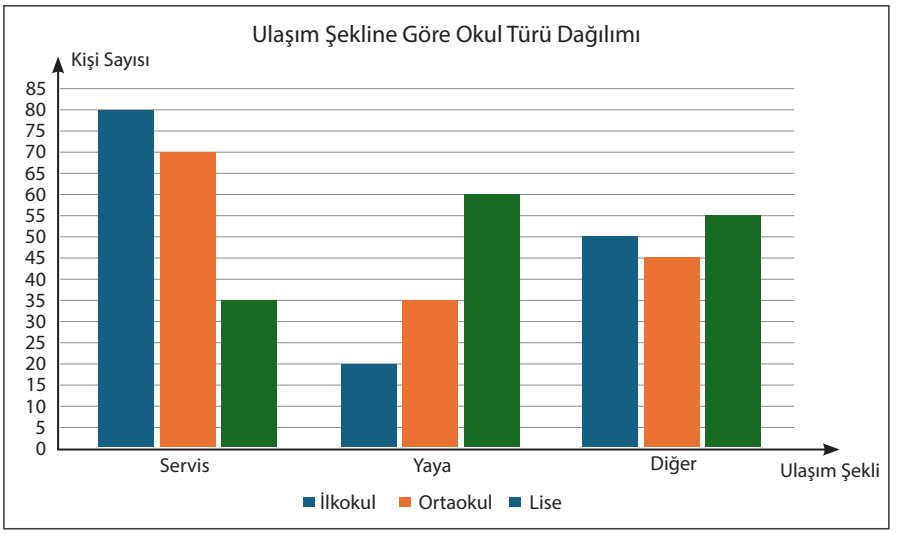
Doğru bir analiz yapabilmek için araştırmacının yalnızca gece yemek yeme durumu ile kilo durumu arasındaki ilişkiye değil gün içerisinde yapılan fiziksel aktivite seviyesi, uyku düzeni ve gün boyunca alınan diğer öğünlerin içeriği gibi başka faktörleri de göz önünde bulundurması gerekir. Bu şekilde yapılacak çok değişkenli analizler, gece yemek yemenin kilo alma üzerindeki bağımsız etkisini daha doğru bir şekilde ölçmeye imkân tanır.

Doğru bir ifade şu şekilde olabilir:

"Veriler, gece yemek yiyen bireylerin daha çok kilo alma eğiliminde olduğunu gösterse de bu durum doğrudan gece yemeği yeme alışkanlığından kaynaklanıyor demek için yeterli değildir. Kilo alımını etkileyen diğer faktörler de göz önünde bulundurulmalıdır."

5. Sıra Sizde

Bir eğitim bilimci öğrencilerin okula ulaşım şekli (Servis, Yaya, Diğer) ile okuduğu eğitim kademesi (İlkokul, Ortaokul, Lise) arasındaki ilişkiyi incelediği araştırmasından elde ettiği veriler ile aşağıdaki kümeli sütun grafiğini oluşturmuştur.



Eğitim bilimci yaptığı araştırma sonunda hazırladığı raporda "İlkokul ve ortaokul düzeyinde öğrenciler servisi daha çok tercih ederken, lise düzeyindeki öğrenciler yaya veya diğer ulaşım yöntemlerini tercih etmektedir. Bu durum, yaş ilerledikçe öğrencilerin bağımsız hareket etmeye başladığını göstermektedir." çıkarımına ulaştığını belirtmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Eğitim bilimcinin yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Açıklayınız.

b) Eğitim bilimcinin yaptığı çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Sonuçta tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğrusunu yazınız.

Konu ile ilgili
çalışma kâğıdı

Kontrol Noktası

İki kategorik değişkenli verilere dayalı istatistiksel sonuç ve yorumların geçerliliğini değerlendirme süreci, istatistiksel yorumların doğruluğunu artırmak, yanlılığı minimize etmek ve elde edilen sonuçların güvenilirliğini sağlamak için kritik öneme sahiptir.

- **İstatistiksel Temellendirmeler**

  İki kategorik değişkenli verilere dayalı istatistiksel sonuç ve yorumların geçerliliğini değerlendirmek için analizlerin doğru temellere dayandırılıp dayandırılmadığı incelenir. Bu süreçte, kullanılan veri toplama yöntemi, örnekleme yöntemi, kullanılan analiz araçlarının uygunluğu ve yorumların elde edilen verilere dayalı olup olmadığı gibi unsurlar göz önünde bulundurulur.

- **Hatalar ve Yanlılıklar**

  İki kategorik değişkenli verilere dayalı sonuçlar incelenirken olası hatalar veya yanlılıkların tespit edilmesi önemlidir. Verilerin toplandığı süreçte örneklem yanlılığı, küçük örneklem büyüklüğü veya yanlış ölçüm gibi hatalar ilişkililik analizini yanıltabilir. Ayrıca analizde kullanılan görselleştirme araçlarının seçimi ya da yorumların varsayımlara dayalı olarak yapılması da yanlış çıkarımlara yol açabilir.

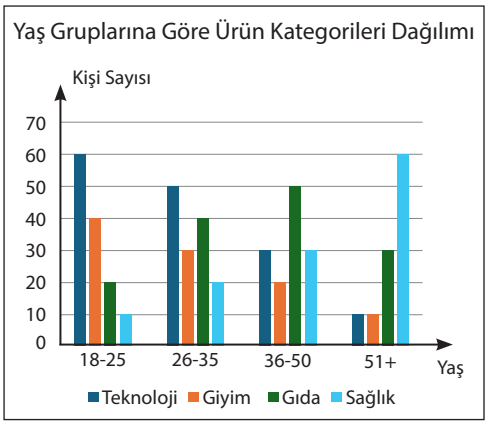
- **Sonuçların ve Yorumların Çürütülmesi veya Kabul Edilmesi**

  Elde edilen istatistiksel sonuç ve yorumlar, eldeki verilere ve yapılan analizlere dayalı olarak ya kabul edilir ya da çürütülür. Yorumlar, verilerin sunduğu bulgularla uyumluysa ve mantıksal temellere dayandırılıyorsa kabul edilebilir. Ancak yorumlarda mantık hataları, genelleme yanılgıları veya veri analizinde eksiklikler bulunuyorsa bu yorumlar çürütülür ve doğru analiz yöntemleriyle düzeltilir.

Konu ile ilgili
etkileşimli içerik

Alıştırmalar

1. Bir işletmeci, alışveriş merkezine gelen müşterilerin alışveriş eğilimlerini öğrenmek için müşterilerin yaş grupları ile tercih ettikleri ürün kategorileri arasındaki ilişkiyi incelemek üzere bir araştırmacıdan analiz istemiştir. Araştırmacı, verileri topladıktan sonra elde ettiği sonuçları kümeli sütun grafiğiyle sunmuştur.



İşletmeci, grafiği yorumlayarak "Genç müşteriler daha çok teknoloji ve giyim ürünleri tercih etmekte fakat ileri yaş grupları daha çok sağlık ve gıda ürünlerine yönelmektedir. Bu durumda yaş arttıkça teknoloji ve giyim alışverişi azalır, gıda ve sağlık alışverişi artar." şeklinde bir değerlendirmede bulunmuştur.

Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak grafikte yer alan dağılımı inceleyiniz. İşletmecinin yaptığı değerlendirmenin dayanağının ne olabileceğini açıklayınız.

b) İncelemeniz doğrultusunda yapılan değerlendirmeye yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Değerlendirmede tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğrusunu yazınız.

2. Bir okul yönetimi, öğrencilerin ders çalışma yöntemleri ile sınav başarıları arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla bir anket yapmıştır. Anket sonuçlarına göre öğrencilerin ders çalışma yöntemi (grup hâlinde çalışma/bireysel çalışma) ve son sınavda başarılı olma durumu (başarılı/başarısız) iki kategorik değişken olarak ele alınmıştır. Anket sonucunda elde edilen veriler aşağıdaki iki yönlü tabloda gösterilmiştir.

Başarı Durumu / Çalışma Yöntemi	Başarılı	Başarısız
Grup	80	20
Bireysel	50	50

Bu verilerden hareketle okul yönetimi, "Grup hâlinde çalışan öğrenciler bireysel çalışanlara göre daha başarılıdır." çıkarımını yapmıştır.

Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak tabloda yer alan dağılımı inceleyiniz. Okul yönetiminin yaptığı çıkarımın dayanağının ne olabileceğini açıklayınız.

b) İncelemeniz doğrultusunda yapılan çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğrusunu yazınız.

2. Tema alıştırma ek soruları

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

2. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 8 soru verilmiştir.

1. Bir deterjan firması, bulaşık makineleri için özel bir deterjan ve buna ek olarak kullanılması önerilen bir bulaşık parlatıcısı üretmektedir. Bu ürünlerin satıldığı bir mağazada müşteriler üzerinde yapılan değerlendirme sonuçları aşağıdaki iki yönlü tabloda verilmiştir.

Buna göre

Bulaşık Deterjanı / Parlatıcı	Alan	Almayan	Toplam
Alan	120		
Almayan			90
Toplam	140	110	

a) Tabloda boş bırakılan kısımları uygun şekilde doldurunuz.

b) İki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik bir istatistiksel araştırma sorusu yazınız.

c) Tablodaki verileri koşullu göreli sıklık tabloları ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini oluşturarak analiz ediniz ve analiz sonuçlarını araştırma sorusu bağlamında değerlendiriniz.

2. PISA (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) değerlendirmelerinde öğrencilerin okuma ve matematik testlerindeki başarıları, eğitimdeki beceri dağılımlarını ortaya koyan önemli göstergelerdir. Bir ilçede "PISA" testlerine katılan 15 yaş grubundaki öğrencilerin okuma ve matematik testlerindeki başarıları arasındaki ilişki incelenmektedir.

Bir uzman bu ilçede "PISA değerlendirmesine katılan öğrencilerin okuma becerileri testi başarısı ile matematik testi başarısı arasında bir ilişki var mıdır?" sorusundan hareketle istatistiksel bir araştırma yapmıştır. Uzman topladığı verilerle oluşturduğu aşağıdaki iki yönlü tabloyu kullanarak iki değişken arasındaki ilişkiyi değerlendirmek istemektedir.

Matematik Testi / Okuma Testi	Başarılı	Başarısız
Başarılı	45	15
Başarısız	20	30

Uzmanın topladığı verileri koşullu göreli sıklık tabloları ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini oluşturarak analiz ediniz ve analiz sonuçlarını araştırma sorusu bağlamında değerlendiriniz.

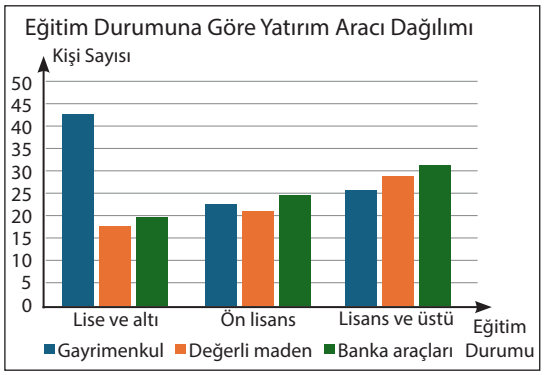
3. Öğrencilerin proje çalışmaları ve spor aktivitelerine katılım durumları arasındaki ilişki, gençlerin akademik performansını ve sosyal becerilerini geliştirmeleri açısından önemlidir. Yapılacak araştırmada bir lisedeki 9. sınıf öğrencilerinin proje çalışmalarına katılım ile spor aktivitelerine katılım durumu arasındaki ilişki incelenecektir. Çalışma, okul yönetimine ve eğitimcilere öğrenci gelişimi hakkında anlamlı geri bildirim sağlamayı amaçlamaktadır.

Araştırma için kişisel bilgilerin bulunmadığı çevrim içi bir anket formu oluşturulmuştur. Bu formda "Öğrencilerin Proje Çalışmalarına Katılım Durumu" (katılıyor/katılmıyor) ve "Öğrencilerin Spor Aktivitesine Katılım Durumu" (katılıyor/katılmıyor) olarak iki kategorik değişken üzerinden cevaplayacakları sorulara yer verilmiştir. Okulun tüm 9. sınıflarından rastgele 100 öğrenci seçilecektir. Anketler; eğitim yılının ilk döneminin sonunda, son sınavların ardından yapılarak öğretmen ve okul psikolojik danışma ve rehberlik birimi tarafından toplanacaktır. Anketten gelen veriler dijital bir veri tabanına kaydedilecek, ardından analiz için düzenli bir şekilde tabloya aktarılacaktır. Araştırmada öğrenci başarısı veya spor aktivitelerine katılım durumu temelinde herhangi bir yargıya varılmayacak ya da öğrenciler arasında ayrım yapılmayacaktır.

Verilen metinde yapılan istatistiksel araştırmayı veri toplama planında bulunması gereken ölçütler üzerinden yanda verilen kontrol formunu kullanarak değerlendiriniz. Metinde ölçüte karşılık gelen ifadeleri formdaki ilgili alanlara yazınız.

Veri Toplama Planı Ölçütleri	Metinde Karşılık Gelen İfadeler
Veri toplama aracı oluşturulmuştur veya belirlenmiştir. Evet: Hayır:	
Evren ve örneklem belirlenmiştir. Evet: Hayır:	
Örneklem belirlenirken rastgelelik sağlanmıştır. Evet: Hayır:	
Değişkenler belirlenmiştir. Evet: Hayır:	
Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağı belirlenmiştir. Evet: Hayır:	
Verilerin nasıl kaydedileceği belirlenmiştir. Evet: Hayır:	
Verilerin gizliliğinin sağlanmasıyla nesnel ve dürüst olunmasına yönelik önlemler alınmıştır. Evet: Hayır:	

4. Bir yatırım şirketi müşterilerinin eğitim durumlarıyla tercih ettikleri yatırım araçları arasında bir ilişki olup olmadığını anlamak için bir araştırma yaptırmıştır. Yapılan araştırmadan elde edilen verilere göre hazırlanan raporda aşağıdaki kümeli sütun grafiğine yer verilmiştir.



Şirket yetkilisi grafiği yorumlayarak "Eğitim seviyesi lise ve altı olan müşteriler daha çok gayrimenkul yatırımını tercih etmiş fakat eğitim seviyesi arttıkça müşteriler finansal araçlara yönelmiştir. Bu durumda eğitim seviyesi arttıkça gayrimenkul tercihi azalır, değerli maden ve banka araçları tercihi artar." şeklinde bir değerlendirmede bulunmuştur.

Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak grafikte yer alan dağılımı inceleyiniz. Şirket yetkilisinin yaptığı değerlendirmenin dayanağının ne olabileceğini açıklayınız.

b) İncelemeniz doğrultusunda yapılan değerlendirmeye yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Değerlendirmede tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğrusunu yazınız.

5. Beden eğitimi ve spor öğretmenliği bölümü öğrencisi, hazırlayacağı bir ödev için bazı kişilerle yaptığı görüşmeler sonucunda aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.

Cinsiyet (Erkek/Kadın)	Yaşam Alanı (Dağlık/Düzlük)	Spor Tercihi (Doğa/Salon)
Erkek	Düzlük	Doğa
Erkek	Dağlık	Doğa
Kadın	Düzlük	Salon
Kadın	Düzlük	Salon
Erkek	Düzlük	Salon
Kadın	Dağlık	Doğa
Erkek	Dağlık	Salon
Erkek	Düzlük	Doğa
Kadın	Dağlık	Doğa
Kadın	Dağlık	Doğa
Kadın	Düzlük	Salon
Erkek	Dağlık	Doğa
Kadın	Dağlık	Doğa
Kadın	Düzlük	Salon
Erkek	Düzlük	Doğa

Buna göre

a) Öğrencinin hangi araştırma sorusuna karşılık olarak bu tabloyu hazırlamış olabileceğini yazınız.

b) Oluşturduğunuz soruyu iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütlere göre incelemek için aşağıdaki kontrol formunda ilgili alanları doldurunuz.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	
Araştırmaya değer olmalıdır.	
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	
Veri toplanabilir olmalıdır.	
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	

6. Siber zorbalık; dijital ortamda (genel ağ, sosyal medya, mesajlaşma uygulamaları, oyun platformları vb.) bir kişi veya grup tarafından başka bir kişiye yönelik kasıtlı olarak zarar verici, tehdit edici, aşağılayıcı veya rahatsız edici davranışlar sergilenmesi durumudur. Geleneksel zorbalığın dijital dünyadaki yansımasıdır ve mağdurların psikolojik sağlığını ciddi şekilde etkileyebilir. Bir okuldaki öğrencilerin güvenli genel ağ kullanımı ve siber zorbalık farkındalıkları üzerine bir anket yapılmıştır. Anket sonuçlarına göre öğrenciler "genel ağ kullanımı (Güvenli/Güvensiz)" ve "siber zorbalık konusunda bilgi düzeyi (Yüksek/Düşük)" açısından iki kategoride sınıflandırılmıştır. Kategorilere göre öğrenci sayıları aşağıdaki iki yönlü tabloda verilmiştir.

Genel Ağ Kullanımı \ Bilgi Düzeyi	Yüksek	Düşük	Toplam
Güvenli	50	20	70
Güvensiz	10	40	50
Toplam	60	60	120

Bu verilerden faydalanarak okul yönetimi, "Genel ağı güvenli kullanan öğrencilerin siber zorbalık konusundaki bilgi düzeyi güvensiz kullanan öğrencilere göre daha yüksektir." çıkarımını yapmıştır.

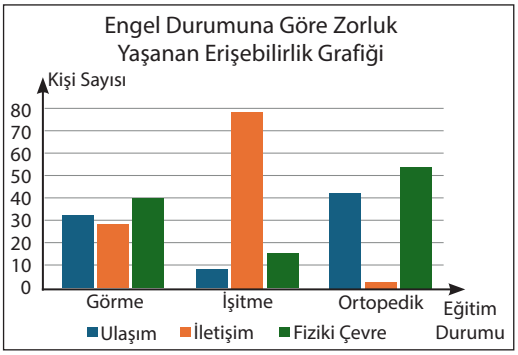
Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak tabloda yer alan dağılımı inceleyiniz. Okul yönetiminin yaptığı çıkarımın dayanağının ne olabileceğini açıklayınız.

b) İncelemeniz doğrultusunda yapılan çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa yazınız.

c) Çıkarıma yönelik tespit ettiğiniz hatalar/yanlılıklar varsa gerekçesini sunarak doğru çıkarımı yazınız.

7. Engelli bireylerin en önemli sorunlarından birisi erişilebilirlik problemidir. Engellilerin bağımsız ve güvenli bir şekilde hareketlilik sağlayabilmesi, istediği her yere ve hizmete ulaşabilmesi, bunları kullanabilmesi sağlanmalıdır. Bunun için Türkiye Yüzyılı projeleri kapsamında yapılı çevre, ulaşım sistemleri ve hizmetleri dâhil tüm kentsel hizmetlerde ve bilgi iletişim teknolojilerinde yönlendirici ve bilgilendirici tedbirlerin alınmasını sağlamak üzere "2030 Engelsiz Vizyon Belgesi" oluşturulmuştur.



Bir ilçenin belediye yetkilileri ilçedeki engelli bireylerin erişebilirlik konusunda yaşadıkları zorlukları tespit etmek istemektedir. Bu amaç doğrultusunda yetkililer "Bireylerin engel durumu (Görme/İşitme/Ortopedik) ile zorluk yaşanan erişebilirlik durumu (Ulaşım/İletişim/Fiziki Çevre) arasında nasıl bir ilişki vardır?" sorusu üzerinden istatistiksel bir araştırma yapmaya karar vermişlerdir. Yapılan araştırmaya göre elde edilen veriler ile yukarıdaki kümeli sütun grafiği oluşturulmuştur.

Verilen metin ve grafiğe göre aşağıdakilerden hangisine ulaşılamaz?

A) Araştırmada kullanılan iki değişken de kategoriktir.

B) Veriler, 2030 Engelsiz Vizyon Belgesinde belirtilen tedbirlerin alınması için kullanılabilir.

C) Görme ve ortopedik engelli bireyler için en büyük zorluk kaldırım düzenlemeleridir.

D) Araştırma sorusu açık ve net bir şekilde ifade edilmiştir.

E) İşitme engelli bireylerin iletişim konusunda yaşadığı zorluklar öncelikli çözülmelidir.

8. Bir mağaza yöneticisi müşterilerinin alışveriş eğilimlerini anlamak için 30 müşterisinin dört farklı özelliğini ele alarak bu özellikleri aşağıdaki tabloya işlemiştir. Bu tablo, her müşterinin Müşteri Cinsiyeti (Erkek/Kadın), Alışveriş Yöntemi (Çevrim içi/Mağaza), Ürün Kategorisi (Giyim/Elektronik) ve İade Durumu (İade edildi/İade edilmedi) bilgilerini göstermektedir.

Müşteri Cinsiyeti (Erkek/Kadın)	Alışveriş Yöntemi (Çevrim içi/Mağaza)	Ürün Kategorisi (Giyim/Elektronik)	İade Durumu (İade Edildi/ İade Edilmedi)
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Kadın	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Erkek	Mağaza	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Mağaza	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Mağaza	Elektronik	İade edildi.
Erkek	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Mağaza	Elektronik	İade edildi.
Kadın	Çevrim içi	Elektronik	İade edildi.
Erkek	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Kadın	Mağaza	Giyim	İade edildi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Kadın	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edildi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Kadın	Çevrim içi	Elektronik	İade edilmedi.
Erkek	Mağaza	Giyim	İade edilmedi.
Kadın	Çevrim içi	Giyim	İade edildi.
Erkek	Çevrim içi	Elektronik	İade edildi.

Buna göre

a) Herhangi iki özelliği kullanarak iki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik bir istatistiksel araştırma sorusu yazınız.

b) Oluşturduğunuz sorunun iki kategorik değişkenli istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütleri karşılayıp karşılamadığına karar veriniz. Fikirlerinizi altta verilen tablodaki ilgili yerlere yazınız.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Açık ve net olmalıdır.	
Araştırmaya değer olmalıdır.	
İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.	
Değişken açık bir şekilde görülmelidir.	
Veri toplanabilir olmalıdır.	
Değişebilirliği yansıtmalıdır.	
Odaklanılan grup, araştırma yapılmasına imkân vermelidir.	
Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.	

c) Tabloda sorunuza uygun olan verileri, sıklık tablolarını ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiklerini oluşturarak analiz ediniz. Analiz sonuçlarını araştırma sorusu bağlamında değerlendiriniz.

2. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

3. TEMA

SAYILAR

3.1. Bir Doğal Sayı ile Asal Çarpanları ve Bölenleri Arasındaki İlişkiler

3.2. En Büyük Ortak Bölen-En Küçük Ortak Kat

3.3. Bölünebilme Özelliklerini Kullanarak Kalan Bulma

Anahtar Kavramlar

- **aralarında asal**
- **asal sayı**
- **bölen**
- **bölme**
- **bölüm**
- **bölünebilme**
- **çarpan**
- **en büyük ortak bölen**
- **en küçük ortak kat**
- **kalan**
- **kat**
- **ortak bölen**
- **ortak kat**

Sembol ve Gösterimler

- EBOB
- EKOK

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, araştırma ödevi yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

3. Tema
Karekodu

3. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- bir doğal sayı ile asal çarpanları ve bölenleri arasındaki ilişkilere dair çıkarım yapabilmeniz,
- birden çok doğal sayının ortak bölenleriyle bunların en büyüğü ve ortak katlarıyla bunların en küçüğü arasındaki ilişkilere dair muhakeme yapabilmeniz,
- bir doğal sayının belirli doğal sayılara bölümünden kalanlarına dair muhakeme yapabilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

Matematiksel beceriler günlük yaşamda daha etkin olmayı ve analitik düşünebilmeyi sağlar, problem çözme ve mantıksal akıl yürütme kapasitesini artırır. Örneğin farklı uzunluklardaki kabloların eşit parçalara bölünmesi veya farklı sıklıklarla gerçekleşen olayların aynı anda tekrarlandığı zamanı bulmak gibi problemlerle günlük hayatta sıklıkla karşılaşılır. Bu gibi problemlerde doğal sayıların asal çarpanları ve bölenleri arasındaki ilişkilere dair çıkarımlar, en büyük ortak bölen ile en küçük ortak kat kavramları ve bir sayının belirli bir doğal sayıya bölümünden kalanın analizinin yapılması çözüme daha kolay ulaştırır.

Ön Değerlendirme

1. Anıl Bey; Ali, Ayça ve Aslı adında üç çocuğuna kitap okumaları için bir dijital kitap uygulaması satın alır. Bu uygulamaya kendi hesaplarından giriş yapabilmeleri için çocuklarından 210 sayısından yararlanarak birer şifre belirlemelerini ister.

- Ali, şifreyi 210 sayısının asal bölenlerini küçükten büyüğe doğru yan yana yazarak belirler.
- Ayça, şifreyi 210 sayını tam bölen rakamları küçükten büyüğe doğru yan yana yazarak belirler.
- Aslı önce 210 sayısını 2 ardışık sayının çarpımı hâlinde yazar. Daha sonra ardışık sayılardan büyüğünü küçük sayıya böler. Bölme işleminin sonucunda bulduğu bölen, bölüm ve kalanı yan yana yazarak şifreyi belirler.

Buna göre Ali, Ayça ve Aslı'nın oluşturduğu şifreleri bulunuz.

2. Bir manifaturacı dükkânında sattığı düğmeleri depolamak için farklı boyut ve bölmeden oluşan 3 adet kutu tasarlamıştır. Aşağıda kutuların üstten görünümü verilmiştir.

1. Kutu 3 x 2 **2. Kutu 3 x 3** **3. Kutu 2 x 5**

Manifaturacı kutulardaki her bölmeye eşit sayıda düğme koymak istemektedir.

Buna göre

a) Her kutuya iki yüz ellişer adet düğme yerleştirmek istediğinde her bölmeye kaç düğme koyabilir? Her bir kutuya yerleştirilemeyen kaç düğme kalır?

b) Manifaturacı elindeki düğmeleri sadece 1 ve 2. kutuya yerleştirmek ve hiç düğme artırmamak isterse eline en az kaç düğme almalıdır? Bu durumda 1 ve 2. kutudaki her bir bölmeye kaçar tane düğme yerleştirebilir? Sınıf arkadaşlarınızla problemin çözümü için nasıl bir strateji uygulayacağınızı tartışınız.

3. Bir sayının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına çözümleme denir. Murat, öğretmeninin sorduğu çarpma işleminin sonucunu bulmak için verilen sayıyı önce çözümlüyor sonra da her basamak değeri ile verilen sayıyı çarpıyor ve bulduğu çarpımları topluyor. Örneğin 2348 sayısının 3 ile çarpımının sonucunu bulmak için

$2348 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

$2000 \cdot 3 = 6000$

$300 \cdot 3 = 900$

$40 \cdot 3 = 120$

$8 \cdot 3 = 24$

$6000 + 900 + 120 + 24 = 7044$ işlemlerini yapıyor.

Buna göre 1232 sayısının 3 ile çarpımının sonucunu Murat'ın uyguladığı yöntemi kullanarak bulunuz. Bu yöntemin bölme işlemi için de yapılabilirliğine dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

3.1. BİR DOĞAL SAYI İLE ASAL ÇARPANLARI VE BÖLENLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Konuya Başlarken

Bir çiftçi kütlesi 72 kg olan unu aşağıda verilen koşullara göre paketleyecektir.

- Her bir paketteki unun kütlesi birbirine eşit olmalıdır.
- Her bir paketteki unun kütlesi kilogram türünden tam sayı olmalıdır.

Buna göre

1. **Paketlere konacak un miktarının alacağı değerlerin nasıl belirlenebileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
2. **Aşağıda verilen tabloya belirlediğiniz un miktarı ile kullanılan paket sayısını yazınız. Yazdığınız değerlere göre her paketteki un miktarı ve kullanılan paket sayısının toplam un miktarı ile arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.**

Paketlere Konacak Un Miktarı												
Paket Sayısı												

3. **5 ve 7 kilogramlık paketlerin kullanılıp kullanılamayacağını nedenleri ile açıklayınız.**

1'den büyük her tam sayı ya asal bir sayıdır ya da asal sayıların çarpımlarından oluşur. Örneğin 11 asal sayı iken 12 sayısı $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ şeklinde asal sayıların çarpımı sonucu elde edilir. Birden büyük her tam sayı sonlu sayıda asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür.

1. Uygulama

Bir Doğal Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısını Bulma

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.

1. Aşağıda Tablo 1'de verilen doğal sayıların asal çarpanlara ayrılmış hâlini, pozitif tam sayı bölenleri ve pozitif tam sayı bölenlerinin sayılarını örnekteki gibi bularak tablodaki boş alanları uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 1: *Bir Doğal Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenleri*

Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Hâli	Asal Çarpanlarının Sayısı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı
24	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	3 tane 2, 1 tane 3	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
28				
36				
40				
49				
73				
100				

a) Tabloda bulduğunuz değerlere göre doğal sayıların asal çarpanları ile pozitif tam sayı bölenleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız ve varsayımlarınızı oluşturunuz.

b) Tabloda bulduğunuz değerlere göre verilen bir doğal sayının asal çarpanlarının sayısı ile o sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız ve varsayımlarınızı oluşturunuz.

2. Sınıf arkadaşlarınızın yaptığı varsayımları da dikkate alarak yukarıda yaptığınız varsayımlara yönelik örüntüleri genelleyiniz. Oluşturduğunuz genellemenin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını Tablo 2'de örnekte verildiği gibi tablodaki diğer sayılar için de sınayınız.

Tablo 2: *Bir Doğal Sayının Pozitif Bölen Sayısı*

Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Hâli	Pozitif Bölenleri	Pozitif Bölen Sayısı
18	$2\cdot3\cdot3 = 2^1\cdot3^2$	1, 2, 3, 6, 9, 18	$(1 + 1)\cdot(2 + 1) = 2\cdot3 = 6$
25			
30			
36			
48			
53			
64			

3. Elde ettiğiniz genellemeyi bir önerme şeklinde ifade ediniz.

4. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz.

Bir öğretmen, okullarında yapılacak Tübitak Bilim Fuarı etkinliği için sınıfındaki 24 öğrenciyi gruplara ayırarak her bir gruba farklı bir proje görevi vermeyi planlamaktadır. Öğretmen, her birinde eşit sayıda öğrencinin bulunacağı gruplarda en az 2 kişi bulunmasını ayrıca en az 2 grup oluşmasını istemektedir.

a) Öğretmen oluşturacağı gruplardaki öğrenci sayısını kaç farklı şekilde belirleyebilir? Açıklayınız.

b) Öğretmen sınıfının hazırlayacağı proje sayısını kaç farklı şekilde belirleyebilir? Açıklayınız.

c) Her bir gruptaki öğrenci sayısı ile sınıfın hazırlayacağı toplam proje sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

5. Önermenizin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve gerçek yaşam durumları içeren problemlerdeki kullanışlılığını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

1. Örnek

Şifreli bir yazışmada Türk harfleri alfabetik sıralamaya göre 2'den 30'a kadar numaralandırılır. Daha sonra bu sayısal değerler asal çarpanlarına ayrılır ve yazışmada kullanılan metin aşağıda açıklanan yöntemle şifrelenir:

- Metindeki harflerin sayısal karşılıkları yazılır.
- Yazılan sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Asal çarpanları küçükten büyüğe göre soldan sağa doğru çarpım biçiminde yazılarak sayılar ifade edilir.
- Her bir asal çarpanın kuvveti asal sayının sağına yazılarak harfin şifreli karşılığı oluşturulur.
- Şifreli yazılışta harfler arasında bir, kelimeler arasında iki boşluk bırakılacaktır.
- Şifrelenen metindeki noktalama işaretleri değiştirilmeyecektir.

Örneğin KİTAP kelimesinin bu yöntemle şifrelenmesi aşağıdaki gibidir:

Önce K, İ, T, A, P harflerine karşılık gelen sıra numarası yazılır.

K	İ	T	A	P
15	13	25	2	21

Her harfe karşılık gelen sayı asal çarpanlarına ayrılır.

K	İ	T	A	P
$3^1 \cdot 5^1$	13^1	5^2	2^1	$3^1 \cdot 7^1$

Şifreleme yöntemi ile her harfin sayısal karşılığı aşağıdaki gibi bulunur:

K	İ	T	A	P
3151	131	52	21	3171

Bulunan sayısal karşılıklara göre KİTAP kelimesinin şifrelenmiş karşılığı 3151 131 52 21 3171 şeklinde oluşturulur.

Buna göre

a) DOĞAYI KORU ifadesinin şifrelenmiş karşılığını yazınız.

b) Şifrelenmiş hâli 131 231 21111 21 23 71 52 171 71 olan ifadenin karşılığı olan kelimeyi bulunuz.

Çözüm

a) DOĞAYI KORU ifadesindeki harflerin alfabedeki sıra numaraları aşağıdaki gibidir:

D	O	Ğ	A	Y	I		K	O	R	U
6	19	10	2	29	12		15	19	22	26

Sayılar asal çarpanlarına aşağıdaki gibi ayrılır:

D	O	Ğ	A	Y	I		K	O	R	U
$2^1 \cdot 3^1$	19^1	$2^1 \cdot 5^1$	2^1	29^1	$2^2 \cdot 3^1$		$3^1 \cdot 5^1$	19^1	$2^1 \cdot 11^1$	$2^1 \cdot 13^1$

Verilen şifreleme yöntemi ile harflerin sayısal karşılıkları aşağıdaki gibidir:

D	O	Ğ	A	Y	I		K	O	R	U
2131	191	2151	21	291	2231		3151	191	21111	21131

Bulunan sayısal karşılıklara göre DOĞAYI KORU ifadesinin şifrelenmiş sayısal karşılığı 2131 191 2151 21 291 2231 3151 191 21111 21131 olur.

b) 131 231 21111 21 23 71 52 171 71 ifadesi aşağıdaki gibi gruplara ayrılsın:

131	231	21111	21	23		71	52	171	71

Verilen şifreleme yöntemine göre sayıların asal çarpanlarına ayrılmış şekli aşağıdaki gibidir.

13^1	23^1	$2^1 \cdot 11^1$	2^1	2^3		7^1	5^2	17^1	7^1

Buna göre harflerin alfabedeki sıra numaraları aşağıdaki gibidir:

13	23	22	2	8		7	25	17	7

Bulunan sıra numaralarına göre ifadenin gerçek karşılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

13	23	22	2	8		7	25	17	7
İ	S	R	A	F		E	T	M	E

1. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloya bir doğal sayı ile bu sayının pozitif ve negatif tam sayı bölenlerinin tamamı yazılacaktır. Tablodaki boşlukları, verilen örneğe uygun şekilde doldurunuz ve soruları cevaplayınız.

Sayı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Negatif Tam Sayı Bölenleri
6	6, 3, 2, 1	–6, –3, –2, –1
12		
	9, 3, 1	
		–8, –4, –2, –1
	7, x	y, –1
	z, 5, 3, t	

a) Bir doğal sayının pozitif tam sayı bölenleri ile negatif tam sayı bölenleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

b) x, y, z, t harflerinin yerine gelmesi gereken değerleri belirleyiniz.

c) Bir doğal sayının negatif tam sayı bölenlerinin sayısı pozitif tam sayı bölenlerinin sayısından yararlanılarak nasıl bulunabilir? Açıklayınız.

ç) Pozitif tam sayı bölen sayısı 5 olan bir sayı belirleyerek c seçeneğindeki soruya verdiğiniz cevabı test ediniz.

2. Sıra Sizde

1. Bir A pozitif tam sayısı $A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot \ldots$ biçiminde en küçük asal sayıdan başlanarak hiçbir asal sayı atlanmadan sayının en büyük asal çarpanına kadar olan asal sayıların üslü ifadeleri kullanılarak yazılıyor. Sonra kullanılan asal sayıların üsleri sırayla yazılarak bu sayının kodu oluşturuluyor.

Örneğin 15 sayısı $15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ biçiminde yazıldığında bu sayının kodu 011'dir.

Buna göre

Aşağıdaki tabloda verilen sayıların kodlarını bularak tabloyu doldurunuz.

Sayı	Asal Çarpanları	Kodu
14		
20		
30		
45		

2. Alfabedeki harfler alfabetik sıralamaya göre 2'den 30'a kadar numaralandırıldıktan sonra verilen kodlama yöntemiyle her harfe karşılık gelen sayı kodlanarak kelimeler şifreleniyor.

Örneğin AÇIK kelimesinin bu yöntemle şifrelenmesi aşağıdaki gibidir:

Önce A, Ç, I, K harflerinin alfabedeki sıra numarası yazılır.

A	Ç	I	K
2	5	12	15

Sonra her sayının verilen kodlama yöntemine uygun karşılığı oluşturulur.

A	Ç	I	K
2^1	$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Şifreleme yöntemi ile her harfin sayısal karşılığı aşağıdaki gibi bulunur:

A	Ç	I	K
1	001	21	011

Sonuç olarak AÇIK kelimesinin bu yönteme göre şifrelenmiş karşılığı 1 001 21 011 olur.

Verilen bu yöntemi kullanarak DEFTER kelimesinin şifrelenmiş karşılığını yazınız.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

A ve n birer pozitif tam sayı; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asal sayılar ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılar olmak üzere A tam sayısının $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$

şeklinde yazılmasına A sayısının asal çarpanlarına ayrılışı denir.

Buna göre

- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayıları A'nın asal çarpanlarıdır.
- A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_n + 1)$ ile hesaplanır.
- A sayısının pozitif ve negatif tam sayı bölenlerinin sayısı birbirine eşittir.

Alıştırmalar

1. Bir manav, tezgahına 36 tane elmayı her sırada eşit sayıda elma olacak şekilde dizmek istiyor. **Manavın elmalarla kaç farklı sıra yapabileceğini ve yaptığı her sırada kaç elma bulunacağını hesaplayınız.**

2. Kemal ile arkadaşı İpek arasında aşağıdaki gibi bir konuşma geçiyor.

Kemal: Benim yaşım pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 3 olan 1000'den küçük doğal sayı adedine eşittir.

İpek: Benim yaşım da senin yaşından büyük ve pozitif tam sayı bölen sayısı 2 olan en küçük doğal sayıdır.

Buna göre Kemal ile İpek'in yaşlarını bulunuz.

3. Bir organizasyon şirketi 40 kişinin katılacağı bir etkinlikte alan düzenlemesi için bir planlama yapmak istemektedir. Şirkete tek tip masa seçeneğinin olduğu ve her masaya eşit sayıda kişinin oturması gerektiği bilgileri verilmiştir.

Buna göre

a) Şirketin kaç farklı planlama yapabileceğini belirleyiniz.

b) Yapılan planlamalardan hangisinin organizasyonu daha kolay gerçekleştirmeyi sağlayacağını nedenleriyle açıklayınız.

4. 120 cm uzunluğundaki bir tel aşağıdaki kurallara göre kesilerek uzunlukları tam sayı olan özdeş parçalara ayrılacaktır.

- Parça sayısı 3'ten az olmamalıdır.
- Tel parçalarının uzunlukları en az 3 cm olmalıdır.

Verilenlere göre

a) Bu telin ayrılacağı parça sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

b) Tel parçalarının uzunluklarının hangi değerleri alabileceğini bulunuz.

5. Bir inşaat firması, 60 metrekarelik bir alanı çevrelemek için çit döşemek istemektedir. Çit döşemek için kullanılacak alan dikdörtgen şeklinde ve her bir kenar uzunluğu tam sayıdır.

Buna göre

a) 60 metrekarelik bir alan için olası dikdörtgen boyutlarını bulunuz.

b) Farklı boyutlardaki bölgeler için çit döşeme maliyetlerini hesaplayınız.

c) Firmanın, en az maliyetle çit döşemesi için hangi boyutları seçmesi gerektiğini belirleyiniz.

6. Kendisi hariç pozitif tam sayı bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayılar Mükemmel Sayı olarak tanımlanmıştır. Örneğin 6 bir mükemmel sayıdır çünkü kendisi dışındaki pozitif tam sayı bölenleri 1, 2 ve 3 olup $1 + 2 + 3 = 6$'dır. Öklit-Euler teoremine göre $2^p - 1$ sayısı asal bir sayı ise $(2^{p-1}) \cdot (2^p - 1)$ sayısı bir mükemmel sayıdır.

Bu teoremi kullanarak iki ve üç basamaklı mükemmel sayılar varsa belirleyiniz. Belirlediğiniz sayıların kendisi dışındaki pozitif tam sayı bölenlerini toplayarak doğruluğunu kontrol ediniz.

7.

1	2	2	2	3	3

Yukarıda üzerinde sayılar yazılı altı tane kart bulunmaktadır. Bu kartlardan herhangi adette kart seçilip üzerinde yazan sayılar çarpılarak yeni doğal sayılar oluşturulacaktır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Oluşturulacak en büyük ve en küçük sayı nasıl belirlenebilir? Açıklayınız.

b) Kaç farklı sayı oluşturabileceğinizi bulunuz.

c) Oluşturulan her sayının oluşturulan en büyük sayıyla arasındaki ilişki için ne söylenebilir?

3. Tema alıştırma ek soruları

3.2. EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN-EN KÜÇÜK ORTAK KAT

Konuya Başlarken

1. Tahin ve pekmez satışı yapılan bir gıda imalathanesinde bidonlarda 12 litre pekmez ile 18 litre tahin vardır.

Her iki bidondaki pekmez ve tahin birbirine karıştırılmadan hacmi tam sayı olan eşit hacimli şişelere ayrılmak istendiğinde şişelerin hacminin kaçar litre olabileceği nasıl bulunabilir? Sınıf arkadaşlarınızla ile tartışınız. Şişe hacimlerinin litre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

2. Gıda imalathanesine ait depoda hacmi 4 litre olan bidonlarda tahin, hacmi 5 litre olan bidonlarda pekmez bulunmaktadır. İmalathane çalışanları bidonlardaki tahin ve pekmezi birbirine karıştırmadan tamamını kullanarak eşit hacimde daha büyük kaplarda taşımak istemektedir.

Buna göre imalathane çalışanlarının kullanabileceği kapların hacminin kaçar litre olabileceğini bulunuz.

Dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin kenarlarına en az sayıda eşit aralıklarla ağaç dikmek, farklı kütledeki birden çok malzemeyi birbirine karıştırmadan en az sayıda olacak şekilde eşit kütlelere ayırmak, aynı durağa farklı saat periyotları ile uğrayan taşıtların hangi zaman aralığında aynı durakta olabileceğini bilmek gibi birçok günlük hayat problemi ile karşılaşılabilir. Birden çok doğal sayının ortak bölenleriyle bunların en büyüğünü ve ortak katlarıyla bunların en küçüğünü bilmek, bu problemlerin çözümünde büyük kolaylık sağlamaktadır.

2. Uygulama

Birden Çok Doğal Sayının Ortak Bölenlerinin En Büyüğü ve Ortak Katlarının En Küçüğü

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki tablolarda verilen sayıların pozitif tam sayı bölenlerini tablodaki ilgili alanlara yazınız.

Sayı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Sayı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Sayı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Sayı	Pozitif Tam Sayı Bölenleri
4		5		6		4	
6		6		12		9	

a) İki sayının en büyük pozitif ortak bölenine dair varsayımlarınızı oluşturunuz. Varsayımlarınızı "İki sayının en büyük pozitif ortak böleni", "1'den başka pozitif ortak böleni olmayan sayıların en büyük pozitif ortak böleni", "Biri diğerinin katı olan iki sayının en büyük pozitif ortak böleni" gibi ayrı ayrı oluşturunuz.

b) Birbirinden farklı doğal sayıların pozitif ortak bölenlerinin en küçüğüne dair varsayımınızı oluşturunuz.

2. Aşağıdaki tablolarda verilen sayıların katlarını tablodaki uygun alanlara örnekteki gibi yazınız.

Sayı \ Katları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
4	4	8																
6	6	12																

Sayı \ Katları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
6	6	12																
12	12	24																

Sayı \ Katları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
5	5	10																
6	6	12																

Sayı \ Katları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
4	4	8																
9	9	18																

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre

a) İki sayının en büyük pozitif ortak katına dair varsayımınızı oluşturunuz.

b) İki sayının en küçük pozitif ortak katına dair varsayımınızı oluşturunuz.

3. Aşağıdaki tablolarda verilen sayılar için boş bırakılan alanları uygun şekilde doldurunuz.

Sayı	Asal Çarpanları	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	Pozitif Bölenleri
2			
3			
4			
6			

Sayı \ Katları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
2	2	4																
3	3	6																
4	4	8																
6	6	12																

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre

a) Sayıların asal çarpanlarına ayrılmış biçimini dikkate alarak birbirinden farklı doğal sayıların en büyük pozitif ortak bölenine (EBOB) dair varsayımlarınızı oluşturunuz.

b) Birbirinden farklı doğal sayıların pozitif ortak bölenlerinin en küçüğüne dair varsayımınızı oluşturunuz.

c) Sayıların asal çarpanlarına ayrılmış biçimini dikkate alarak birbirinden farklı doğal sayıların en küçük pozitif ortak katına (EKOK) dair varsayımlarınızı oluşturunuz.

ç) Birbirinden farklı doğal sayıların en büyük pozitif ortak katına dair varsayımınızı oluşturunuz.

4. Aşağıdaki tablolarda iki doğal sayıdan biri ile bu sayıların EBOB ve EKOK değerleri verilmiştir. Tablolarda verilen sayıların asal çarpanlara ayrılmış biçimini ilgili alanlara yazarak inceleyiniz. Verilmeyen 2. sayıyı veya sayıları bularak tabloları doldurunuz. Verilen soruları cevaplandırınız.

1. Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	EBOB	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	2. Sayı
6	$2 \cdot 3$	2	2	2, 4, ...
15		3		
24		8		

1. Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	EKOK	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	2. Sayı
4		12		3, 6, 12
9	3^2	45	$3^2 \cdot 5$	
14		42		

1. Sayı	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	EBOB	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	EKOK	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	2. Sayı
12		4		24		
15		3		30		
8	2^3	1	1	72	$2^3 \cdot 3^2$	9

a) Sayıların asal çarpanlarına ayrılmış biçimini dikkate alarak tabloda yazdığınız 2. sayılardan yola çıkarak birbirinden farklı doğal sayıların en büyük pozitif ortak böleni ile en küçük pozitif ortak katına dair genellemelerde bulununuz.

b) 1'den başka pozitif ortak böleni olmayan sayıların en büyük pozitif ortak bölenine dair genellemenizi oluşturunuz.

5. Öğretmeninizin rehberliğinde 4 kişilik gruplara ayrılınız. Genellemelerinizi varsayımlarınız ile karşılaştırmak için en çok dört tane doğal sayı yazıp bu sayıların en büyük pozitif ortak böleni ile en küçük pozitif ortak katını bulunuz. Ulaştığınız sonuçları grup arkadaşlarınızla iş birliği içinde inceleyiniz. Kendi düşüncelerinizi ilk önce grup içinde daha sonra diğer gruplarla paylaşınız. Diğer arkadaşlarınızla iletişim hâlinde, onların düşüncelerini nezaket kuralları çerçevesinde dinleyerek genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız.

6. Oluşturduğunuz genellemelerin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını aşağıda verilen örnekteki gibi sınayınız.

Sayılar	Asal Çarpanlara Ayrılmış Biçimi	EBOB	EKOK
18	$2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3 = 6$	$2^3 \cdot 3^2 = 72$
24	$2^3 \cdot 3$		
7			
21			
20			
45			
12			
15			
18			
24			

7. Genellemelerinizden yola çıkarak iki doğal sayının en büyük pozitif ortak böleni ile en küçük pozitif ortak katını bulmak için önermeler oluşturunuz.

8. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermenizin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğine dair görüşlerinizi nezaket kuralları çerçevesinde sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

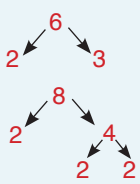
Bir çiftlikteki yaşlı ağaçlar kesilip uzunlukları 12 m ve 21 m olan tomruklar hâline getiriliyor. Tomruklar bir süre kuruduktan sonra kaldırılmak üzere aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi yolun her iki tarafına aralarında boşluk kalmayacak şekilde dizildiğinde en az sayıda tomruk kullanılarak yolun kenarları tam olarak kapatılabiliyor.

Buna göre

a) Yolun uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

b) Çiftlik sahibi bu tomrukları eşit ve en büyük uzunlukta keserek çit kazıkları yapmak isterse kazık uzunluğunun nasıl bulunabileceğini ve kaç metre olduğunu bulunuz.

9. Aşağıda verilen sayıların EBOB ve EKOK'unu örneklerdeki gibi listeleme, asal çarpan algoritması, asal çarpan ağacı ve cebirsel gösterim yaparak bulup doğrulayınız. Verilen sayıların EBOB ve EKOK'u bulunurken kullanılan matematiksel doğrulamayı kullanışlılığı açısından değerlendirerek hangisini tercih ettiğinizi açıklayınız.

Sayılar	Listeleme	Asal Çarpan Algoritması	Asal Çarpan Ağacı	Cebirsel Gösterim	EBOB	EKOK
6, 8	6, 12, 18, 24 8, 16, 24 1, 2, 3, 6 1, 2, 4, 8	6 8 | 2 3 4 | 2 3 2 | 2 3 1 | 3 1		$6 = 2 \cdot 3$ $8 = 2^3$	2	24
12, 16						
9, 18						
12, 25						

Çoklu Doğal Sayılarda Asal Çarpan Algoritması

A B \| x
y z \| y
1 z \| z
1 \|

A, B iki pozitif tam sayı; x, y, z asal sayılar ($x < y < z$) ve x her iki sayının ortak böleni olsun.
A ve B sayıları bölme işlemleri sonunda kalan 1 olana kadar asal sayılara bölünür.

3. Sıra Sizde

Aşağıda tabloda verilen sayıların EBOB ve EKOK'unu tablodaki listeleme, asal çarpan algoritması, asal çarpan ağacı ve cebirsel gösterim alanlarını doldurarak verilen soruları cevaplayınız.

Sayılar	Listeleme	Asal Çarpan Algoritması	Asal Çarpan Ağacı	Cebirsel Gösterim	EBOB	EKOK
10, 20						
4, 5, 9						
8, 12, 18						

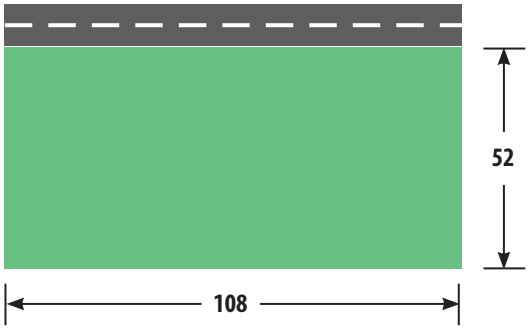
a) 10 ve 20 sayıları için bulduğunuz en büyük ortak bölen ile en küçük ortak katın 10 ve 20 sayıları ile ilişkisini belirtiniz.

b) 8, 12 ve 18 sayılarının pozitif ortak bölenlerinin en küçüğünü bulunuz.

c) 4, 5 ve 9 sayıları arasındaki ilişkileri göz önüne alarak bu sayıların en küçük pozitif ortak katı ve en büyük pozitif ortak böleni hakkında çıkarımlarda bulununuz.

2. Örnek

Aşağıda uzun kenarlarından biri araç yoluna diğer kenarları başka bahçelere komşu olan dikdörtgen şeklinde bahçe görseli verilmiştir.



Bahçenin kenar uzunlukları 108 ve 52 metredir. Yola komşu olan kenarın her iki ucuna da fidan dikmek şartıyla bahçenin yola komşu olmayan kenarlarına eşit aralıklarla en az sayıda fidan dikilecektir.

Buna göre

a) Dikilecek iki fidan arası mesafenin kaç metre olması gerektiğini bulunuz.

b) Kaç fidan dikileceğini bulunuz.

Çözüm

a) Eşit aralıklarla ve en az sayıda fidan dikileceğinden iki fidan arasındaki mesafe bahçenin iki kenar uzunluğunu tam bölen en büyük sayı olmalıdır. Dolayısıyla iki fidan arasındaki mesafe 52 ile 108 sayılarının EBOB'u bulunmalıdır. Her iki sayının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi $52 = 2^2 \cdot 13$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$ şeklindedir. Buradan her iki sayıyı ortak bölen en büyük sayı 2^2 olur.

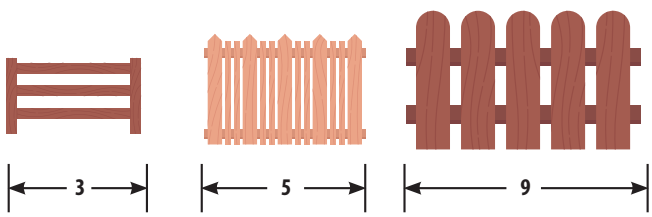
52 ile 108 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü için EBOB(52,108) kısaltması kullanılır. Dolayısıyla iki fidan arasındaki mesafe EBOB(52, 108) = 4 metre olmalıdır.

b) Fidan dikilecek bahçenin kenar uzunlukları toplamı = 52 + 52 + 108 = 212 metre bulunur.

Fidan sayısı $\frac{212}{4} + 1 = 54$ adettir. (Başa ve sona fidan dikileceğinden 1 eklenir.)

3. Örnek

Bir çiftlik evine giden yolun her iki tarafı çit ile kapatılacaktır. Çiftlik sahibi aşağıda verilen çitlerden sadece birini tercih ederek çitleri parçalara ayırmadan ve yan yana koyarak bu işlemi yapacaktır.



Çiftlik sahibi bahçenin yolla olan sınırını tamamen kapatmak için uzunluğu 3 metre olan çiti seçerse 2 metre, uzunluğu 5 metre olan çiti seçerse 4 metre, uzunluğu 9 metre olan çiti seçerse 8 metre boşluk kalmaktadır. 3 m, 5 m ve 9 m çitlerin maliyetleri sırasıyla 650 TL, 1100 TL ve 2300 TL'dir.

Buna göre

a) Yolun uzunluğunun en az kaç metre olabileceğini bulunuz.

b) Çit yapılırken seçilen çit parçasının uzunluğundan daha küçük boşluk kalması durumunda işlem sonlandırılmıştır. Çiftlik sahibinin en az maliyetle yolun her iki tarafını çit ile kapatması için hangi uzunluktaki çiti seçmesi gerektiğini bulunuz.

Çözüm

a) Yolun bir tarafına çekilecek çitin uzunluğu A metre olsun. Bahçenin yolla olan sınırının çitlerle kapatılması sırasında 3 metrelik çitten x tane, 5 metrelik çitten y tane, 9 metrelik çitten z tane kullanılması durumunda yolun uzunluğu $A = 3 \cdot x + 2 = 5 \cdot y + 4 = 9 \cdot z + 8$ eşitliğini sağlamalıdır.

Eşitliğin her iki tarafına 1 eklendiğinde $A + 1 = 3 \cdot x + 3 = 5 \cdot y + 5 = 9 \cdot z + 9$

$A + 1 = 3 \cdot (x + 1) = 5 \cdot (y + 1) = 9 \cdot (z + 1)$ olur.

3, 5 ve 9'un ortak katlarının en küçüğü için EKOK(3, 5, 9) kısaltması kullanılır. Bu sayılar aralarında asal sayılar olduğundan EKOK(3, 5, 9)=45 metredir. O hâlde

$A + 1 = \text{EKOK}(3, 5, 9) \Rightarrow A + 1 = 45$

A = 44 metre bulunur (çitle kaplanacak yolun uzunluğu).

b) $A = 3 \cdot x + 2 = 5 \cdot y + 4 = 9 \cdot z + 8$ olduğundan

$3 \cdot x + 2 = 44 \Rightarrow x = 14$ kullanılması gereken çit sayısı $= 2 \cdot 14 = 28$, Maliyet $= 28 \cdot 650 = 18\,200$ TL

$5 \cdot y + 4 = 44 \Rightarrow y = 8$ kullanılması gereken çit sayısı $= 2 \cdot 8 = 16$, Maliyet $= 16 \cdot 1100 = 17\,600$ TL

$9 \cdot z + 8 = 44 \Rightarrow z = 4$ kullanılması gereken çit sayısı $= 2 \cdot 4 = 8$, Maliyet $= 8 \cdot 2300 = 18\,400$ TL bulunur.

Maliyet hesaplamasından görüleceği üzere çiftlik sahibi en az maliyetle çit döşemek için uzunluğu 5 metre olan çiti seçmelidir.

3. Uygulama

EKOK ile EBOB Arasındaki İlişki

A = 60, B = 126 olarak veriliyor.

1. Buna göre A ve B sayılarını asal çarpanlara ayrılmış biçimde yazınız. A ve B sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulunuz.

Elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

2. İki sayı verildiğinde bu sayılar ve bu iki sayının EBOB ve EKOK'u arasındaki ilişkiye dair varsayımınızı oluşturunuz.

3. Aşağıda tabloda iki sayı ile bu sayıların EBOB ve EKOK'u verilmiştir. Verilmeyen sayıları örnekteki gibi doldurunuz.

Sayılar		EBOB	EKOK
4	9	1	36
6	12		
8		4	24
	20	2	140
	16	1	240
20		10	60

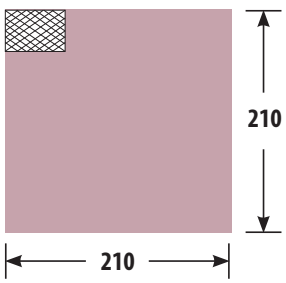
4. Tablodaki boşlukları doldurmak için kullandığınız yöntemleri dikkate alarak sayılar ile sayıların EBOB ve EKOK'ları arasındaki ilişki için genellemenizi oluşturunuz.

5. Aşağıda tabloda iki sayı ile bu sayıların EBOB ve EKOK'u verilmiştir. Tablodaki boş bırakılan alanları uygun şekilde doldurarak genellemenizin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını sınayınız.

Sayılar		EBOB	EKOK
12		4	48
	16	2	112
60		12	480

6. Tablodaki boşlukları doldurmak için kullandığınız yöntemleri dikkate alarak sayılar ile sayıların EBOB ve EKOK'ları arasındaki ilişki için önermenizi oluşturunuz.

7. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz.



Yanda bir kenar uzunluğu 210 cm olan kare şeklindeki bir deponun tabanına ait görsel verilmiştir. Deponun tabanı, dikdörtgen şeklindeki eş fayanslar ile fayanslar parçalanmadan ve aralarında boşluk kalmayacak şekilde döşeniyor.

Bir fayansın alanının 630 cm^2 ve bir kenar uzunluğunun en fazla 40 cm olduğu bilinmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Deponun tabanına döşenen fayansın kenar uzunluklarının kaç cm olduğunu bulunuz.

b) Deponun tabanına kaç tane fayans döşendiğini bulunuz.

8. Aşağıdaki tabloda verilen EBOB, EKOK ve bir sayının bilindiği durumda diğer sayıyı bulma işlemini, örnekteki gibi listeleme ve cebirsel gösterimler kullanarak yapınız ve önermelerinizi doğrulayınız.

EBOB	EKOK	Sayılar	Listeleme	Cebirsel Gösterimler	2. Sayı
3	30	6, A	$A = 3 \cdot k$ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, . . .	$6 = 2 \cdot 3$ $3 = 3^1$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$A = 3 \cdot 5 = 15$
5	60	15, B			B =
12	48	24, C			C =

9. Yukarıdaki tabloyu doldururken kullandığınız yöntemlerin olumlu ve olumsuz yönlerini tartışınız. Bu yöntemleri kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

4. Örnek

Aşağıda "İki Sayının EBOB ve EKOK'unu Bulma Oyunu" adındaki bir uygulamaya ait ekran görüntüsü paylaşılmıştır.

Oyun aşağıdaki gibi oynanmaktadır:

- Üzerinde çeşitli sayılar yazan iki çubuk, program tarafından doldurulmuş olarak verilir.
- Program tarafından iki sayının EBOB'u veya EKOK'u ile ilgili sorular sorulur.
- Oyunu oynayan kişi sorulan soruyu cevaplamak için her iki çubuğu oklar yönünde (sağ veya sol tarafa) hareket ettirerek turuncu kare ile aynı hizada olacak şekilde istediği sayılarda durdurur.
- Turuncu karenin alt ve üst tarafındaki sayıların EBOB'u turuncu karenin içinde, EKOK'u ise yeşil karenin içinde program tarafından hesaplanıp yazılır.
- Ekrandaki soruya doğru cevap verilmiş ise ✓ sembolü, yanlış cevap verilmiş ise ✗ sembolünün ışığı yanar.

Buna göre

a) Program ekranında beliren "EBOB'u 1 olacak şekilde çubukları konumlandırınız." sorusuna doğru cevap veren bir kişinin çubuklarda oluşturabileceği tüm sayı ikililerini yazınız.

b) Programın ekranında beliren "1. çubuktan 3 sayısını seçiniz. Daha sonra 2. çubuktan öyle bir sayı seçiniz ki 3 ile seçilen sayının EKOK'u bu iki sayının çarpımı olsun." sorusuna doğru cevap veren bir kişinin 2. çubuktan seçtiği sayıları bulunuz.

Çözüm

a) İki sayının EBOB'unun 1 olması için sayılar aralarında asal olmalıdır. O hâlde istenen sayı ikilileri (2, 5), (2, 9), (3, 4), (3, 5), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 9), (7, 12) olmalıdır.

b) (3, 4), (3, 5) ikililerinin EKOK'u bu iki sayının çarpımlarına eşit olacağından istenen sayılar 4 ve 5'tir.

Performans Görevi

Adı:	EBOB ve EKOK Özellikleri
Beklenen Performans:	EBOB ve EKOK'un özellikleri ile ilgili araştırma yaparak araştırma sonucunu poster hazırlayarak sunma
Görev:	Bu görevde EBOB ve EKOK'un özellikleri ile ilgili araştırma yaparak bir poster hazırlamanız istenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bir çalışma planı oluşturunuz, yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • "Herhangi iki doğal sayının EBOB'u sayılardan küçük veya birine eşit, EKOK'u sayılardan büyük veya birine eşit olabilir.", "İki sayı aralarında asal ise EBOB'u 1'dir.", "İki doğal sayının çarpımı, sayıların en küçük pozitif ortak katıyla en büyük pozitif ortak böleninin çarpımına eşittir." gibi en az üç EBOB ve EKOK özelliği ile ilgili bir poster oluşturunuz. • Araştırmanız sonucunda belirlediğiniz EBOB ve EKOK özelliklerini gösteren posterinizi nasıl sergileyeceğinize (kâğıt, branda, bilişim araçları) karar veriniz. • Posterinizde kullandığınız özellikleri aşamaları göstererek açıklayınız. • Posterinizde kullandığınız özellikleri görselleştiriniz. • Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamladıktan sonra oluşturduğunuz posterinizi sınıfta sunarak arkadaşlarınızla paylaşınız.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

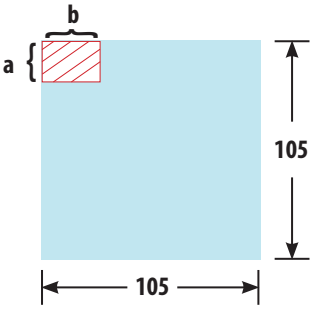
Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla doğal sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. A ile B doğal sayılarının en büyük ortak böleni EBOB(A, B) ile gösterilir.
- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla doğal sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. A ile B doğal sayılarının en küçük ortak katı EKOK(A, B) ile gösterilir.
- Aralarında asal olan doğal sayıların en büyük pozitif ortak böleni 1'dir.
- Pozitif iki tam sayının çarpımı, sayıların en küçük pozitif ortak katı ile en büyük pozitif ortak böleninin çarpımına eşittir. A ve B pozitif iki tam sayı olmak üzere
  $A \cdot B = EBOB(A, B) \cdot EKOK(A, B)$ dir.
- Birbirinden farklı doğal sayıların pozitif ortak bölenlerinin en küçüğü her zaman 1'dir.

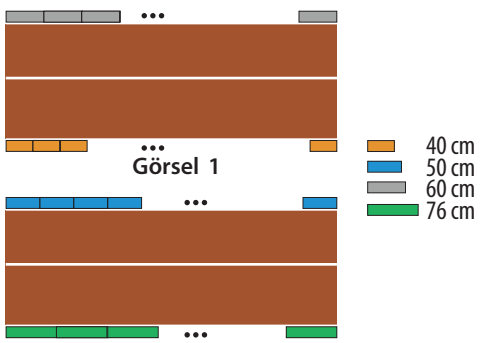
Alıştırmalar

1. Bir kenar uzunluğu 105 cm olan kare şeklindeki bir zeminin tabanına, kenar uzunlukları tam sayı cinsinden a ve b cm olan dikdörtgen şeklinde eş fayanslar en az sayıda kullanılarak aralarında boşluk olmayacak şekilde parçalanmadan döşenmiştir.



Fayansların kenar uzunlukları arasında $5 \cdot a = 3 \cdot b$ eşitliği sağlandığına göre bir fayansın çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

2. Aşağıda iki farklı yürüyüş yolu görseli verilmiştir. Görsel 1'deki yürüyüş yolunun karşılıklı kenarlarında 40 cm ve 60 cm'lik taşlar, Görsel 2'deki yürüyüş yolunun karşılıklı kenarlarında 50 cm ve 76 cm'lik taşlar aralarında boşluk olmayacak şekilde sıralanmıştır. Her iki yürüyüş yolunun uzunluğu 17 metreden büyüktür.



Yürüyüş yolunun her iki tarafında bulunan kaldırım taşları uzunluklarına göre taşlar parçalanmadan ve farklı renklerde olacak şekilde 40 cm'lik taş turuncu, 50 cm'lik taş turkuaz, 60 cm'lik taş gri ve 76 cm'lik taş yeşil boya ile boyanıyor.

Buna göre

a) Her iki yürüyüş yolunun uzunluğunun en az kaç metre olabileceğini bulunuz.

b) Görsel 1'deki yürüyüş yolu uzunluğunun alabileceği en küçük değere göre gri ve turuncu boya ile boyanan taşların sayısını bulunuz.

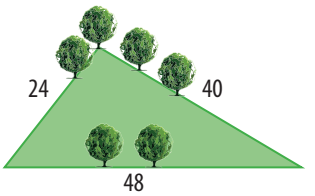
c) Görsel 2'deki yürüyüş yolu uzunluğunun alabileceği en küçük değere göre turkuaza ve yeşile boyanan taşların sayısını bulunuz.

3. Aşağıdaki tartı, üzerine konulan nesnelerin kütlesinin kaç kg olduğunu önündeki dijital ekranda göstermektedir.

Toplam kütlesi 45 kg olan iki farklı çuvalın birinde mısır, diğerinde buğday vardır. Buğdayın kütlesi mısırın kütlesinden daha fazladır. Her iki çuvaldaki bakliyatlar birbirine karıştırılmadan eşit kütlelerde en az sayıda poşetlere ayrıldığında bir poşetin kütlesi 5 kg olmaktadır. Çuvalların her birinin kütlesi 10 kg'dan fazladır.

Buna göre çuvallardaki mısır ve buğdayın kütlelerini bulunuz.

4. Aşağıdaki şekilde kenar uzunlukları 24, 40 ve 48 metre olan üçgen biçimindeki bir bahçe verilmiştir.



Bu bahçenin etrafına eşit aralıklarla ağaç dikilmek isteniyor.

Bahçenin köşelerine de ağaç dikmek şartıyla bu işlem için en az kaç ağacın gerekli olduğunu bulunuz.

5. Bir çiçekçi, dükkânındaki laleleri üçerli saydığında 2, dörderli saydığında 3, beşerli saydığında 4 lale arttığını görüyor.

Lalelerin sayısı 200 ile 250 arasında olduğuna göre dükkândaki lale sayısını bulunuz.

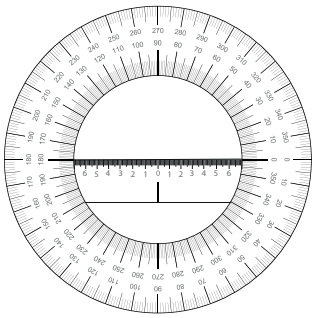
3. Tema alıştırma ek soruları

3.3. BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİNİ KULLANARAK KALAN BULMA

Konuya Başlarken

Aşağıda açı ölçmede kullanılan tam bir daire şeklindeki açıölçer görseli verilmiştir. Dairesel açıölçer üzerinde 0 ile 360 derece arasında işaretlenmiş ölçümler bulunur.

Dairesel açıölçer üzerinde tam ölçü olarak alınan 360 sayısı için aşağıdaki soruları cevaplayınız.



1. **360 sayısı aşağıda verilen sayılardan hangileri ile tam bölünebilir? 360 sayısını tam bölen sayıların altına ✓ işareti koyunuz.**

2	3	4	5	6	8	9	10

2. **360'ı tam bölen sayıları bulurken hangi yöntem veya yöntemleri kullandınız? Kullandığınız yöntemleri arkadaşlarınızla paylaşınız.**
3. **Bir sayının başka bir sayıya tam bölünüp bölünmediği hangi yöntemler ile bulunabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Tam açının 360 derece olarak seçilmesinin kökeni, MÖ 2000 yıllarında Mezopotamya'da yaşamış olan Babillilere dayanır. Babilliler, sayı sistemi olarak 60 tabanlı bir sistem kullanıyorlardı. Bu sistem, 60'ın birçok sayıya (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30) bölünebilmesi gibi pratik avantajlar sağlıyordu. Bu nedenle bu sayı sistemi üzerinde yapılan hesaplamalar oldukça kolaydı ve bu da 360 dereceyi tam açı olarak kabul etmelerini sağladı.

4. Uygulama

2, 5, 10, 4 ve 8 ile Bölünebilme

Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. Tablolarda verilen sayıların sırasıyla 2, 5, 10, 4 ve 8 ile bölümünden kalanları örnekteki gibi basamak çözümlemelerini yaparak bulunuz.

a)

Kural \ Sayılar	148	254	375
2 ile Bölümünden Kalan	148 = 100 + 40 + 8 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (2 ile tam bölünür.)		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 2 ile bölümünden kalanı bulmaya dair örnekteki gibi varsayımlarda bulununuz.

Bir sayının 2 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağının 2 ile bölümünden kalandır.

b)

Kural \ Sayılar	240	375	413
5 ile Bölümünden Kalan	240 = 200 + 40 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (5 ile tam bölünür.)		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 5 ile bölümünden kalanı bulmaya dair varsayımlarda bulununuz.

c)

Kural \ Sayılar	360	420	758
10 ile Bölümünden Kalan	360 = 300 + 60 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (10 ile tam bölünür.)		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 10 ile bölümünden kalanı bulmaya dair varsayımlarda bulununuz.

ç)

Kural \ Sayılar	184	352	538
4 ile Bölümünden Kalan	180 = 100 + 80 + 4 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (4 ile tam bölünür.)		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 4 ile bölümünden kalanı bulmaya dair varsayımlarda bulununuz.

d)

Kural \ Sayılar	248	532	1318
8 ile Bölümünden Kalan	248 = 200 + 40 + 8 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (8 ile tam bölünür.)		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 8 ile bölümünden kalanı bulmaya dair varsayımlarda bulununuz.

2. Aşağıda birer örnek içeren tabloları uygun sayılar ile doldurunuz. (Her bir hücreye en az 2 sayı daha yazınız.)

Kural \ Kalanlar	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar
2 ile Bölünebilme	124,	251,

Kural \ Kalanlar	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar	Kalanı 3 Olan Sayılar	Kalanı 4 Olan Sayılar
5 ile Bölünebilme	125,	251,	257,	143,	379,

Kural \ Kalanlar	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar	Kalanı 3 Olan Sayılar	Kalanı 4 Olan Sayılar	Kalanı 5 Olan Sayılar	Kalanı 6 Olan Sayılar	Kalanı 7 Olan Sayılar	Kalanı 8 Olan Sayılar	Kalanı 9 Olan Sayılar
10 ile Bölünebilme	140,	351,	472,	293,	514,	315,	276,	347,	128,	249,

Kural \ Kalanlar	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar	Kalanı 3 Olan Sayılar
4 ile Bölünebilme	240,	133,	274,	375,

Kalanlar / Kural	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar	Kalanı 3 Olan Sayılar	Kalanı 4 Olan Sayılar	Kalanı 5 Olan Sayılar	Kalanı 6 Olan Sayılar	Kalanı 7 Olan Sayılar
8 ile Bölünebilme	120,	161,	242,	139,	284,	325,	406,	567,

3. Tabloya yazdığınız sayılardan yola çıkarak bir doğal sayının 2, 5, 10, 4 ve 8 ile bölümünden kalanı bulmak için örnekteki gibi genellemelerde bulununuz ve genellemelerinizi varsayımlarınız ile karşılaştırınız.

» Bir sayının 2 ile bölümünden kalan; son basamağındaki sayı çift ise 0, tek ise 1'dir.

» Bir sayının 5 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 10 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 4 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 8 ile bölümünden kalan .....

4. Oluşturduğunuz genellemelerin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını aşağıda verilen örnekteki gibi sınayınız.

Kurallar / Sayılar	152	1279
2 ile Bölümünden Kalan	2 | 2 2 | 1 0 Kalan 0'dır. Doğrulama 152 | 2 14 | 76 12 12 0	9 | 2 8 | 4 1 Kalan 1'dir. Doğrulama 1279 | 2 12 | 639 07 6 19 18 1
5 ile Bölümünden Kalan		
10 ile Bölümünden Kalan		
4 ile Bölümünden Kalan	52 | 4 4 | 13 12 12 0 Kalan 0'dır. Doğrulama 152 | 4 12 | 38 32 32 0	79 | 4 4 | 19 39 36 3 Kalan 3'tür. Doğrulama 1279 | 4 12 | 319 07 4 39 36 3
8 ile Bölümünden Kalan		

5. Genellemelerinizden yola çıkarak bir doğal sayının 2, 5, 10, 4 ve 8 ile bölümünden kalanı bulmak için örnekteki gibi önermeler oluşturunuz.

» Bir sayının 2 ile bölümünden kalan, son basamağının 2 ile bölümünden kalana eşittir.

» Bir sayının 5 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 10 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 4 ile bölümünden kalan .....

» Bir sayının 8 ile bölümünden kalan .....

6. Aşağıda verilen örneklerdeki gibi basamak çözümlemesi yapınız ve önermelerinizi cebirsel olarak doğrulayınız.

abcde beş basamaklı bir sayı olsun.

abcde = 10 000a + 1000b + 100c + 10d + e

= 2(5000a + 500b + 50c + 5d) + e

Yapılan çözümleme yukarıdaki gibi düzenlenirse bölme algoritmasından yararlanarak abcde sayısının 2 ile bölümünden kalanın "e" rakamının aldığı değere bağlı olduğu söylenebilir.

Bölme Algoritması:
a, b, c ve k doğal sayıları için bölme algoritmasına göre $a = b \cdot c + k$ ve $k < b$ olmak üzere a nın b ile bölümünden kalan k dir.

Benzer şekilde beş basamaklı abcde sayısı

abcde = 10 000a + 1000b + 100c + 10d + e

= 4(2500a + 250b + 25c) + de

Yapılan çözümleme yukarıdaki gibi düzenlenirse abcde sayısının 4 ile bölümünden kalanın "de" sayısının aldığı değere bağlı olduğu söylenebilir.

7. Siz de benzer çözümlemeler yaparak bir sayının 5, 10 ve 8 ile bölümünden kalanı veren önermelerinizi cebirsel olarak doğrulayınız.

5. Örnek

Bir zeytinyağı üretim firmasında her biri 127 litre zeytinyağı içeren beş varil vardır. Firma varildeki zeytinyağlarını 2, 4, 5, 8 ve 10 litrelik şişelere koyarak satışa sunmaktadır. Her bir varil ayrı bir şişeleme ünitesine bağlıdır ve her ünitede yalnız bir çeşit şişeleme yapılmaktadır. Şişeleme yapıldıktan sonra varilde zeytinyağı kalıyorsa ayrı bir boru ile kalan tüm zeytinyağları farklı bir varilde birleştirilmektedir.

Buna göre kalan zeytinyağlarının birleştirildiği varilde toplam kaç litre zeytinyağı olduğunu bulunuz.

Çözüm

Şişeleme yapıldıktan sonra varilde kalan zeytinyağı miktarlarını bulmak için 127 sayısının 2, 4, 5, 8 ve 10 ile bölümünden kalanlar bulunur.

127 sayısının 2 ile bölümünden kalan 1, 4 ile bölümünden kalan 3, 5 ile bölümünden kalan 2, 8 ile bölümünden kalan 7, 10 ile bölümünden kalan 7'dir.

Buna göre şişeleme sonrasında kalan zeytinyağlarının birleştirildiği varildeki zeytinyağı miktarı 1 + 3 + 2 + 7 + 7 = 20 litre olur.

5. Uygulama

3 ve 9 ile Bölünebilme

Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. Tablolarda verilen sayıların 3 ve 9 ile bölümünden kalanları örnekteki gibi basamak çözümlemelerini yaparak bulunuz.

a)

Kural \ Sayılar	261	312	473
3 ile Bölümünden Kalan	261 = 200 + 60 + 1 Kalan 2 + 0 + 1 = 3 3 sayısı 3 ile tam bölünür, kalan 0'dır.		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 3 ile bölümünden kalanı bulmak için örnekteki gibi varsayımlarda bulununuz.

Bir sayının 3 ile bölümünden kalanı bulmak için her basamağındaki rakamın 3 ile bölümünden kalan toplanır.

b)

Kural \ Sayılar	234	387	536
9 ile Bölümünden Kalan	234 = 200 + 30 + 4 Kalan 2 + 3 + 4 = 9 9 sayısı 9 ile tam bölünür, kalan 0'dır.		

Yukarıda elde ettiğiniz sonuçlara göre bir sayının 9 ile bölümünden kalanı bulmaya dair varsayımlarda bulunuz.

2. Aşağıda verilen tabloları örnekteki gibi sayılar ile doldurunuz. (Her bir hücreye en az 2 sayı daha yazınız.)

Kalanlar / Kural	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar
3 ile Bölünebilme	132,	151,	281,

Kalanlar / Kural	Kalanı 0 Olan Sayılar	Kalanı 1 Olan Sayılar	Kalanı 2 Olan Sayılar	Kalanı 3 Olan Sayılar	Kalanı 4 Olan Sayılar	Kalanı 5 Olan Sayılar	Kalanı 6 Olan Sayılar	Kalanı 7 Olan Sayılar	Kalanı 8 Olan Sayılar
9 ile Bölünebilme	126,	172,	218,	255,	328,	365,	105,	250,	422,

3. Tabloya yazdığınız sayılardan yola çıkarak bir doğal sayının 3 ve 9 ile bölümünden kalanı bulmak için örnekteki gibi genellemelerde bulununuz ve genellemelerinizi varsayımlarınız ile karşılaştırınız.

Bir doğal sayının rakamları toplamının 3'e bölümünden kalan ne ise o doğal sayının da 3'e bölümünden kalan aynıdır.

» Bir sayının 9 ile bölümünden kalan .....

4. Oluşturduğunuz genellemelerin varsayımınızı karşılayıp karşılamadığını aşağıda verilen örnekteki gibi sınayınız.

Kurallar \ Sayılar	252	1472
3 ile Bölümünden Kalan	2 + 5 + 2 = 9 9 | 3 9 | 3 0 Kalan 0'dır. Doğrulama 252 | 3 24 | 84 12 12 0	1 + 4 + 7 + 2 = 14 14 | 3 14 | 4 2 Kalan 2'dir. Doğrulama 1472 | 3 12 | 490 027 27 02
9 ile Bölümünden Kalan		

5. Genellemelerinizden yola çıkarak bir doğal sayının 3 ve 9 ile bölümünden kalanı bulmak için örnekteki gibi bir önerme oluşturunuz.

» Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

» Bir sayının 9 ile bölümünden kalan .....

6. Aşağıda verilen örneklerdeki gibi basamak çözümlemesi yapınız ve önermelerinizi cebirsel olarak doğrulayınız.

abcde beş basamaklı bir sayı olsun.

$abcde = 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e$

$= 9999a + 999b + 99c + 9d + a + b + c + d + e$

$= 3(3333a + 333b + 33c + 3d) + (a + b + c + d + e)$

şeklinde yazılırsa abcde sayısının 3 ile bölümünden kalanın $(a + b + c + d + e)$ toplamının aldığı değere bağlı olduğu söylenebilir.

7. Siz de benzer çözümlemeler yaparak bir sayının 9 ile bölümünden kalanı veren önermenizi cebirsel olarak doğrulayınız.

6. Örnek

Aralarında Buğra ve Miray'ın bulunduğu beş kişilik bir arkadaş grubu bilye satın almak amacıyla çeşitli renklerde bilye satan bir dükkânda buluşuyorlar. Arkadaş grubu ve bilyeler hakkındaki bilgiler aşağıda verilmiştir:

- Bilyelerin fiyatları renklerine göre değişmektedir.
- Beyaz bilyelerin satış fiyatı 3 TL, mavi bilyelerin satış fiyatı 9 TL' dir.
- Gruptaki kişilerin yanlarında getirdikleri paralar 90, 118, 120, 142 ve 155 TL' dir.
- Herkes sadece yanında getirdiği paranın miktarı kadar alışveriş yapmıştır.
- Buğra sadece beyaz bilye, Miray sadece mavi bilye almıştır.

Buğra ve Miray ödemelerini yaptıktan sonra yanlarında getirdikleri paralardan sırasıyla 1 ve 7 TL kalıyor.

Buna göre Buğra ve Miray'ın yanlarında getirdikleri paraların kaç TL olduğunu bulunuz.

Çözüm

Miray y tane mavi bilye almış olsun. Mavi bilyenin satış fiyatı 9 TL olduğundan ve Miray'ın ödeme yaptıktan sonra 7 TL'si kaldığı için yanında getirdiği paranın cebirsel temsili 9y + 7 şeklindedir. Bundan dolayı yanındaki para 9 ile bölündüğünde 7 kalanını veren bir sayı olmalıdır. Dolayısıyla bu şarta uyan sayı 142'dir.

Buğra x tane beyaz bilye almış olsun. Beyaz bilyenin satış fiyatı 3 TL olduğundan ve Buğra'nın ödeme yaptıktan sonra 1 TL'si kaldığı için yanında getirdiği paranın cebirsel temsili 3x + 1 şeklindedir. Bundan dolayı yanındaki para 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren bir sayı olmalıdır. Bu şarta uyan iki sayı 118 ve 142'dir. Miray'ın yanında getirdiği para 142 TL olduğundan Buğra'nın yanında getirdiği para 118 TL olur.

7. Örnek

Bir okulda öğrencilere ait şifreli dolaplar bulunmaktadır. Öğrencilerden dolapları için üç rakamdan oluşan şifre üretmeleri istenmektedir. Sınıflardaki öğrenciler beşerli gruplara ayrılıyor ve her grup için öğretmenleri üç basamaklı rakamları farklı ABC pozitif sayısını tahtaya yazıyor. Öğrenciler aşağıdaki adımları takip ederek şifre oluşturuyorlar.

Gruptaki her öğrenci

- Tahtaya yazılan sayının rakamlarının yerini değiştirerek yeni bir üç basamaklı sayı oluşturuyor.
- ABC sayısı ile kendi oluşturduğu sayı arasındaki farkın mutlak değerini buluyor.
- Bulduğu sayıyı dolap şifresi olarak belirliyor.

Öğretmen beş kişilik bir gruptaki öğrencilerden belirledikleri şifreleri ayrı kâğıtlara yazarak alıyor. Öğretmen kâğıtta yazan sayıların 027, 180, 225, 478, 495 olduğunu görünce bir öğrencisinin hatalı şifre ürettiğini fark ediyor.

Yukarıda verilen bilgilere göre hatalı üretilen şifreyi bulunuz.

Çözüm

ABC sayısının rakamları yer değiştirdiğinde ACB, BAC, BCA, CBA ve CAB sayıları elde edilebilir.

Dolayısıyla tüm sayıların ABC ile farklarının mutlak değeri alınıp çözümlemeleri yapıldığında
1. öğrenci: $|ABC - ACB| = |100A + 10B + C - 100A - 10C - B| = |9(B - C)|$,
2. öğrenci: $|ABC - BAC| = |100A + 10B + C - 100B - 10A - C| = |90(A - B)|$,
3. öğrenci: $|ABC - BCA| = |100A + 10B + C - 100B - 10C - A| = |99A - 90B - 9C| = |9(11A - 10B - C)|$,
4. öğrenci: $|ABC - CBA| = |100A + 10B + C - 100C - 10B - A| = |99(A - C)|$,
5. öğrenci: $|ABC - CAB| = |100A + 10B + C - 100C - 10A - B| = |90A + 9B - 99C| = |9(10A + B - 11C)|$
yazabilir.

Tüm öğrenciler farklı işlemler yapsa bile her birinin bulduğu sayılar mutlaka 9'un katı olmalıdır. Verilen sayıların arasında 478'in 9 ile bölümünden kalan 1 olduğundan öğrencilerden birinin ürettiği hatalı şifre 478'dir.

4. Sıra Sizde

Üç basamaklı 82A sayısının 9 ile bölümünden kalan 7, rakamları farklı üç basamaklı 3AB sayısının 4 ile bölümünden kalan 3, dört basamaklı 7ABC sayısının 8 ile bölümünden kalan 2'dir.

Buna göre beş basamaklı 84CBA sayısının

a) 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

b) 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

c) 10 ile bölümünden kalanı bulunuz.

6. Uygulama

Bir Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenleri Arasındaki İlişkiler

Aşağıda istenenleri yapınız ve soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki tabloda verilen 60, 80 ve 90 sayılarının hizasındaki kutulara 2, 3, 4, 5, 8, 9 ve 10 ile tam bölünenlerine örnekteki gibi ✓, kalanlı bölünenlere ✗ işareti koyunuz.

Bölen / Bölünen	2	3	4	5	8	9	10
60	✓					✗	
80							
90							

2. 60, 80 ve 90'ın tabloda verilen sayılardan başka birden büyük pozitif tam bölenlerini yazınız.

» 60'ın pozitif tam bölenleri: .....

» 80'in pozitif tam bölenleri: .....

» 90'ın pozitif tam bölenleri: .....

Bulduğunuz pozitif tam bölenlerin tabloda o sayıyı tam bölen sayılarla ilişkisi hakkında örnekteki gibi varsayımda bulununuz.

» 2 ve 3, 60 sayısının pozitif bir tam böleni ise 6 da pozitif bir tam bölenidir.

.....

.....

3. Bulduğunuz sonuçlardan hareketle tablodaki sayıların diğer pozitif tam bölenleri hakkında örnekteki gibi genellemeler yapınız.

» 60 sayısı 2 ve 3 ile tam bölünüyorsa 6 ile de tam bölünür.

» 80 sayısı 4 ve 5 ile tam bölünüyorsa .....

» 90 sayısı 5 ve 9 ile tam bölünüyorsa .....

Bu genellemelerin her sayı ikilisi için doğruluğunu test ediniz. Örneğin 60 sayısı 2 ve 4'e tam bölünür ama 8 ile tam bölünemez, 80 sayısı 2 ve 4'e tam bölünürken 8 ile de tam bölünür. Yaptığınız genellemeler hangi sayı grupları için kesin doğrudur? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

4. Bulduğunuz sonuçlardan hareketle tablodaki sayıların diğer pozitif tam bölenleri hakkında örnekteki gibi genellemeler yapınız.

» 120 sayısı 12 ile tam bölünüyorsa aynı zamanda 12'nin aralarında asal çarpanlarından 3 ve 4 ile de tam bölünür.

» 180 sayısı 15 ile tam bölünüyorsa .....

» 315 sayısı 45 ile tam bölünüyorsa .....

Yukarıdaki bilgilerden hareketle aralarında asal iki veya daha fazla sayının her birine tam bölünen sayı, bu sayıların çarpımına da tam bölünür denilebilir. Bu kuralı kalan bulma bağlamında değerlendiriniz. Örneğin bir sayının 12 ile bölümünden kalan 10 ise 3 ve 4 ile bölümünden kalanlar sırasıyla kaç olabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

8. Örnek

175, 218 ve 286 sayılarının sırasıyla 12, 3, 4, 45, 5 ve 9 ile bölümünden kalanları gösteren bir tablo oluşturunuz.

Tablodan yararlanarak verilen bölen sayılar arasında bir ilişki kurarak bölümlerden elde edilen kalan sayılar hakkında çıkarımda bulununuz.

Çözüm

Bölünen \ Bölen	12	3	4	45	5	9
175	7	1	3	40	0	4
218	2	2	2	38	3	2
286	10	1	2	16	1	7

Oluşturulan tablo incelendiğinde

- 175'in 12'ye bölümünden kalan 7 ise 175'in 3 ve 4'e bölümünden kalan, 7'nin 3 ve 4'e bölümünden kalana eşittir.
- 175'in 45'e bölümünden kalan 40 ise 175'in 5 ve 9'a bölümünden kalan, 40'ın 5 ve 9'a bölümünden kalana eşittir.
- 218'in 12'ye bölümünden kalan 2 ise 218'in 3 ve 4'e bölümünden kalan, 2'nin 3 ve 4'e bölümünden kalana eşittir.
- 218'in 45'e bölümünden kalan 38 ise 218'in 5 ve 9'a bölümünden kalan, 38'in 5 ve 9'a bölümünden kalana eşittir.
- 286'in 12'ye bölümünden kalan 10 ise 286'nın 3 ve 4'e bölümünden kalan, 10'un 3 ve 4'e bölümünden kalana eşittir.
- 286'in 45'e bölümünden kalan 16 ise 286'nın 5 ve 9'a bölümünden kalan, 16'nın 5 ve 9'a bölümünden kalana eşittir.

olduğu görülür.

Sıfırdan farklı bir doğal sayının 12'ye bölümünden elde edilen kalan a, 3 ve 4'e bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla b ve c olmak üzere a nın 3 ve 4'e bölümünden kalanlar sırasıyla a ve c dir.

9. Örnek

Yukarıda bir züccaciyeden tanesi 45 TL olan cam bardak alan müşteri için hazırlanmış bilgi fişi görseli verilmiştir. Bilgi fişinde adet kısmı hiç okunmamakta, tutar kısmında ise dört basamaklı bir sayı görülmekte ve bu sayının yüzler basamağında 0, onlar basamağında 3 rakamı okunabilmektedir.

Müşterinin ödediği tutarın <u>en az</u> olması durumuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bilgi fişinin tutar kısmında okunması gereken sayıyı bulunuz.

b) Müşterinin aldığı cam bardak adedini bulunuz.

Çözüm

a) Müşteri x adet cam bardak alsın ve ödediği tutar dört basamaklı a03b sayısı olsun.

Cam bardağın tanesi 45 TL olduğundan ödenen tutar

$45 \cdot x = a03b$ olmalıdır.

a03b sayısı 45 ile tam bölünmesi gerektiğinden aynı sayı 5 ve 9 ile de tam bölünmelidir.

Dolayısıyla sayının 5 ile tam bölünebilmesi için $b = 0$ veya $b = 5$ olur.

$b = 0$ ise a030 sayısı 9 ile tam bölünmesi gerektiğinden $a = 6$, sayı 6030 olur.

$b = 5$ ise a035 sayısı 9 ile tam bölünmesi gerektiğinden $a = 1$, sayı 1035 olur.

Müşterinin ödediği tutarın en az olması durumu istendiğinden tutar 1035 TL olmalıdır.

b) Cam bardak sayısı x, bir adet cam bardağın fiyatı 45 TL, tutar 1035 TL olduğundan

$45 \cdot x = 1035$

$x = 23$ bulunur.

10. Örnek

Rakamları farklı dört basamaklı 74AB doğal sayısının 15 ile bölümünden kalan 8'dir.

Buna göre A nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

Çözüm

74AB doğal sayısının 15 ile bölümünden kalan 8 ise bu sayının 3 ile bölümünden kalan 2, 5 ile bölümünden kalan 3 olur.

5 ile bölümünden kalan 3 ise $B = 3$, sayı 74A3 veya $B = 8$, sayı 74A8 olmalıdır.

3 ile bölümünden kalan 2 ise

74A3 için $7 + 4 + A + 3 = 3k + 2$ ise A nın alabileceği değerler 0, 6 ve 9 olur.

74A8 için $7 + 4 + A + 8 = 3k + 2$ ise A nın alabileceği değerler 1 ve 7 olur.

Bu durumda A nın alabileceği değerler toplamı $0 + 1 + 6 + 7 + 9 = 30$ bulunur.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninize 2 hafta içinde, zamanında ve eksiksiz olarak teslim ediniz.

- Şimdiye kadar öğrendikleriniz dışında farklı bölünebilme kuralları var mı? Güvenilir kaynaklardan araştırınız.
- Bulduğunuz farklı bölünebilme kurallarından herhangi birinin kuralını yazınız ve örneklendiriniz.
- Türk matematikçiler tarafından bölünebilme kuralları hakkında yazılmış eserleri araştırınız.
- Araştırmalar sonucu elde ettiğiniz bilgileri derleyip Türk matematikçilerin bölünebilme kuralları hakkında yaptığı çalışmaları özet hâlinde yazınız.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız öğretmeniniz tarafından analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

7. Uygulama

Kalan Bulma Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölümünden kalanı basamak çözümlemesi ve kat ilişkisi ile örnekteki gibi bulunuz.

Sayı	Basamak Çözümleme İle Kalan	Kat İlişkisi İle Kalan
72	72 = 70 + 2 Kalan 0 + 2 Kalan 2' dir.	72 = 5 ·14 + 2 Kalan 2' dir.
87		
143		
2549		

Tabloda bulduğunuz sonuçlardan yola çıkarak kullandığınız yöntemleri kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

2. Aşağıda verilen sayıların 4 ile bölümünden kalanı basamak çözümleme ve kat ilişkisi yöntemlerinden kullanışlı olduğunu düşündüğünüz biriyle bulunuz. Hangi sayıda hangi yöntemi tercih ettiğinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.

Sayı	Basamak Çözümleme İle Kalan	Kat İlişkisi İle Kalan
32		
121		
1453		

5. Sıra Sizde

a) Bölünebilme kurallarını doğrulamada basamak çözümlemenin yapılması ne tür faydalar sağlar? Açıklayınız.

b) Kullandığınız yöntemler (basamak çözümleme veya kat ilişkileri) ile bir sayının farklı sayılara bölümünden kalanlar bulunabilir mi? Örneklendiriniz.

Performans Görevi

Adı:	Bir Doğal Sayının 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ile 10'a ve Bu Doğal Sayıların En Küçük Ortak Katlarından Oluşan Sayılara Bölümünden Elde Edilen Kalan
Beklenen Performans:	Bir doğal sayının 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ile 10'a ve bu doğal sayıların en küçük ortak katlarından oluşan sayılara bölümünden elde edilen kalanlara dair çıkarımlarınız ile ilgili sunum hazırlama
Görev:	Bu görevde sizden bir doğal sayının 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ile 10'a ve bu doğal sayıların en küçük ortak katlarından oluşan sayılara bölümünden elde edilen kalanlara dair çıkarımlar yapmanız beklenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Öğretmeninizin rehberliğinde dört kişilik bir çalışma grubu oluşturunuz. • Grup çalışmasında kimlerin hangi görevleri alacağına dair planınızı yapınız. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ve 10 doğal sayıları arasından en az 2 tane olmak üzere sayı seçiniz. • Seçtiğiniz sayıların EKOK'unu hesaplayınız. • Hesapladığınız EKOK ile kalanlı bölünen bir sayı belirleyiniz. • Belirlediğiniz sayının EKOK ile bölümünden kalanı bulunuz. • Belirlediğiniz sayının seçtiğiniz sayılar ile bölümünden kalanları bulunuz. • Önceki iki adımda elde ettiğiniz kalanlar arasındaki ilişkiyi belirleyiniz ve bu ilişkiyi bir tablo ile ifade ediniz. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususa dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamladıktan sonra oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir. Aşağıdaki karekodlarda verilen grup değerlendirme formu ile grup arkadaşlarınızı değerlendiriniz.

Grup değerlendirme formu

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

- Bir doğal sayının 2 ile bölümünden kalan, o doğal sayının birler basamağındaki rakamın 2 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayının 5 ile bölümünden kalan, o doğal sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayının 10 ile bölümünden kalan, o doğal sayının birler basamağındaki rakama eşittir.
- Bir doğal sayının 4 ile bölümünden kalan, o doğal sayının son iki basamağını oluşturan sayının 4 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayının 8 ile bölümünden kalan, o doğal sayının son üç basamağını oluşturan sayının 8 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayının 3 ile bölümünden kalan, o doğal sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayının 9 ile bölümünden kalan, o doğal sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.
- Bir doğal sayı başka bir doğal sayıya tam bölünüyorsa bölen sayının aralarında asal çarpanlarına da tam bölünür.

Alıştırmalar

1. Bir sokaktaki binaların tümü numaralandırılmıştır. Numaralandırma için 400 ile 500 sayıları arasındaki tüm sayılar kullanılmıştır. Sokakta bulunan okul, kütüphane ve tiyatroya ait binaların numaralarıyla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Okula ait binanın numarası 5 ile bölümünden kalan 3, 4 ile bölümünden kalan 2 olan bir sayıdır.
- Kütüphaneye ait binanın numarası, 3 ile bölümünden kalan 1 ve 10 ile bölümünden kalan 4 olan bir sayıdır.
- Tiyatroya ait binanın numarası, 9 ile bölümünden kalan 7 ve 8 ile bölümünden kalan 1 olan bir sayıdır.

Bir postacı aralarında okul, kütüphane ve tiyatronun da bulunduğu bazı binalara mektup dağıtımı yapacaktır. Mektuplardaki adreslerde yazan binaların numaraları 408, 412, 424, 438, 446, 457, 474'tür.

Buna göre okul, kütüphane ve tiyatroya ait bina numaralarını bulunuz.

2. Bir kutuda içinde dört basamaklı birbirinden farklı doğal sayılar yazılı kartlar bulunmaktadır. Bu kartlardan birinin üzerinde A17B yazdığı ve bu sayının aşağıda verilen şartları sağladığı bilinmektedir.

- Rakamları birbirinden farklıdır.
- 4 ile bölümünden kalan 3'tür.
- 9 ile bölümünden kalan 2'dir.

Buna göre bu şartları sağlayan sayıyı bulunuz.

3. Dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına aşağıda verilen bilgilere göre ağaç dikilecektir.

- Bahçenin uzun kenar uzunluğu 200 metreden, kısa kenar uzunluğu 100 metreden büyüktür.
- Bahçenin uzun kenarı boyunca köşelerden dörder metre uzakta olması şartıyla her 9 metrede bir çınar ağacı dikilecektir.
- Bahçenin kısa kenarı boyunca köşelere birer metre uzakta olması şartıyla her 3 metrede bir çam ağacı dikilecektir.

Buna göre bahçenin çevre uzunluğunun alabileceği en küçük değerin kaç metre olduğunu bulunuz.

4. Bir ilçenin sahil yolu ışıklandırılacaktır. Ölçüm yapan tekniker yolun uzunluğunun kaç metre olduğunu hatırlayamamaktadır. Yolun uzunluğunun dört basamaklı bir sayı olduğunu, onlar basamağının 7, binler basamağının 2 ve her 36 metrede bir ışıklandırma yapılırsa geriye 13 metrelik bir yolun kaldığını hatırlamaktadır.

Buna göre ışıklandırma yapılacak yolun uzunluğunun en çok kaç metre olduğunu bulunuz.

3. Tema alıştırma ek soruları

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

3. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 14 soru verilmiştir.

1. Ayşe ve Selim sayı tahmin oyunu oynuyorlar. Ayşe bir sayı tutuyor ve sayı hakkında bilgiler veriyor.

Bu sayının

- 3 tane asal böleni vardır ve her biri rakamdır.
- Asal bölenlerinin sayısı birbirinden farklıdır.
- Bu sayının negatif bölen sayısı 24'tür.
- 14 bu sayının çarpanıdır.

Selim bu bilgilere göre sayıyı tahmin etmeye çalışıyor.

Buna göre Selim'in Ayşe'nin tuttuğu sayıyı doğru bilmesi için en az kaç tahmin yapması gerektiğini bulunuz.

2. Bir öğretmen çevrim içi dersler düzenlemektedir. Bu dersler en az 10, en fazla 30 kişi ile yapılmaktadır. Ders sonu öğretmen konu ile ilgili hazırladığı 115 sorudan 25'ini çözüp kalan soruları öğrencilere eşit sayıda ödev olarak paylaştırmaktadır.

Buna göre

a) Öğretmenin ödev sorularını artmayacak şekilde paylaştırabilmesi için bu derse katılacak öğrenci sayısının alabileceği farklı değerleri bulunuz.

b) Her öğrenciye 5 soru ödev verilebilmesi için derse katılan öğrenci sayısının kaç olması gerektiğini bulunuz.

3. Bir lisede öğrenciler arasında kitap toplama kampanyası düzenlenmiştir. Kampanyaya göre her öğrenci eşit sayıda kitap getirecek ve okul kütüphanesine bağışlayacaktır. Her sınıf seviyesinde toplanan kitap sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sınıflar	9. Sınıf	10. Sınıf	11. Sınıf	12. Sınıf
Toplanan Kitap Sayısı	1110	1290	1740	2160

Buna göre

a) Bir öğrencinin getirdiği kitap sayısının en fazla kaç tane olabileceğini bulunuz.

b) Bu okulda öğrenim gören toplam öğrenci sayısının en az kaç olabileceğini bulunuz.

4. A ve B sayıları sırası ile verilmiş iki basamaklı ardışık çift sayılardır. Bu sayıların EBOB ve EKOK'larının toplamı 222'dir. Eren telefonu için dört basamaklı AB şifresini oluşturuyor.

Buna göre Eren'in telefon şifresini bulunuz.

5. Aşağıdaki broşürde Karşıyaka Vapur İskelesi sefer bilgileri yer almaktadır.

Karşıyaka – Alsancak	Her 15 dakikada bir	Aynı anda iki sefer varsa binişler A kapısından,tek sefer varsa binişler C kapısındandır.
Karşıyaka - Konak	Her 20 dakikada bir	Aynı anda iki sefer varsa binişler B kapısından, tek sefer varsa binişler C kapısındandır.

Vapur seferleri hafta içi her gün 06.00 – 24.00 saatleri arasında (06.00 ve 24.00 dâhil), hafta sonu (Cumartesi – Pazar) seferleri 03.00 – 24.00 saatleri arasında (03.00-24.00 dâhil) yapılmaktadır.

Verilen bu broşüre göre

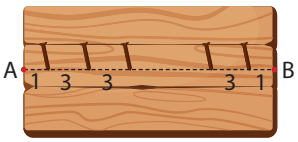
a) Pazartesi A kapısının kaç kez kullanıldığını bulunuz.

b) Cumartesi B kapısının kaç kez kullanıldığını bulunuz.

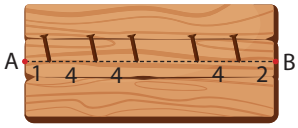
c) Salı 06.00 - 09.00 saatleri arasında (06.00-09.00 dâhil) yolcu almak için C kapısına kaç vapurun yanaştığını bulunuz.

6. Bir yarışma için iki ayrı gruba rakamları farklı 7a2b cm uzunluğunda eşit birer tahta parçası ve yeterli sayıda çivi verilmiş, yarışmacılardan çivileri aşağıdaki kurallara göre tahtalara çakmaları istenmiştir.

- Tahtaların başlangıç (A) ve bitiş (B) noktalarından birer santimetre boşluk bırakılacaktır.
- Çiviler eşit aralıklarla bir doğru boyunca tahtaya çakılacak, her aralık bir tam sayı değeri olacaktır.
- Belirlenen sürede kurallara uygun en çok çivi çakan grup yarışmayı kazanacaktır.



1. Grup



2. Grup

Yukarıda yer alan görselde yarışmaya katılan 1. grup çivilerin arasında üçer santimetre boşluk bırakarak çivileri çaktığında yarışmayı kurallara uygun olarak başarı ile tamamlamıştır. 2. grup ise çivilerin arasındaki boşluğu dörder cm yaptığında tahtanın bir tarafında 2 cm boşluk kaldığı için elenmiştir.

Buna göre

a) Tahtaların herhangi birinin uzunluğunun en az kaç cm olduğunu bulunuz.

b) Tahta uzunluğu en az olduğunda 1. grubun kullandığı çivi sayısının kaç tane olduğunu bulunuz.

7. Derin ve Buse adlı iki arkadaş 480 sayfalık bir kitabı birlikte okumak istiyorlar. Derin her sabah kitabın 12 sayfasını okuyup kaldığı yeri belirlemek için son sayfaya ay " ☾ " sembolü ile işaret koymaktadır. Buse ise her akşam kitabın 15 sayfasını okumakta ve ulaştığı son sayfayı yıldız " ★ " sembolü ile işaretlemektedir.

Buna göre kitap bittiğinde

a) Hangi sayfalarda ☾ ve ★ sembolleri birlikte bulunur?

b) Sadece ★ sembolünün işaretli olduğu kaç sayfa olduğunu bulunuz.

8. Bir atık toplama merkezine özdeş 120 adet plastik şişe gelmiştir. Bu şişelerin geri dönüşümü için eşit büyüklükte balyalar oluşturulması gerekmektedir. Balyaları oluştururken taşıma kolaylığı ve çevre etkisi göz önüne alınarak bir planlama yapılmak istenmektedir.

Taşıma sırasında daha az balya, taşıma araçlarının yüklenmesini kolaylaştırır ancak her balyanın çok ağır olmaması gerekir; aksi takdirde iş gücü ve taşıma ekipmanları zorlanır, enerji ihtiyacı artar. Daha çok balya tercihi ise yükleme boşaltma süresinin uzun olması ile daha fazla zaman ve çaba gerektirmektedir. Öte yandan ek paketleme malzemesi kullanımından dolayı kaynak israfına, fazla atık oluşumuna bununla birlikte araç kullanımı artacağından fosil yakıt tüketimi de artarak çevre üzerinde olumsuz etkileri olacaktır.

Buna göre balyaları oluştururken yapılabilecek planlamaları listeleyiniz. Taşıma kolaylığı ve çevre etkisi göz önüne alındığında hangi planlamanın daha uygun olduğunu belirleyiniz.

9. Bir çiftlik sahibi bazı hayvanları için bahçesinde dikdörtgen biçiminde bir bölge oluşturmak istemektedir. Çiftlik sahibi bu proje için kenar uzunluklarının tam sayı olacak şekilde 30 birimkarelik bir bölge kullanacaktır.

Buna göre

a) Bu proje için kaç farklı planlama yapabileceğini belirleyiniz.

b) Oluşturulacak bölgenin çevresini kapatmak için birim maliyeti aynı olan malzeme kullanıldığında kapatma işleminin en düşük maliyetle yapılabilmesini sağlayacak dikdörtgenin çevre uzunluğunun kaç birim olacağını bulunuz.

10. Soner, bilgisayarının giriş şifresini beş basamaklı bir sayıdan oluşturmuş ve şifreyi defterine 193MS şeklinde kodlayarak yazmıştır. Şifreyi daha sonra hatırlayabilmek için aşağıda verilen ipuçlarını defterine not almıştır.

- Tüm rakamları birbirinden farklıdır.
- 20 ile bölümünden kalan 15'tir.

Buna göre şifrenin rakamları toplamı kaçtır?

A) 19 B) 21 C) 23 D) 25 E) 27

11. Merve yeni taşındığı evinin pencerelerine perde dikmek için 12a8b cm uzunluğunda bir kumaş satın alıyor. Kumaşı eşit parçalara bölmek için 4 veya 8 kesim yapabileceğini hesaplıyor.

Merve'nin aldığı kumaşın uzunluğunun rakamları farklı beş basamaklı bir sayı olduğu bilindiğine göre

a) a rakamını bulunuz.

b) Merve kumaşı eşit parçalara bölmek için 4 kesim yaparsa her bir parçanın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

12. Bir şirket, çalışanları için 1155 kalem ve 647 defter satın almıştır. Kalemler 9'lu paketler hâlinde, defterler ise 5'li paketler hâlinde tüm şirket çalışanlarına dağıtılacaktır.

Buna göre

a) Kalemlerden en fazla kaç paket oluşturulabileceğini ve artan kalem sayısını bulunuz.

b) Defterlerden en fazla kaç paket yapılabileceğini ve artan defter sayısını bulunuz.

c) Kalem ve defter dağıtılacak tüm çalışanların sayısı 130 olduğuna göre kaç kalem ve defter daha satın alınması gerektiğini bulunuz.

13. Bir şirkette çalışanlar dört haneli şifre kullanarak kapıdan giriş yapmaktadırlar. Şirkette çalışan herkesin üç haneli bir personel numarasına sahip olduğu bu şirkette kurulan giriş sistemi çalışanlar için bir giriş şifresi oluşturmaktadır. Bu şifre personel numarasının 2, 3, 4 ve 5 ile bölümünden kalanların soldan sağa sırayla yazılması ile oluşturulmaktadır. Aşağıda bir çalışanın personel numarası ve şifresi verilmiştir.

5	a	b	1	0	3	3

Buna göre çalışanın personel numarasını bulunuz.

14. Mert öğretmen öğrencilerine hem matematiksel kavramları öğretmek hem de öğrencilerinin algoritmik düşünme becerilerini geliştirmek için aşağıda adımları verilen bir şifreleme yöntemi geliştirmiştir. Bu şifreleme yöntemi ile öğrencilerinden EBA sistemi için kullanıcı şifrelerini oluşturmalarını istemiştir.

1. adım: Öğrenciler okul numaralarının pozitif tam bölenlerinin hepsini bir deftere not alıyor.

2. adım: Birden fazla basamaklı bölenlerin basamaklarındaki her bir rakam ayrı ayrı yazılıyor.

3. adım: Son olarak yazılan rakamlar büyükten küçüğe doğru sıralanarak şifre tamamlanıyor.

Örneğin numarası 12 olan bir öğrencinin uyguladığı adımlar aşağıdaki gibidir.

1. adım: 12'nin pozitif tam bölenleri 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 olarak yazılır.

2. adım: 12 sayısı iki basamaklı olduğundan 12 yerine 1 ve 2 yazılır.

3. adım: Rakamlar büyükten küçüğe doğru sıralanıp şifre 6432211 şeklinde bir şifre oluşturulur.

Buna göre okul numarası 72 olan Duru'nun oluşturacağı EBA kullanıcı şifresinin ne olacağını bulunuz.

3. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

4. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER

4.1. Gerçek Sayılarda Tanımlı Fonksiyonların Nitel Özellikleri

4.2. Gerçek Sayılarda Tanımlı Karesel Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

4.3. Gerçek Sayılarda Tanımlı Karekök Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

4.4. Gerçek Sayılarda Tanımlı Rasyonel Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

4.5. Doğrusal, Karesel, Karekök ve Rasyonel Referans Fonksiyonlar ile Bu Fonksiyonlardan Türetilebilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonları

4.6. Doğrusal, Karesel, Karekök, Rasyonel Referans Fonksiyonlar ve Bunlardan Türetilen Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklem ve Eşitsizlikler İçeren Problemlerin Çözümü

Anahtar Kavramlar

- artanlık-azalanlık
- bire birlik
- fonksiyon
- fonksiyonun işareti
- fonksiyonun sıfırı
- karekök fonksiyonu
- karesel fonksiyon
- kök
- maksimum-minimum değer
- maksimum-minimum nokta
- örtenlik
- parabol
- rasyonel fonksiyon
- simetri doğrusu
- teklik-çiftlik
- ters fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- $f: A \rightarrow B$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$
- $f^{-1}(x)$

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, açık uçlu soruları cevaplamanız, performans görevlerini yerine getirmeniz, proje ve araştırma ödevlerini yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

4. Tema
Karekodu

4. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- gerçek sayılarda fonksiyon olma şartları ile gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini matematiksel temsillerle değerlendirebilmeniz,
- gerçek sayılarda $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen karesel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek sayılarda $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen rasyonel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına dair çıkarım yapabilmeniz,
- doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizlikler içeren problemleri çözebilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

Günlük yaşamda olaylar ve kavramlar arasındaki ilişkiler her zaman doğrusal değildir. Örneğin serbest düşme sırasında bir cismin düştüğü yerin yüksekliği ile düşme sırasında geçen zaman arasındaki ilişki cismin düşme hızına göre değişir. Benzer şekilde bir aracın fren yaparken hızının değişimi ile durma mesafesinin uzaması veya trafikte yoğunluğun artmasıyla araçların hızının azalması gibi durumlar da doğrusal olmayan ilişkilere örnektir. Bu tür ilişkiler, doğada ve günlük yaşamda karşılaşılan olayların dinamiklerinin anlaşılabilmesini sağlar. Grafikler ve tablolar ise bu karmaşık ilişkileri görselleştirerek matematiğin olayları açıklama gücünü daha net bir şekilde ortaya koyar.

Ön Değerlendirme

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $10^{-1} + 10^{-2}$

b) $\frac{25^3 \cdot 5^{-2}}{125}$

c) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{2^{10} + 2^{10}}$

ç) $\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

2. Bir evin elektrik faturası, sabit bir aylık ücret ve kullanılan elektrik miktarına (kWh) göre ücretlendirme ile hesaplanmaktadır. Bu tarifede sabit aylık ücret 72 TL ve kullanılan her kWh için 4,5 TL ek ücret alınmaktadır.

Yukarıda verilen problem durumuna göre

a) Kullanılan elektrik miktarına (x) bağlı olarak elektrik faturasını ifade eden f fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

b) Oluşturduğunuz y = f(x) şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğini dik koordinat sisteminde çiziniz.

c) Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

ç) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

d) Bu fonksiyonun pozitif olduğu bölgeleri inceleyiniz. Fonksiyon hangi değerler için pozitif değer alabilir?

e) Fonksiyonun artanlığını-azalanlığını inceleyiniz.

f) Fonksiyonun maksimum-minimum değerini ve bu değeri hangi noktada aldığını belirleyiniz.

g) Fonksiyonun sıfırını inceleyiniz.

ğ) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

3. f(x) = x şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 2 birim sağa ötelenmesi ile g fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir. g fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca 3 birim aşağıya ötelenmesi ile h fonksiyonunun grafiği oluşturulmuştur.

Buna göre g **ve** h **fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazıp grafiklerini çiziniz.**

4. Gerçek sayılarda tanımlı f(x) = x **doğrusal referans fonksiyonuna göre** g(x) = 2 · f(x + 1) + 4 **şeklinde tanımlı g fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulandığını bulunuz. Dönüşümlerden faydalanarak g fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

4.1. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI FONKSİYONLARIN NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

1. Mühendislik ve mimaride birçok yapı fonksiyonlarla modellenebilir. Görsel 4.1'deki 15 Temmuz Şehitler Köprüsü'nün direklerini birbirine bağlayan halatlar ve Görsel 4.2'de verilen Ayasofya Camisi'nin kubbesi bu tür modellere örnektir. Bu modellerin doğrusal fonksiyon ile modellenmediği görülmektedir.

Görsel 4.1: *15 Temmuz Şehitler Köprüsü / İstanbul*

Görsel 4.2: *Ayasofya Camisi Kubbesi / İstanbul*

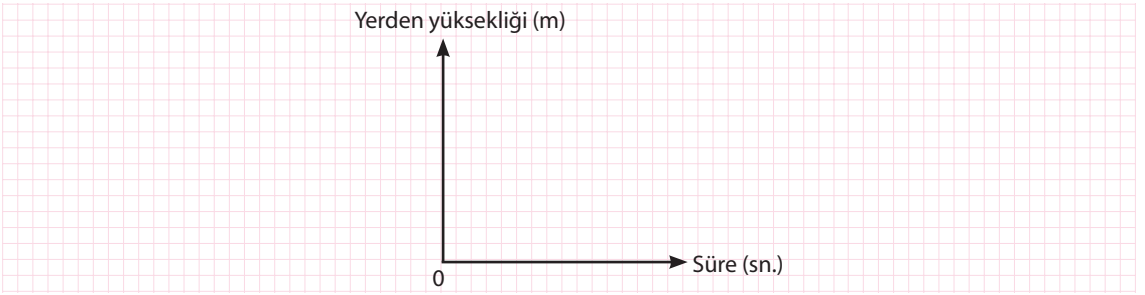
Buna göre yukarıdaki görsellerden hareketle doğrusal olmayan fonksiyonların grafiklerinin nasıl olabileceğini tartışınız.

2. Fizikteki serbest düşme, cismin yer çekimi etkisi altında yalnızca kütlesi nedeniyle hızlanarak yere doğru düştüğü durumu ifade eder. Sürtünmesiz bir ortamda yapılan deneyde 200 m yükseklikten serbest bırakılan bir cismin zamana (sn.) bağlı yerden yüksekliğini (m) veren değerler aşağıda tablodaki gibidir:

Süre (sn.)	0	1	2	3	4	5	6	≈ 6,39
Yerden Yüksekliği (m)	200	195,1	180,4	155,9	121,6	77,5	23,6	0

Buna göre

a) Tabloda verilen değerlerden elde ettiğiniz noktaları aşağıda verilen dik koordinat sisteminde işaretleyiniz.



b) Dik koordinat sisteminde işaretlediğiniz noktalardan yola çıkarak bir cismin serbest düşme hareketi ile yerden yüksekliğinin zamana bağlı değişimini ifade eden grafik temsilini tamamlayınız. Çizdiğiniz grafik temsilini kullanarak cismin yerden yüksekliğinin süreye bağlı değişimini yorumlayınız.

c) Sürtünmesiz bir ortamda bir cismin serbest düşme hareketi; h(t) t anındaki cismin yerden yüksekliği (m), h_0 cismin ilk yüksekliği, g yer çekimi ivmesi (dünya için yaklaşık 9,8 m/sn.^{2}) ve t zaman (sn.) olmak üzere $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ **fonksiyonu ile bulunur.**

Yorumlarınız ve yukarıda verilen bilgilerden faydalanarak çizdiğiniz grafik ile serbest düşme hareketini ifade eden fonksiyonu ilişkilendiriniz. Grafiğinizin doğrusal fonksiyon grafiğinden neden farklılaştığını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

Günlük yaşamda bazı durumlar doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilirken her gerçek yaşam durumu doğrusal fonksiyonlarla ifade edilemez. Fizikteki serbest düşme hareketi, meteorolojik ölçümlerde gün içindeki sıcaklık değişimleri gibi durumlarda genellikle doğrusal olmayan fonksiyonlardan faydalanılır.

1. Uygulama

Verilen Bir Doğrusal İlişkinin Fonksiyon Olma Şartı

Deposunda 600 litre yakıt bulunan bir tankerin altındaki vana açıldığında depodan dakikada 20 litre yakıt akmaktadır. Vana açıldıktan sonra depo tamamen boşalana kadar vana açık bırakılıyor.

1. Yukarda verilen gerçek yaşam durumunu inceleyerek soruları cevaplayınız.

a) Dolu olan deponun başlangıçtan tamamen boşalıncaya kadar geçen zaman ile bu süreçte kalan yakıt miktarını ifade eden en geniş değer aralıklarını bulunuz.

b) Verilen durum bir fonksiyon ile modellenirse zaman ve kalan yakıt miktarını ifade eden değer aralıklarını fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri ile ilişkilendiriniz.

c) Her bir zaman değeri için kalan yakıt miktarının hesaplanıp hesaplanamayacağını bulunuz.

ç) Tankerdeki yakıtın akıtıldığı herhangi bir anda zaman ile kalan yakıt miktarı arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

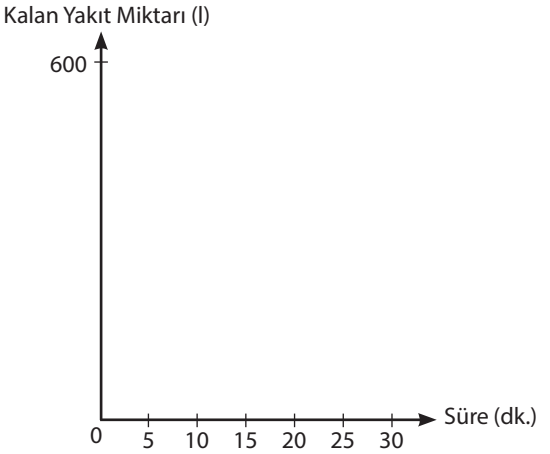
d) Verdiğiniz yanıtlardan hareketle fonksiyon olma şartlarının neler olabileceğini tartışınız.

2. Yukarıda verilen gerçek yaşam durumuna göre tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Kalan Yakıt Miktarı (l)	600		400		200		0
Süre (dk.)	0	5		15		25	

3. x dakika türünden bağımsız değişken, f(x) litre türünden bağımlı değişken olmak üzere tankerde kalan yakıt miktarını ifade eden f fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

4. Tablodan elde ettiğiniz verilerden yola çıkarak f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



5. Tankerde kalan yakıt miktarının zamana bağlı değişimini ifade eden f fonksiyonunun cebirsel temsili ve grafik temsilinden hareketle iki değişken arasındaki ilişkinin fonksiyon belirtmesi için hangi koşulları sağlaması gerektiğine dair düşüncelerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

6. Elde ettiğiniz sonuçlara göre gerçek yaşam durumu ile verilen tüm doğrusal ilişkili ifadeler fonksiyon olma şartını sağlar mı? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

$A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için bir ve yalnız bir $f(x) \in \mathbb{R}$ varsa f ye A dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir **fonksiyon** denir ve $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

$f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **görüntü kümesi** denir. Bu küme f(A) ile gösterilir.

1. Örnek

İstanbul'da 2024 yılı aralık ayında taksimetre açılış fiyatı 30 TL ve sonraki gidilen her kilometre için kilometre başına düşen ücret 20 TL'dir.

Buna göre bir yolculuktaki ücretin kilometreye bağlı değişimini veren fonksiyonu cebirsel ve grafiksel olarak ifade ediniz. Fonksiyon olma şartlarının nasıl sağlandığını açıklayınız.

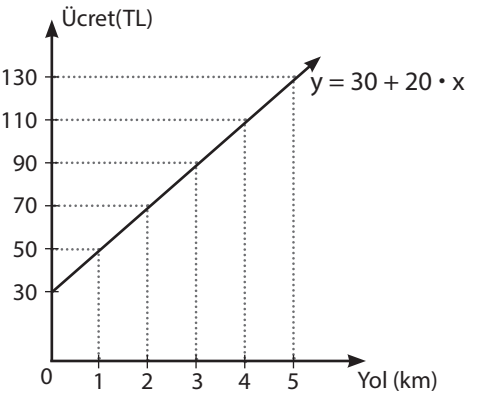
Çözüm

x bağımsız değişkeni kilometre cinsinden gidilen mesafeyi, y bağımlı değişkeni TL cinsinden toplam ücreti göstermek üzere istenen cebirsel temsil $y = 30 + 20 \cdot x$ şeklinde ifade edilir.

$y = 30 + 20 \cdot x$ şeklinde ifade edilen cebirsel temsilde x değişkeni $[0, \infty)$ nda değer alırken, y değişkeni $[30, \infty)$ nda değer alır.

Her bir x değişkenine karşılık gelen yalnız bir y değişkeni olduğu için
$y = 30 + 20 \cdot x$ şeklinde ifade edilen cebirsel temsil bir fonksiyon belirtir.

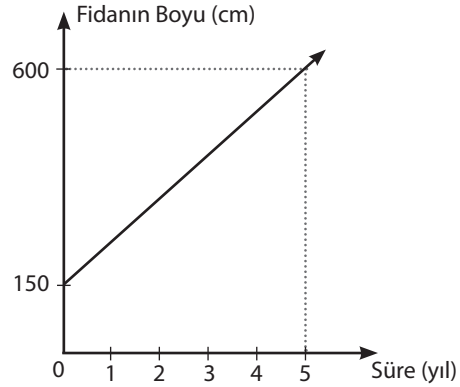
$y = f(x)$ olmak üzere doğrusal denklemi belirten fonksiyon $f(x) = 30 + 20 \cdot x$ ile ifade edilir.



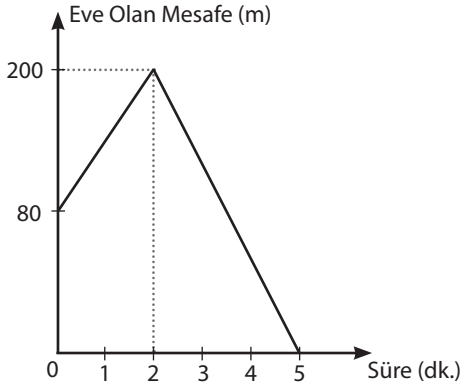
1. Sıra Sizde

Aşağıdaki gerçek yaşam durumlarından türetilmiş doğrusal ilişkiye ait grafiklerin fonksiyon olma koşullarını sağlayıp sağlamadığını belirleyiniz. Fonksiyon şartını sağlayan grafiklerin tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) Dikilen bir fidanın boyunun zamana bağlı değişimi



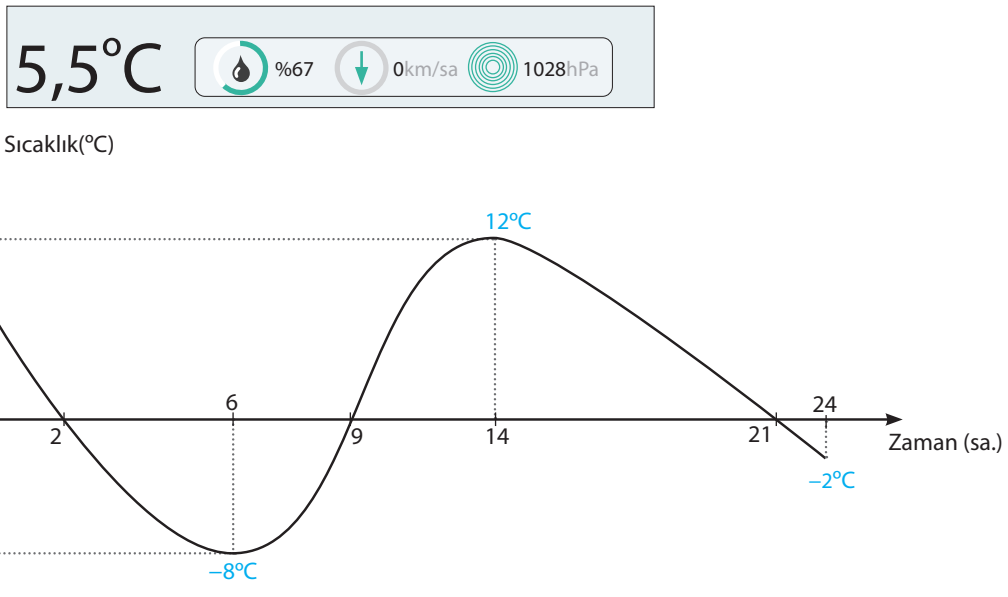
b) Sabit hızla hareket eden bir çocuğun evi ile kendisi arasındaki mesafenin zamana bağlı değişimi



2. Uygulama

Bir Grafiğin Fonksiyon Belirtme Şartları ve Fonksiyonun Nitel Özelliklerinin Grafik Yorumu

Aşağıda başlangıç noktası saat 00.00'ı göstermek üzere bir şehre ait bir günlük zamana (sa.) bağlı hava sıcaklık değişimini (°C) gösteren grafik verilmiştir.



1. Grafikten faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) "Tanım kümesindeki her bir gerçek sayının değer kümesinde yalnızca bir karşılığı vardır." önermesini sınıf arkadaşlarınızla verilen grafik üzerinden değerlendiriniz.

b) Grafiği temsil eden cebirsel ifadenin fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını doğrusal ilişkinin fonksiyon olmasına dair belirlenen koşullardan faydalanarak bulunuz. Cevabınızı gerekçesiyle yazınız.

2. Grafiğin hangi saatler arasındaki sıcaklık değerlerini gösterdiğini bulunuz. Fonksiyonun tanım kümesini yazınız.

3. Sıcaklığın hangi değerler arasında değiştiğini bulunuz. Fonksiyonun görüntü kümesini yazınız.

4. Verilen grafikten faydalanarak fonksiyonun pozitif ve negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.

5. **a)** "Tanım kümesindeki farklı x, y elemanları için $x > y$ ise $f(x) > f(y)$ veya $f(x) < f(y)$ dir." önermesinin fonksiyonun hangi nitel özelliği ile ilgili olduğunu sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Önermeyi grafik ile ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.

b) Fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

6. **a)** "$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(m)$ şartını sağlayan $f(m)$ değerine f fonksiyonunun maksimum değeri, $f(x) \geq f(n)$ şartını sağlayan $f(n)$ değerine f fonksiyonunun minimum değeri denir." ifadesini grafik ile ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.

b) Grafikten yararlanarak gün içinde ölçülen en düşük ve en yüksek sıcaklık değerlerini bulunuz. Ölçülen en düşük ve en yüksek sıcaklık değerlerini fonksiyonun hangi noktası için aldığını yazınız.

7. **a)** "f fonksiyonunda f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun sıfırı denir." ifadesini grafik ile ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.

b) Hava sıcaklığının 0°C olduğu saatleri yazınız. Elde ettiğiniz değerleri fonksiyonun sıfırı ile ilişkilendiriniz.

8. **a)** "Tanım kümesindeki farklı elemanların değer kümesindeki karşılıkları da farklıdır." önermesinin fonksiyonun hangi nitel özelliği ile ilgili olduğunu sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Elde ettiğiniz sonuçları grafik ile ilişkilendiriniz.

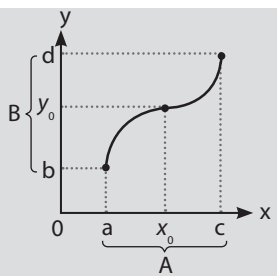
b) Grafiğe göre farklı zamanlarda ölçülen hava sıcaklıklarının birbirinden farklı olup olmadığını belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonucu fonksiyonların bire birliği ile ilişkilendirerek fonksiyonun bire bir olup olmadığını bulunuz.

9. **a)** Grafik temsilinde bir güne ait hava sıcaklık değişimi gösterilen şehirde, grafikte verilen güne dair geçmişten bugüne yapılan tüm ölçümlerde en düşük sıcaklık −10 °C, en yüksek sıcaklık ise 16 °C olarak ölçülmüştür. Verilen bilgiye göre yapılan tüm ölçümlerin aralığı değer kümesi, grafikteki ölçümlerin aralığı ise görüntü kümesi olarak kabul edilirse değer kümesi ile görüntü kümesi arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

b) Grafik temsilinde bir güne ait hava sıcaklık değişimi gösterilen şehirde, grafikte verilen güne dair son 5 yıldan bugüne yapılan tüm ölçümlerde en düşük sıcaklık −8 °C, en yüksek sıcaklık ise 12 °C olarak ölçülmüştür. Verilen bilgiye göre yapılan son 5 yıla ait ölçümlerin aralığı değer kümesi, grafikteki ölçümlerin aralığı ise görüntü kümesi olarak kabul edilirse değer kümesi ile görüntü kümesi arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

c) "Bir f fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanlar, değer kümesindeki elemanlarla değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonu örtendir." ifadesini yapmış olduğunuz çıkarımlarla ilişkilendiriniz.

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ $f: A \to B$ olmak üzere $\forall y_0 \in B$ için $y_0 = f(x_0)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in A$ varsa f ye **örten fonksiyon** denir.

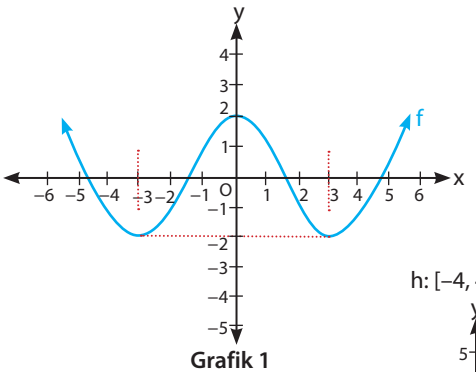


2. Örnek

Aşağıda y = f(x), y = g(x) ve y = h(x) olmak üzere bazı grafik temsilleri verilmiştir.

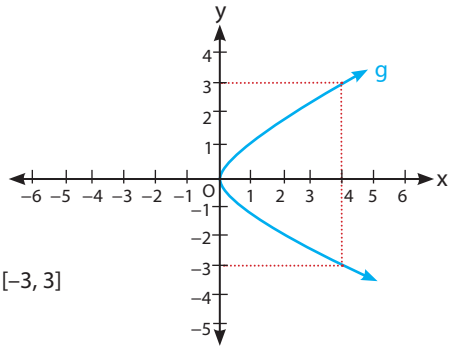
Verilen tanım kümelerine göre grafik temsillerinin fonksiyon olma şartlarını taşıyıp taşımadığını belirleyiniz.

f: $\mathbb{R} \to [-2, \infty)$



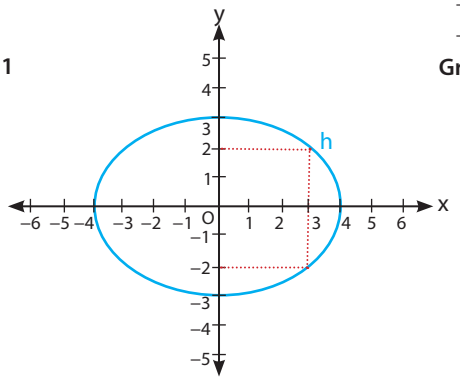
Grafik 1

g: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$



Grafik 2

h: $[-4, 4] \to [-3, 3]$



Grafik 3

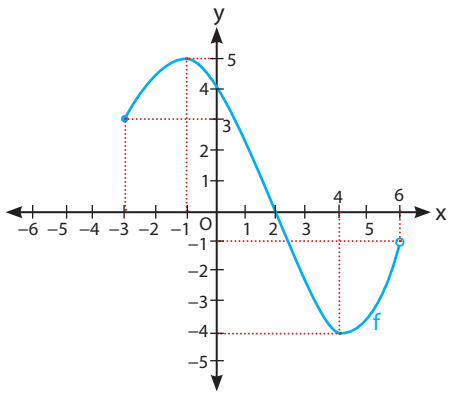
Çözüm

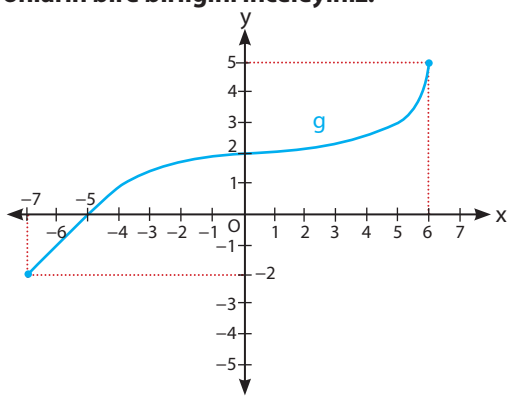
- Grafik 1'de f ile verilen grafik temsilinde tanım kümesindeki $\forall x \in \mathbb{R}$ için yalnız bir $f(x) \in [-2, \infty)$ olduğundan f fonksiyondur.
- Grafik 2'de g ile verilen grafik temsilinde tanım kümesindeki $\exists x \in [0, \infty)$ için $\mathbb{R}$ de birden fazla elemanla eşleştiğinden g fonksiyon değildir.
- Grafik 3'te h ile verilen grafik temsilinde tanım kümesindeki $\exists x \in [-4, 4]$ için $[-3, 3]$ nda birden fazla elemanla eşleştiğinden h fonksiyon değildir.

3. Örnek

Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

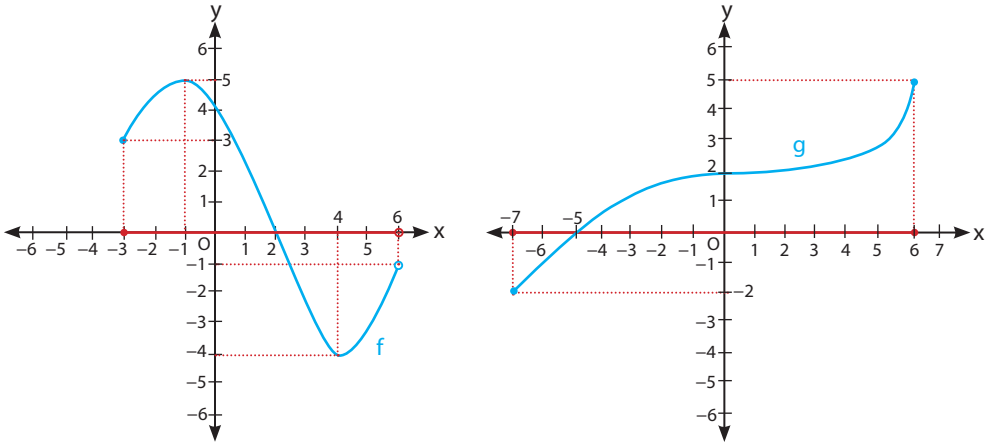
f ve g fonksiyonlarının tanım kümesini, görüntü kümesini, sıfırlarını, pozitif ve negatif olduğu aralıkları, artan ve azalan olduğu aralıkları, maksimum ve minimum değerlerini ve bu değerleri aldıkları noktaları bulunuz. Fonksiyonların bire birliğini inceleyiniz.



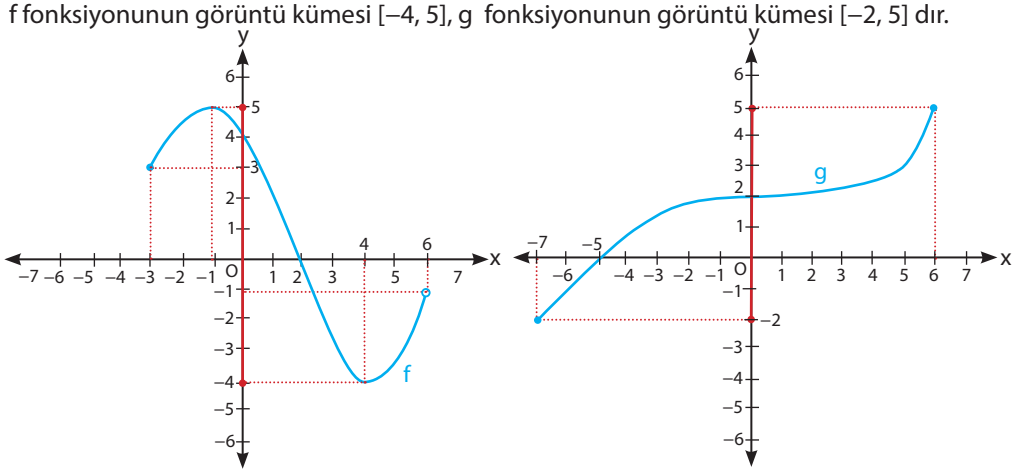


Çözüm

- f fonksiyonunun tanım kümesi [–3, 6), g fonksiyonunun tanım kümesi [–7, 6] dır.



- f fonksiyonunun görüntü kümesi [–4, 5], g fonksiyonunun görüntü kümesi [–2, 5] dır.

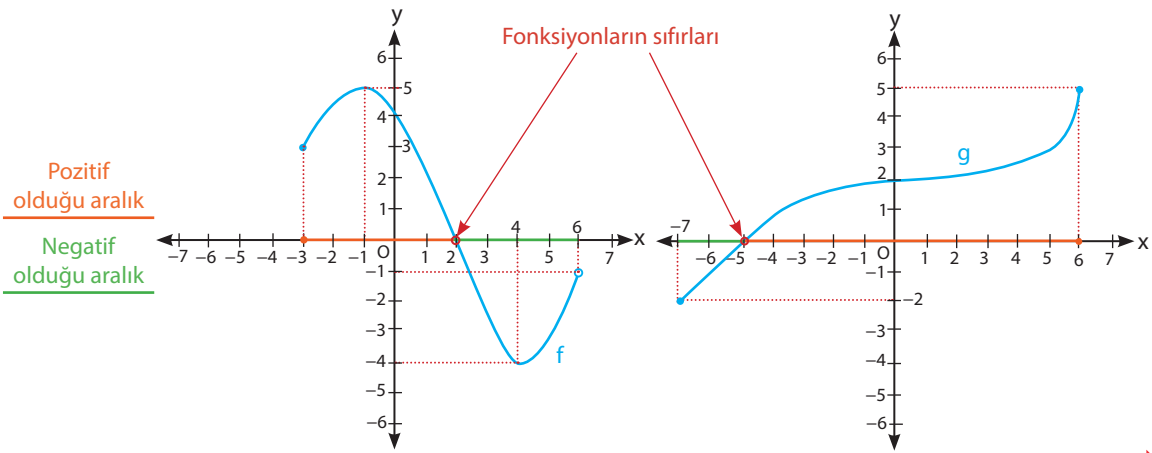


- Fonksiyonda f(x) = 0 şartını sağlayan her x noktası fonksiyonun sıfırıdır. Buna göre f fonksiyonun sıfırı 2, g fonksiyonunun sıfırı –5'tir.

x	–∞		–3		2		6	∞
f(x)	Tanımsız	+		0	–		Tanımsız	

x	–∞		–7		–5		6	∞
g(x)	Tanımsız	–		0	+		Tanımsız	

- f fonksiyonunun pozitif olduğu aralık [–3, 2), negatif olduğu aralık (2, 6) dır.
- g fonksiyonunun pozitif olduğu aralık (–5 ,6], negatif olduğu aralık [–7, –5) dır.



- f fonksiyonu

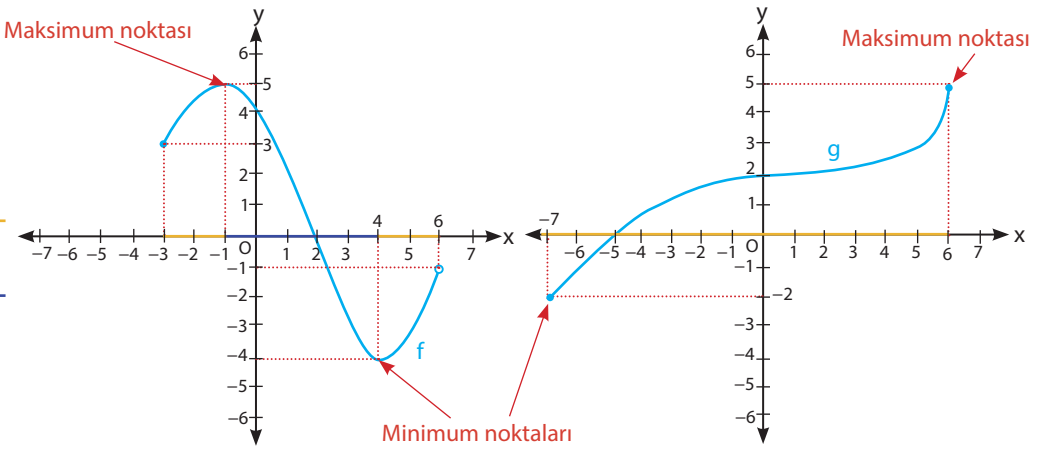
  $\forall x \in [-3, -1]$ için $a > b$ iken $f(a) > f(b)$ olduğundan $[-3, -1]$ nda artan,

  $\forall x \in [-1, 4]$ için $a > b$ iken $f(a) < f(b)$ olduğundan $[-1, 4]$ nda azalan ve

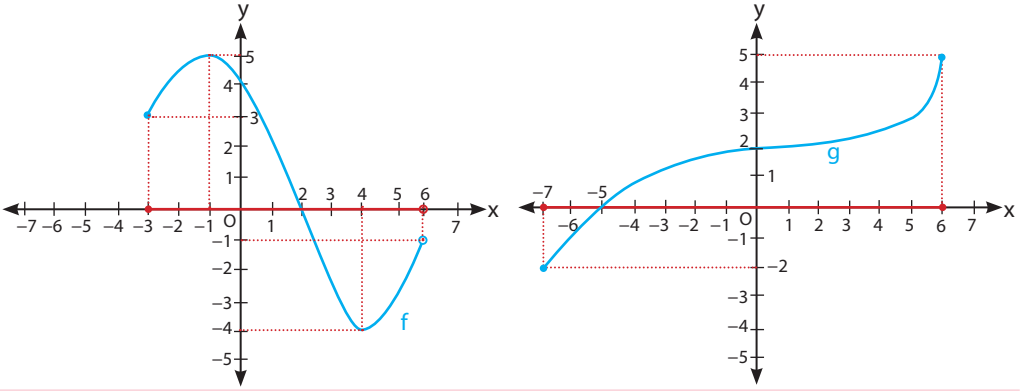
  $\forall x \in [4, 6)$ için $a > b$ iken $f(a) > f(b)$ olduğundan $[4, 6)$ nda artandır.
- g fonksiyonu $\forall x \in [-7, 6]$ için $a > b$ iken $g(a) > g(b)$ olduğundan $[-7, 6]$ nda artandır. g fonksiyonunun azalan olduğu aralık yoktur.
- f fonksiyonunun maksimum değeri 5'tir. Fonksiyon maksimum değerini $x = -1$ noktasında alır. f fonksiyonunun minimum değeri -4'tür. Fonksiyon minimum değerini $x = 4$ noktasında alır.
- g fonksiyonunun maksimum değeri 5'tir. Fonksiyon maksimum değerini $x = 6$ noktasında alır. g fonksiyonunun minimum değeri -2'dir. Fonksiyon minimum değerini $x = -7$ noktasında alır.

Artan olduğu aralık

Azalan olduğu aralık



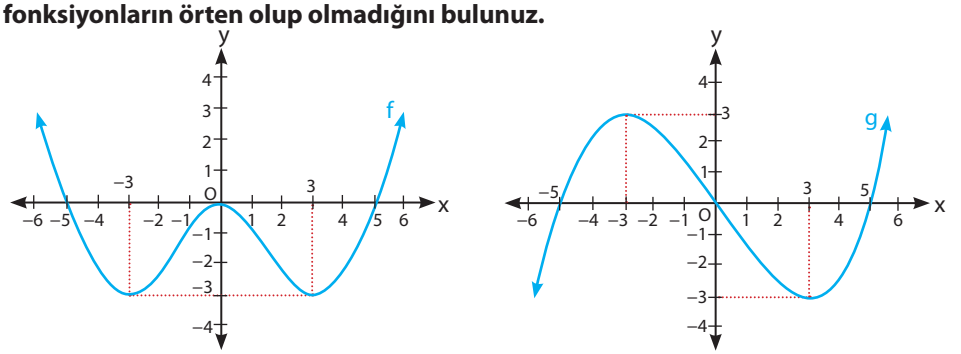
- $a, b \in [-3, 6)$ için $a \neq b$ iken $f(a) = f(b)$ olduğundan f fonksiyonu bire bir değildir. $a, b \in [-7, 6]$ için $a \neq b$ iken $g(a) \neq g(b)$ olduğundan g fonksiyonu bire bir fonksiyondur.



4. Örnek

Aşağıda f ve g fonksiyonlarına ait iki farklı grafik verilmiştir.

Verilen grafiklere ait f ve g fonksiyonları gerçek sayılarda tanımlı ve değerli olduğuna göre bu fonksiyonların örten olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ve g fonksiyonlarının örten olması için $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = f(x_0)$ ve $y_0 = g(x_0)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

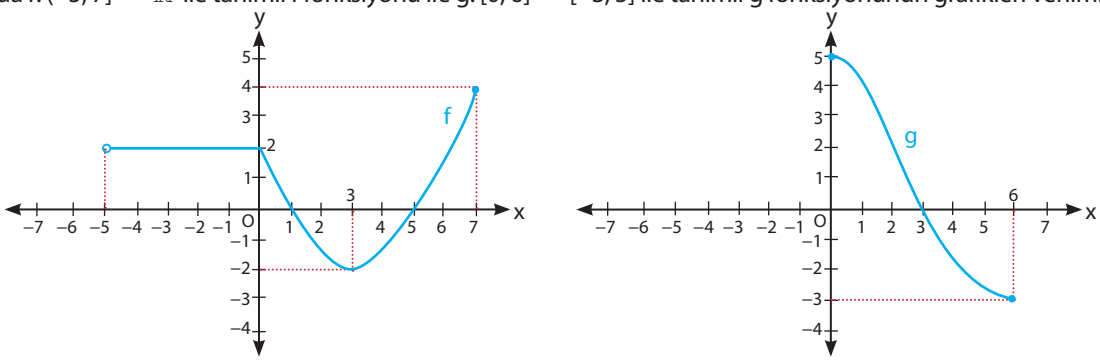
Buna göre

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = f(x_0)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ bulunmadığı için f örten değildir. Örneğin $-4 = f(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ yoktur.

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = g(x_0)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ bulunduğu için g örtendir. g fonksiyonunun grafiği incelendiğinde değer kümesindeki tüm bağımlı değişkenlere karşılık gelen bir bağımsız değişken olduğu görülür.

2. Sıra Sizde

Aşağıda f: (–5, 7] → $\mathbb{R}$ ile tanımlı f fonksiyonu ile g: [0, 6] → [–3, 5] ile tanımlı g fonksiyonunun grafikleri verilmiştir.



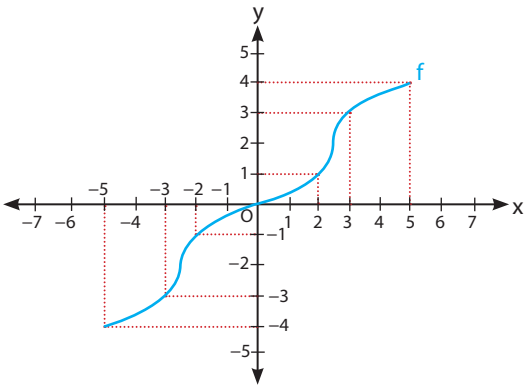
f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre tablodaki ilgili yerleri doldurunuz. Elde ettiğiniz sonuçları grafik temsillerinden nasıl elde ettiğinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

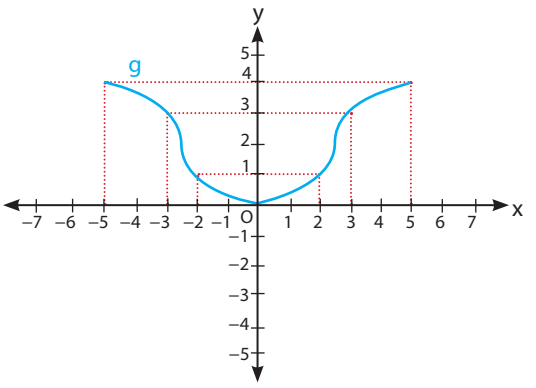
	f Fonksiyonu	g Fonksiyonu
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Fonksiyonun Sıfırları		
Pozitif Olduğu Aralıklar		
Negatif Olduğu Aralıklar		
Artan Olduğu Aralıklar		
Azalan Olduğu Aralıklar		
Maksimum Noktası ve Değeri		
Minimum Noktası ve Değeri		
Örten Olma Durumu		
Bire Bir Olma Durumu		

3. Uygulama

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Aşağıda [-5, 5] nda tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.





1. Verilen grafiklere göre aşağıdaki tabloları doldurunuz.

x	f(x)	x	f(x)
2		–2	
3		–3	
5		–5	

x	g(x)	x	g(x)
2		–2	
3		–3	
5		–5	

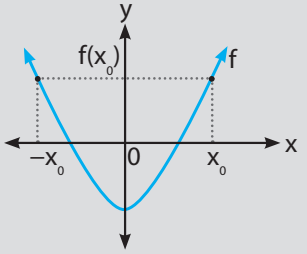
2. Yukarıdaki grafiklerde f ve g fonksiyonlarının hangi nokta veya doğruya göre simetrik olduklarını bulunuz.

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçları altta verilen örnekteki gibi cebirsel olarak ifade ediniz.

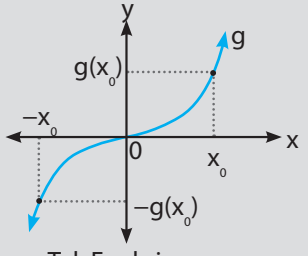
$f(-x) = f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için

- $f(-x_0) = f(x_0)$ şartını sağlayan f fonksiyonuna **çift fonksiyon**,
- $g(-x_0) = -g(x_0)$ şartını sağlayan g fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.



Çift Fonksiyon



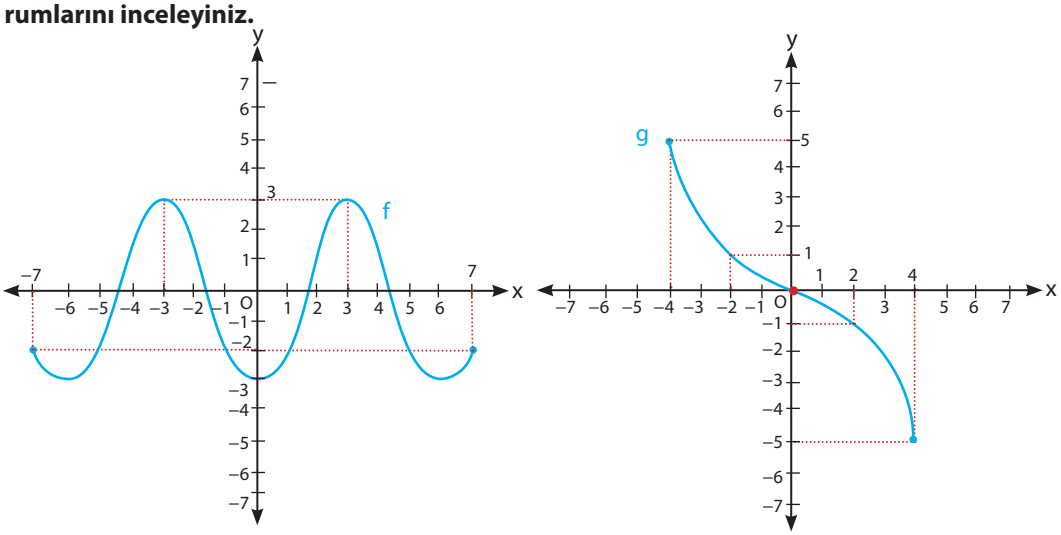
Tek Fonksiyon

- Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine, tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.
- Bir fonksiyon tek ya da çift olmak zorunda değildir.

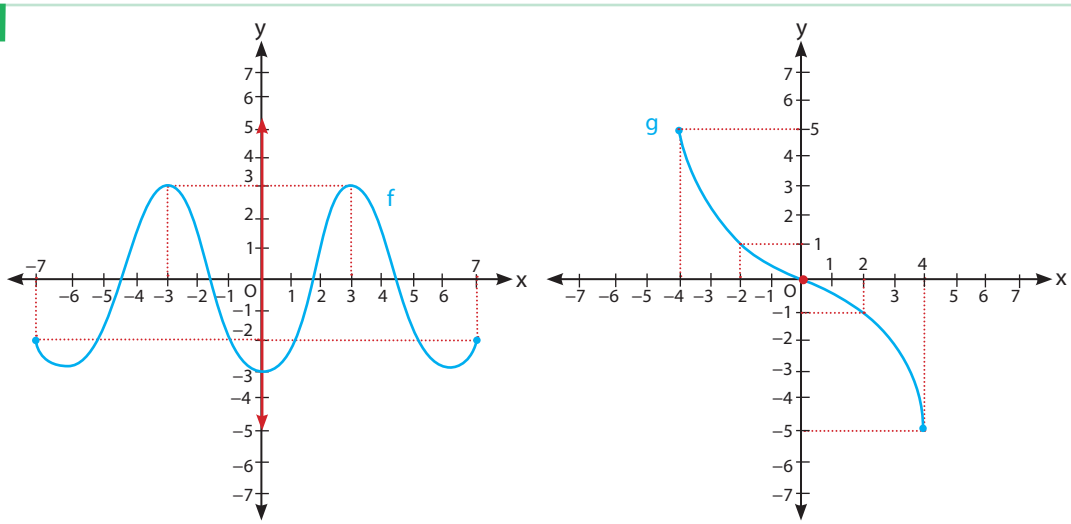
5. Örnek

Aşağıda f ve g fonksiyonlarına ait iki farklı grafik verilmiştir.

Verilen grafiklerden faydalanarak f ve g fonksiyonlarının tek ya da çift fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.



Çözüm



Bir fonksiyonun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını anlamak için fonksiyonun cebirsel veya grafik temsilleri üzerinden yorum yapılabilir.

1. yol

f fonksiyonunun $\forall x_0 \in [-7, 7]$ için $f(-x) = f(x)$ şartını sağladığı görülür.

Örneğin $f(-7) = f(7) = -2$, $f(-3) = f(3) = 3$'tür.

Bu nedenle f fonksiyonu çift fonksiyondur.

g fonksiyonunun $\forall x_0 \in [-7, 7]$ için $g(-x) = -g(x)$ şartını sağladığı görülür.

Örneğin $g(-4) = -g(4) = 5$, $g(-2) = -g(2) = 1$'dir.

Bu nedenle g fonksiyonu tek fonksiyondur.

2. yol

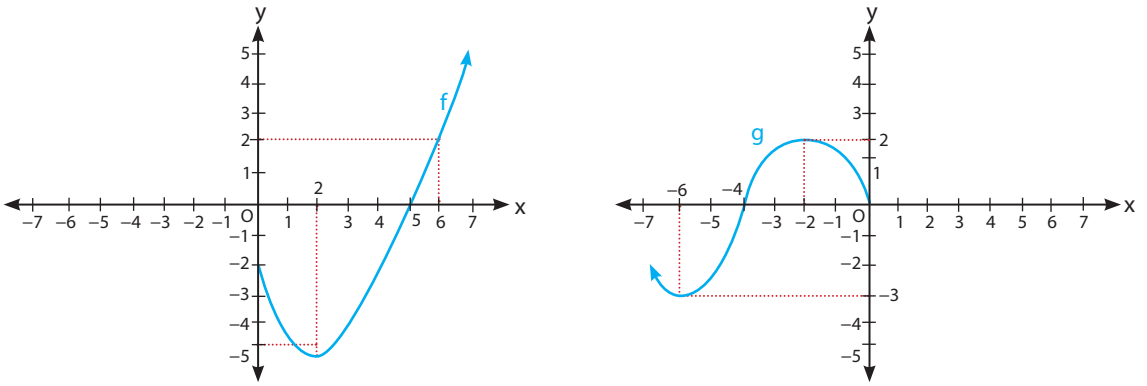
Grafik üzerinden yorumlarsak f fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğu için f çift fonksiyondur.

g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğu için g tek fonksiyondur.

3. Sıra Sizde

Aşağıda gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ve g fonksiyonlarına ait iki farklı grafik yer almaktadır. Bu grafiklerin bir bölümüne yer verilmiştir.

f çift fonksiyon, g tek fonksiyon olduğuna göre fonksiyonların eksik olan kısımlarını tamamlayınız.



Fonksiyon Kavramının Tarihi

Fonksiyon kavramına ilk olarak Antik Yunan ve Babilliler döneminde rastlanır. Babilliler, gökyüzündeki hareketleri uzun süre gözlemleyerek zaman ile konum arasında düzenli ilişkiler kurmuş, özellikle Venüs'ün hareketlerinin döngüsel tekrarını tespit ederek belirli tarihlerdeki konumunu öngörebilmişlerdir. Benzer şekilde, Mısırlılar Nil Nehri'nin taşma zamanlarını tahmin etmek için Güneş'in yıllık hareketlerini ve Sirius yıldızının doğuşunu gözlemlemişlerdir. Antik Yunan'daki matematikçilerden Öklid, doğrudan fonksiyon terimini kullanmasa da iki nicelik arasındaki ilişkileri tarif etmek için geometrik yöntemlere başvurmuş ve bu tür çalışmaların temelini atmıştır.

16. yüzyıla gelindiğinde matematiğin sembolik dili oldukça gelişmiş ve fonksiyon kavramı büyük bir dönüşüm geçirmiştir. Fransız matematikçi René Descartes'ın (Röne Dekart) analitik geometriyi geliştirmesi ve dik koordinat sisteminin ortaya çıkması ile fonksiyonların cebirsel ve grafik temsilleri gelişmeye başlamıştır.

18. yüzyılda İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (Leonhard Oyler), fonksiyon kavramını daha sistematik hâle getirmiştir. Euler, f(x) gösterimini kullanarak bir değişkenin başka bir değişkene bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermiştir. Euler'in çalışmaları, fonksiyonun belirli bir kural veya formülle ifade edilen bir bağıntı olarak anlaşılmasını sağlamıştır. 19. yüzyılın başlarında Alman matematikçi Dirichlet (Dirikli) fonksiyonların tanımlanması ve sınıflandırılması konusunda yaptığı çalışmalar ile fonksiyon tanımını formal hale getirmiştir.

20. yüzyılda fonksiyon kavramı, matematiğin temel taşlarından biri hâline gelerek daha genel ve soyut yapılarla ilişkilendirilmiştir. Fonksiyonlar artık yalnızca iki nicelik arasındaki bir bağıntı olarak değil daha geniş matematiksel çerçeveler içinde ele alınmaktadır. Ancak günlük hayatta, çeşitli bilim dallarında ve gerçek sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar hâlâ büyük bir öneme sahiptir. Mühendislikten ekonomiye, fizikten bilgisayar bilimlerine kadar pek çok alanda, iki değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonlarla sıkça karşılaşılır. Bu yönüyle fonksiyon kavramı, yalnızca teorik bir yapı değil, aynı zamanda problemlerin modellenmesi ve çözümünde güçlü bir araçtır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

4. Sıra Sizde

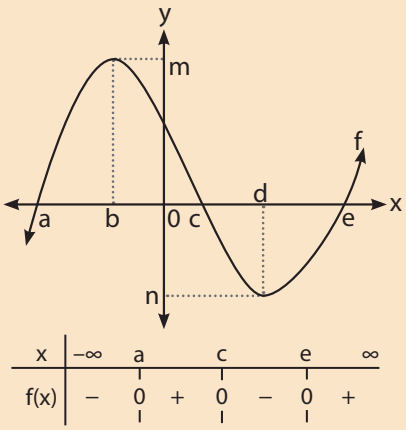
"Gerçek sayılarda tanımlı ve iki nicelik arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonlarla hayatın hemen hemen her alanında karşılaşılabilir. Fonksiyon kavramının işlevsel boyutu, matematiğin pek çok alanında ve farklı disiplinlerde problem çözme ve modelleme açısından çok önemli bir yer tutar. İşlevsel boyutta fonksiyonlar; bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında kurdukları ilişki sayesinde sistemlerin davranışlarının anlaşılmasına, analiz edilmesine ve tahminde bulunulmasına yardımcı olur."

Verilen metinden yola çıkarak sonraki sayfadaki disiplinleri örnekteki gibi fonksiyonun işlevsel boyutuna ait uygun örneklerle eşleştiriniz. Verilen disiplinlerle alakalı birer örnek daha yazınız. Sonuçlarınızı arkadaşlarınızla paylaşınız.

Fizik | Mühendislik | Ekonomi | Eğitim | Matematik | Teknoloji

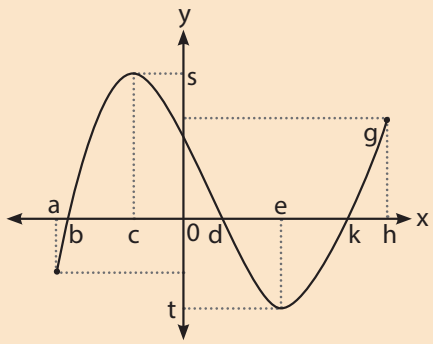
- Köprü tasarımında yük ve dayanıklılık arasındaki ilişki
- Ders çalışma süresi ile başarı düzeyi arasındaki ilişki
- Bir ürünün fiyatı ve talebi arasındaki ilişki
- Bir cismin hızı veya ivmesinin zamana bağlı değişimi
- Kare şeklinde verilen bir arazinin kenarı ile alanı arasındaki ilişki

Kontrol Noktası



x	$-\infty$	a		c		e	∞
f(x)	−	0	+	0	−	0	+

- f(x) < 0 şartını sağlayan aralık $(-\infty, a) \cup (c, e)$, f(x) > 0 şartını sağlayan aralık $(a, c) \cup (e, \infty)$ dır.



x	$-\infty$	a	b	d	f	h	∞
g(x)	Tanımsız	−	0 +	0 −	0 +		Tanımsız

- g(x) < 0 şartını sağlayan aralık $[a, b) \cup (d, k)$, g(x) > 0 şartını sağlayan aralık $(b, d) \cup (k, h]$ dır.

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

- f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- f fonksiyonun sıfırları a, c ve e dir.
- f fonksiyonu $\forall x \in (-\infty, b]$ için $x > y$ iken $f(x) > f(y)$ olduğundan $(-\infty, b]$ nda artan, $\forall x \in [b, d]$ için $x > y$ iken $f(x) < f(y)$ olduğundan $[b, d]$ nda azalan, $\forall x \in [d, \infty)$ için $x > y$ iken $f(x) > f(y)$ olduğundan $[d, \infty)$ nda artandır.
- f fonksiyonunun [a, e] nda; maksimum değeri m dir. Fonksiyonun maksimum değerini aldığı nokta x = b dir. f fonksiyonunun minimum değeri n dir. Fonksiyonun minimum değerini aldığı nokta x = d dir.
- f fonksiyonu örtendir. Bire bir değildir. Ne tek ne çift fonksiyondur.

[a, h] nda tanımlı ve gerçek sayılarda değerli bir g fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

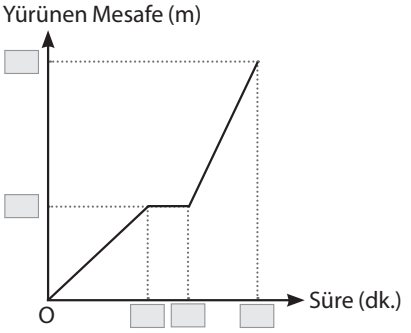
- g fonksiyonunun tanım kümesi [a, h], görüntü kümesi [t, s] dır.
- g fonksiyonunun sıfırları b, d ve k dır.
- g fonksiyonu $\forall x \in [a, c]$ için $x > y$ iken $g(x) > g(y)$ olduğundan [a, c] nda artan, $\forall x \in [c, e]$ için $x > y$ $g(x) < g(y)$ olduğundan iken [c, e] nda azalan, $\forall x \in [e, h]$ için $x > y$ iken $g(x) > g(y)$ olduğundan [e, h] nda artandır.
- g fonksiyonunun maksimum değeri s dir. Fonksiyonun maksimum değerini aldığı nokta x = c dir. g fonksiyonunun minimum değeri t dir. Fonksiyonun minimum değerini aldığı nokta x = e dir.
- g fonksiyonu örten değildir. Bire bir değildir. Ne tek ne çift fonksiyondur.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Alıştırmalar

1. Evinden okula gitmek üzere yola çıkan Yavuz, 10 dakika boyunca sabit hızla dakikada 15 metre yol alarak yürümüştür. Sonrasında yolda karşılaştığı arkadaşı ile 5 dakika sohbet eden Yavuz okula yetişmek için hızını iki katına çıkarmış ve 15 dakika sonra okula varmıştır. Süreye bağlı yürüdüğü mesafeyi belirten grafik aşağıda verilmiştir.



Buna göre

a) Dik koordinat sisteminde boş bırakılan kutucukları doldurunuz.

b) Tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

c) Verilen grafiğin bir fonksiyon olup olmadığını sebepleriyle yazınız.

2. Aşağıda bir f fonksiyonuna ait bazı nitel özellikler verilmiştir.

- Tanım kümesi (–3, 5], görüntü kümesi (–1, 4] dır.
- f fonksiyonunun sıfırı –2'dir.
- f artan fonksiyondur.
- f bire birdir.

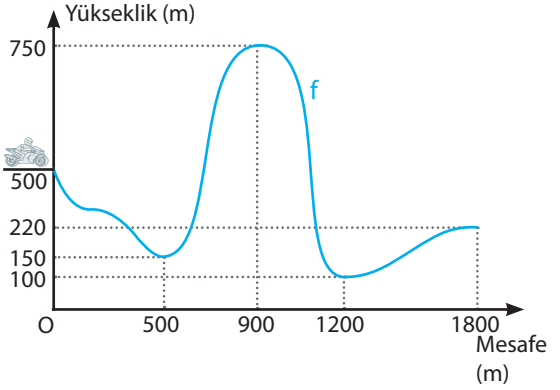
Buna göre

a) Yukarıdaki şartlara uygun bir f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Çizdiğiniz grafiği arkadaşlarınızla karşılaştırınız. Kaç farklı grafik çizilebileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Aşağıda bir motosiklet yarış parkurunun mesafe yükseklik grafiğine ait fonksiyon verilmiştir.

Buna göre



a) f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

b) f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları yazınız.

c) f fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini yazınız.

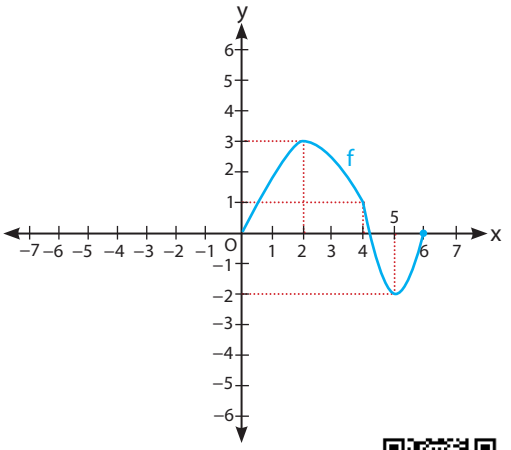
ç) f fonksiyonunun bire bir olma durumunu inceleyiniz.

4. Aşağıda f fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı verilmiştir.

f tek fonksiyon olduğuna göre

a) f fonksiyonunun grafiğini tamamlayınız.

b) f(–5) + f(–4) + f(–2) **değerini bulunuz.**

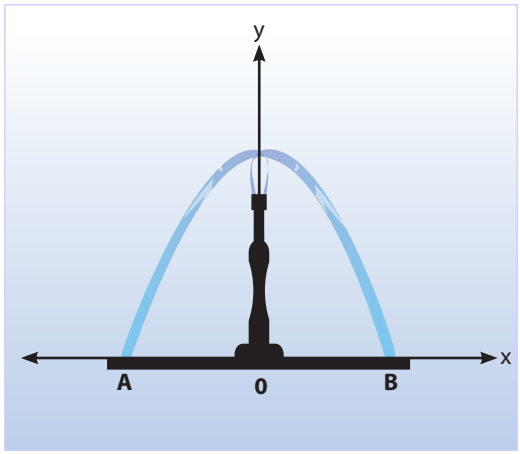


4. Tema alıştırma ek soruları

4.2. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

1. Yanda bir fıskiyeden yere doğru eğrisel hareket ile fışkıran suyun görseli verilmiştir. Suyun hareketi $y = f(x) = -x^2 + 4$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu ile dik koordinat sistemi üzerinde modellenmiştir.



Buna göre

a) Verilen fonksiyondan faydalanarak aşağıda verilen x değerlerine karşılık gelen y değerlerini bulunuz.

x	–2	–1	0	1	2
y					

b) Tablodaki x ve y değerlerini yukarıda verilen dik koordinat sisteminde işaretleyiniz.

2. Dik koordinat sisteminde işaretlediğiniz değerler üzerinden suyun yüksekliğinin hangi noktada en yüksek değeri aldığını ve bu değerin ne olduğunu bulunuz. Bu değerin fonksiyon için anlamını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Dik koordinat sistemi üzerindeki A ve B noktaları arasındaki mesafenin nasıl bulunabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. A ve B noktalarının fonksiyon için ne anlama geldiğini açıklayınız.

Fizikte serbest düşen bir cismin hareketini, ekonomide maksimum kâr ya da minimum maliyet analizlerini ifade eden cebirsel temsiller karesel fonksiyon örnekleridir. Yukarıdaki örnekte fıskiyeden çıkan suyun hareketini modelleyen $f(x) = -x^2 + 4$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu karesel bir fonksiyondur.

4. Uygulama

Gerçek Sayılarda $f(x) = x^2$ Şeklinde Tanımlı f Karesel Referans Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

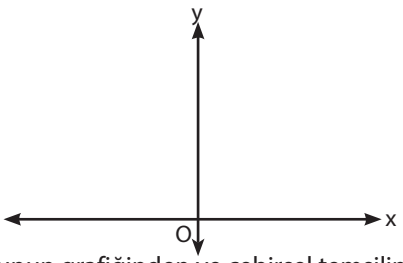
Yandaki görselde bir mühendisin bilgisayar ekranı üzerinde tasarladığı köprü projesinin çizimi verilmiştir. Mühendis, köprü direklerini birbirine bağlayan halatı $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile modellemiş ve dik koordinat sistemine aktarmıştır.

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunu dikkate alarak aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun cebirsel temsilinden faydalanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
f(x)	...										...

2. Tablodaki değerleri kullanarak aşağıdaki dik koordinat sisteminde $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



3. $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğinden ve cebirsel temsilinden faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

b) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

c) Fonksiyonun işaretini belirleyiniz.

ç) Fonksiyonun sıfırını belirleyiniz.

d) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

e) Fonksiyonun maksimum-minimum değerlerinin bulunup bulunmadığını, varsa bu değerleri hangi noktalarda aldığını belirleyiniz.

f) Fonksiyonun bire bir fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

g) Fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.

ğ) Fonksiyonun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını grafik ve cebirsel temsillerini inceleyerek belirleyiniz. Fonksiyonun grafiğinden faydalanarak simetri doğrusunu yazınız. Elde ettiğiniz simetri doğrusunu fonksiyonun çiftliği ile ilişkilendiriniz.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna karesel referans fonksiyon denir. Karesel referans fonksiyonun grafiği parabol olarak adlandırılır.

6. Örnek

f: [–3, 2] →ℝ, f(x) = x^2 şeklinde tanımlı karesel fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini çizerek

a) Fonksiyonun görüntü kümesini belirleyiniz.

b) Fonksiyonun işaretini inceleyiniz.

c) Fonksiyonun sıfırını inceleyiniz.

ç) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

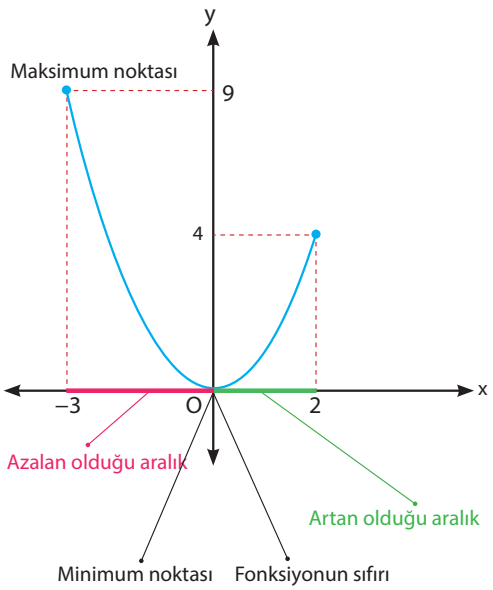
d) Maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.

e) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

f) Fonksiyonun örtenliğini inceleyiniz.

Çözüm

f: [–3, 2] →ℝ, f(x) = x^2 şeklinde tanımlı karesel fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir:



Buna göre fonksiyonun

a) Görüntü kümesi [0, 9] dır.

b)

x	–∞		–3		0		2		∞
x^2	Tanımsız		+	0	+	0	+		Tanımsız

$\forall x \in [-3, 0) \cup (0, 2]$ için f(x) > 0 olduğundan fonksiyonun bu aralıkta işareti pozitiftir.
NOT: İşaret tablosunda eşit iki kök çift sıfır ile gösterilir.

c) x = 0 için f(x) = 0 olduğundan fonksiyonun sıfırı 0'dır.

ç) $\forall x \in [-3, 0]$ için a > b iken f(a) < f(b) olduğundan [–3, 0] nda azalan,
$\forall x \in [0, 2]$ için a > b iken f(a) > f(b) olduğundan [0, 2] nda artandır.

d) Fonksiyonun maksimum değeri 9'dur. Fonksiyon maksimum değerini x = –3 noktasında alır. Fonksiyonun minimum değeri 0'dır. Fonksiyon minimum değerini x = 0 noktasında alır.

e) Değer aralığındaki bazı f(x) değerlerine karşılık gelen farklı x değerleri olduğundan f bire bir değildir. Örneğin f(–2) = f(2) = 4 iken –2 ≠ 2 olduğundan bire bir değildir.

f) Değer kümesindeki her f(x) değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden f fonksiyonu tanımlandığı aralıkta örten değildir. Örneğin 10 = f(a) olacak şekilde a ∈ [–3, 2] yoktur.

5. Uygulama

Gerçek Sayılarda Tanımlı f(x) = x^2 Karesel Referans Fonksiyonundan Türetilen g(x) = a · f(x ± r) ± k (a, r, k ∈ ℝ, a ≠ 0) Karesel Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

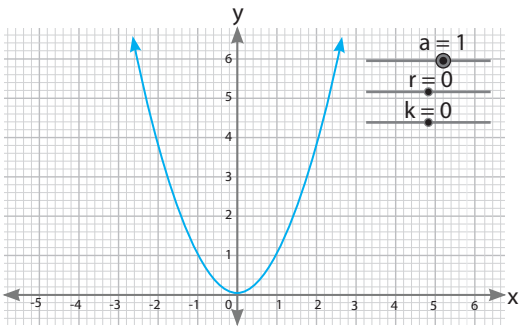
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, r, k sürgülerini tanımlayarak aralığı –5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Cebir menüsünden **Giriş** bölümüne f(x) = a · $(x + r)^2$ + k yazarak giriş yapınız.

3. adım: Sürgüleri a = 1, r = 0, k = 0 seçerek f(x) = x^2 karesel referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Bir önceki sayfada verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) r = 0, k = 0 iken a sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri girerek elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş olan kısımları örneklerdeki gibi doldurunuz.

Tablo 1: *r = 0, k = 0 İken a Sürgüsündeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a Sürgüsünün Değeri	Oluşan Karesel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2 + k$	Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = –1	$h(x) = -x^2$	-1 ile çarpma	x eksenine göre yansıma
m(x)	a = 2	$m(x) = 2x^2$	2 ile çarpma	2 kat dikey daralma
n(x)	a = 4			
s(x)	a = –3			

b) k = 0 iken a ve r sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2: *Etkinliğin k = 0 İken a ve r Sürgüsündeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a ve r Sürgülerinin Değerleri	Oluşan Karesel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2 + k$	Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	$a = \frac{1}{2}$ r = 2	$h(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2$	Tüm bağımsız değişkenlere 2 ekleme, $\frac{1}{2}$ ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, 2 kat dikey genişleme
m(x)	a = 1 r = –1			
n(x)	a = 2 r = 3			
s(x)	a = –2 r = –2			

c) r = 0 iken a ve k sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3: *r = 0 İken a ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

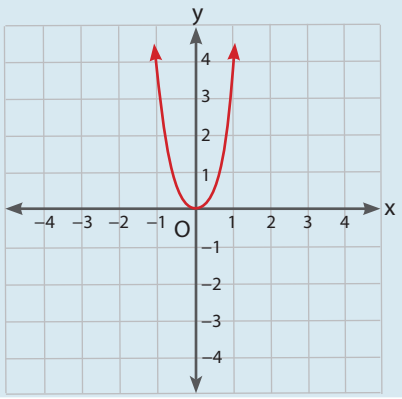
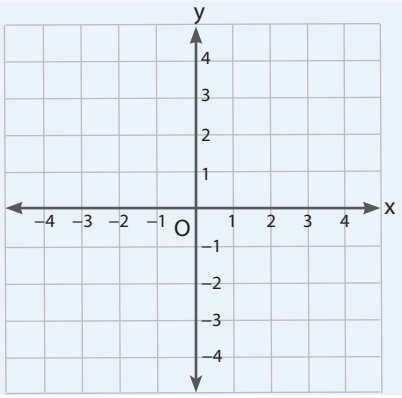
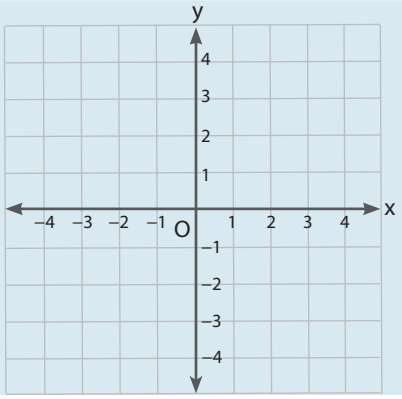
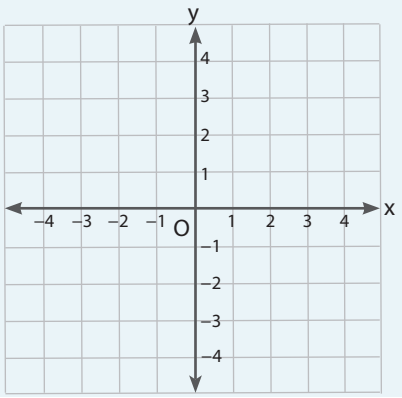
Fonksiyon İsmi	a ve k Sürgülerinin Değerleri	Oluşan Karesel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2+k$	Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 k = 2	$h(x) = x^2 + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değere 2 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
m(x)	a = 1 k = –1			
n(x)	a = 4 k = 3			
s(x)	a = –2 k = –2			

ç) a, r ve k sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden aşağıdaki tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

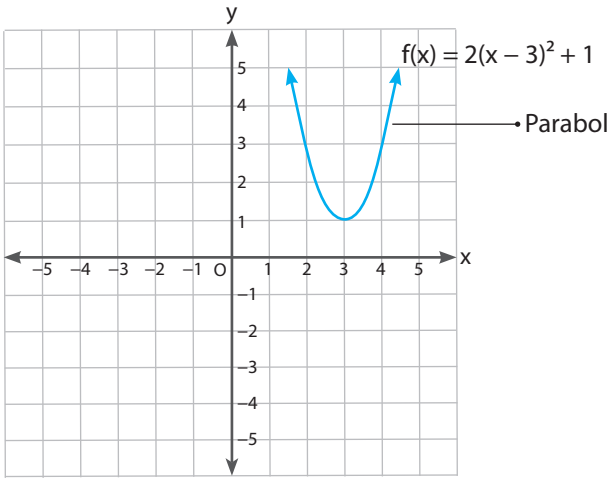
Tablo 4: *a, r ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a, r ve k Sürgülerinin Değerleri	Oluşan Karesel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2+k$	Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 r = 1 k = 3	$h(x) = (x + 1)^2+ 3$	Bağımsız değişkenin 1 fazlasının aldığı değerin karesine 3 ekleme	x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
m(x)	a = 1 r = –2 k = –1			
n(x)	a = 2 r = 3 k = –4			
s(x)	a = –1 r = –1 k = 1			

2. Aşağıdaki tabloyu f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümlerle elde edilen karesel fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini örnekteki gibi doldurunuz. Grafik temsilini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsili	Grafik Temsili
4 kat dikey daralma	$g(x) = 4 \cdot x^2$	
x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme		
x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme		
2 kat dikey genişleme, x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme		

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(x + r)^2 + k$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların cebirsel temsiline karesel fonksiyon denir. Karesel fonksiyonların grafiği parabol belirtir.

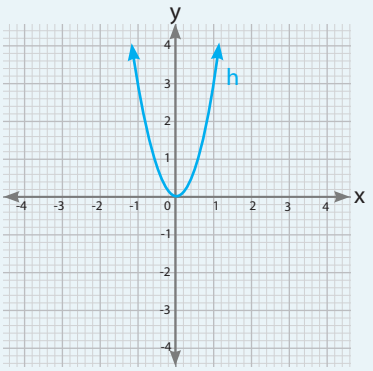
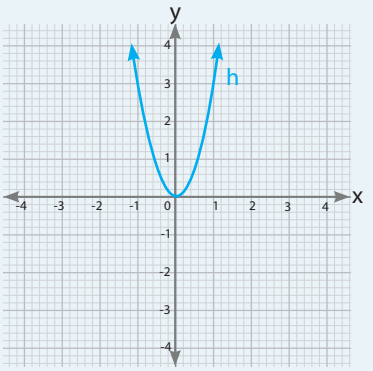


3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonunun nitel özelliklerinden hareketle aşağıda cebirsel temsili verilen karesel fonksiyonun nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

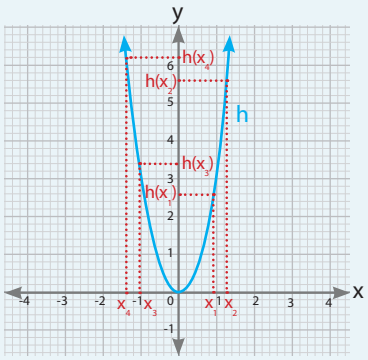
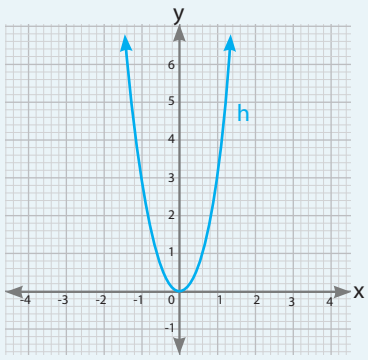
$g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$, $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$		
Nitel Özellikleri	**Varsayım**	
	a > 0	**a < 0**
Tanım Kümesi	a > 0 için tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.	a < 0 için tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

4. Aşağıda f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilmiş bazı karesel fonksiyonlar verilmiştir.

a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, tabloda istenen nitel özellikleri örnekteki gibi doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = 3x^2$	Grafik	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonun görüntü aralığının $[0, \infty)$ olduğu görülmektedir. Görüntü kümesi $[0, \infty)$ dır.
	Cebirsel	f karesel referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. $h(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot x^2 = 3x^2$ olduğu için h fonksiyonun da tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.	f karesel referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[0, \infty)$ dır. $h(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot x^2 = 3x^2$ olduğu için h fonksiyonun da görüntü kümesi $[0, \infty)$ olur.
$m(x) = -2(x + 2)^2$	Grafik		
	Cebirsel		
$n(x) = 3(x - 1)^2 + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

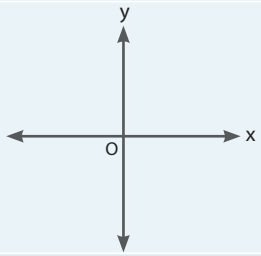
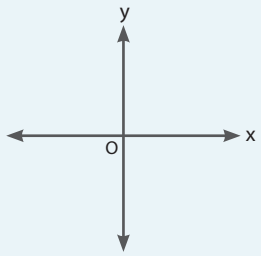
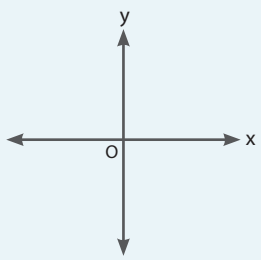
b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, tabloda istenen nitel özellikleri örnekteki gibi doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$h(x) = 3x^2$	Grafik	 $\forall x \in [0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için $h(x_1) < h(x_2)$ olduğundan $[0, \infty)$ da h artandır. $\forall x \in (-\infty, 0]$ ve $x_4 < x_3$ için $h(x_4) > h(x_3)$ olduğundan $(-\infty, 0)$ da h azalandır.	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonu $x = 0$ noktasında minimum değerini alır. Fonksiyonun minimum değeri 0'dır. Maksimum değeri yoktur.
	Cebirsel	$\forall x_3, x_4 \in (-\infty, 0]$ ve $x_4 < x_3$ için f karesel referans fonksiyonu azalandır. $x_4 < x_3 < 0$ olmak üzere $\forall x_3, x_4$ için $x_4^2 > x_3^2$ olduğundan $3x_4^2 > 3x_3^2$ bulunur. Buradan da $h(x_4) > h(x_3)$ elde edilir. Bu nedenle $(-\infty, 0]$ da h fonksiyonu azalandır. $\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için f karesel referans fonksiyonu artandır. $0 < x_1 < x_2$ olmak üzere $\forall x_1, x_2$ için $x_1^2 < x_2^2$ olduğundan $3x_1^2 < 3x_2^2$ bulunur. Buradan da $h(x_1) < h(x_2)$ elde edilir. Bu nedenle $[0, \infty)$ da h fonksiyonu artandır.	
$m(x) = -2(x + 2)^2$	Grafik		
	Cebirsel		

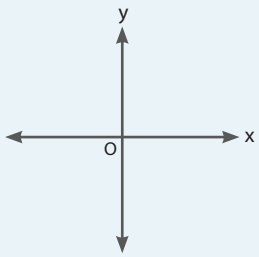
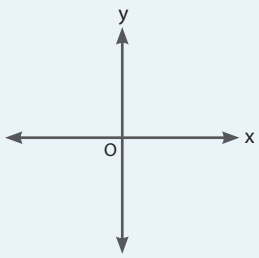
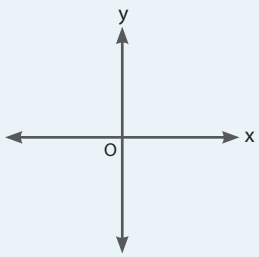
$n(x) = 3(x-1)^2+1$	Grafik		
	Cebirsel		

5. Aşağıda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonundan türetilmiş bazı karesel fonksiyonlar verilmiştir.

a) Verilen fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

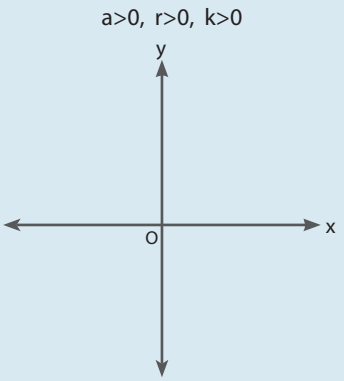
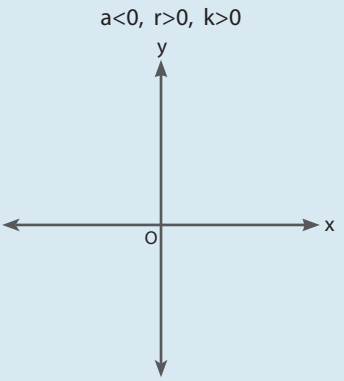
Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$k(x) = 2x^2$	Grafik		
	Cebirsel		
$r(x) = -2(x-1)^2$	Grafik		
	Cebirsel		
$n(x) = 3(x-1)^2+1$	Grafik		
	Cebirsel		

b) Verilen fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$k(x) = 2x^2$	Grafik		
	Cebirsel		
$r(x) = -2(x - 1)^2$	Grafik		
	Cebirsel		
$n(x) = 3(x - 1)^2 + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

6. 4 ve 5. maddelerdeki n fonksiyonunun çizimini yaptığınız grafik ile kullandığınız matematik yazılımından elde ettiğiniz nitel özelliklerini karşılaştırınız. Elde ettiğiniz farklı sonuçlar varsa nedenlerini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

7. Önceki sayfadaki tablolardan elde ettiğiniz bilgileri varsayımlarınız ile karşılaştırarak f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonundan türetilmiş $g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ karesel fonksiyonların nitel özellikleri hakkındaki önermenizi a>0, r>0, k>0 ve a<0, r>0, k>0 için ayrı ayrı oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel olarak veya cebirsel dil ile ifade ediniz.

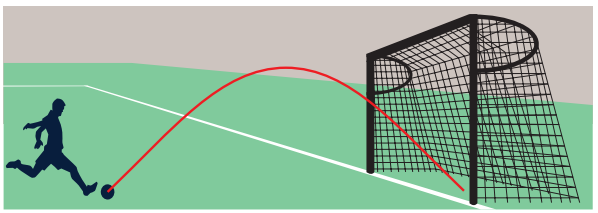
$g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R})$	a>0, r>0, k>0 	a<0, r>0, k>0 
Nitel Özellikler	**Genellemeler**	
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

8. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problem durumuna göre verilen soruları çözünüz.

Yanda bir futbolcunun kaleye çektiği şutta topun havadaki hareketini gösteren bir görsel verilmiştir. Futbol topunun bu hareketi, topun yerden yüksekliğinin (m) zamana bağlı (sn.) değişimini ifade eden $f(t) = -\frac{1}{2}(t - 4)^2 + 8$ şeklinde tanımlanan karesel fonksiyon ile modellenmiştir.

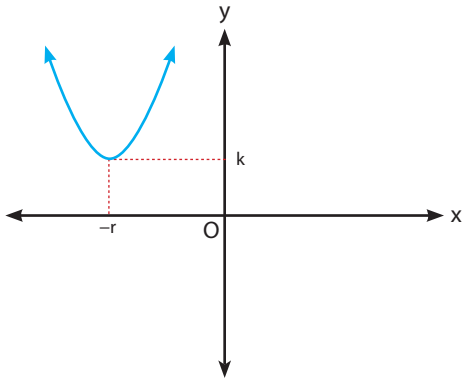
Buna göre

a) Topun çıkabileceği maksimum yüksekliğin, karesel referans fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulanmasıyla bulunabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.



b) Topun yüksekliğinin arttığı ve azaldığı zaman aralıklarını belirleyiniz.

9. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonundan türetilmiş $g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ karesel fonksiyonlarının $a > 0$, $r > 0$ ve $k > 0$ için grafiği aşağıdaki dik koordinat sistemine çizilmiştir. g fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi verilen grafik yardımıyla doğrulayınız veya cebirsel olarak ispatlayınız.



Nitel Özellikler	Grafik ile Doğrulama	Cebirsel İspat
Tanım Kümesi	Grafik incelendiğinde tüm gerçek sayılarda tanımlı olduğu görülmektedir.	$g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

10. Yukarıdaki tabloyu doldururken kullandığınız grafik ile doğrulama veya cebirsel ispat yöntemlerinin olumlu ya da olumsuz yönlerini sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. Bu yöntemleri $g(x) = x^2 + 2$ şeklinde tanımlı g karesel fonksiyonunun nitel özelliklerinden bire birlik ve artan-azalanlığının grafik ile doğrulama ve cebirsel ispatını yapınız. Bu yöntemleri kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

7. Örnek

Bir cismin hareketinden dolayı sahip olduğu enerjiye kinetik enerji denir. Kütlesi m (kg), hızı υ (m/sn.) olan bir cismin kinetik enerjisi E_k (Joule) olmak üzere $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2$ ile hesaplanır.

Yukarıda başlangıç noktasında hareketsiz duran bir kamyonet görseli verilmiştir. Kamyonete farklı miktarda yüklemeler yapılarak kütlesinde elde edilecek değişiklikler ile aracın hızının kinetik enerjiye olan etkileri araştırılacaktır.

Buna göre

a) Tabloda verilen m (kg) değerlerine göre aracın kinetik enerjisini hızına bağlı ifade eden cebirsel ifadeyi bir fonksiyon olarak ifade ediniz.

m (kg)	10	50	100	200
Hıza Bağlı Kinetik Enerjiyi Veren Fonksiyonun Cebirsel Temsili (E_k)				

b) Elde ettiğiniz fonksiyonların dik koordinat sisteminde grafik temsillerini çiziniz.

c) Çizdiğiniz grafikten yola çıkarak cismin hızındaki değişim ile kinetik enerjisindeki değişim arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

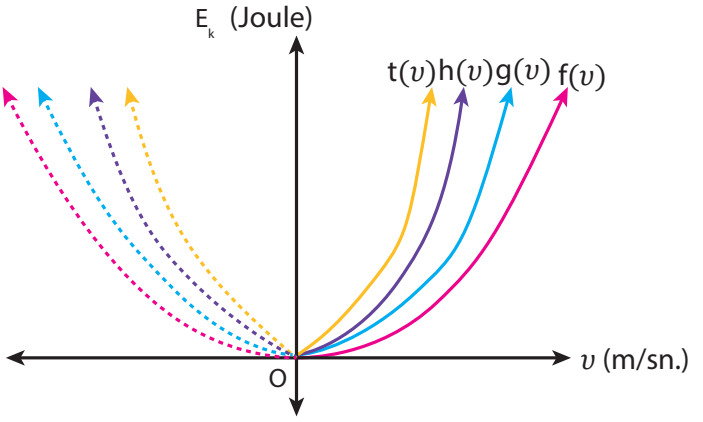
Çözüm

Aşağıdaki tabloda verilen kütle değerleri $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2$ ifadesinde yerine yazılırsa aracın kinetik enerjisini hızına bağlı olarak ifade eden cebirsel ifadeler elde edilir.

a)

Kütle (kg)	10	50	100	200
Hıza Bağlı Kinetik Enerjiyi Veren Fonksiyonun Cebirsel Temsili (E_k)	$f(\upsilon) = 5 \cdot \upsilon^2$	$g(\upsilon) = 25 \cdot \upsilon^2$	$h(\upsilon) = 50 \cdot \upsilon^2$	$t(\upsilon) = 100 \cdot \upsilon^2$

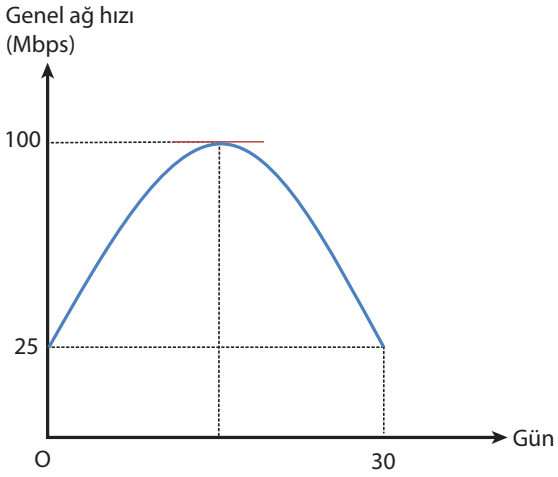
b)



c) Fonksiyonların grafik temsilleri incelendiğinde cismin hızı arttıkça kinetik enerjinin hızın karesi ile orantılı olarak arttığı görülür.

5. Sıra Sizde

Bir telekomünikasyon şirketi müşterilerine sınırsız genel ağ hizmeti vermektedir. Bu hizmeti, müşterilerin kullandığı kotaya bağlı olarak 25 Mbps ile 100 Mbps arasında değişen hızlarda sunmaktadır.



Yukarıda bu şirketin bir müşterisinin kullandığı genel ağın zamana (gün) bağlı hızı parabol şeklindeki bir eğri ile gösterilmiştir.

Buna göre

a) Müşterilerin en yüksek hızda genel ağ hizmetini ayın kaçıncı gününde aldığını bulunuz.

b) Genel ağ hızının ayın kaçıncı günleri arasında arttığını veya azaldığını bulunuz.

c) En yüksek hızda genel ağ hizmeti sunulduğu gün genel ağ hızının kaç Mbps olduğunu bulunuz.

ç) Karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerden faydalanarak parabol şeklindeki eğriyi $f(x) = a(x + r)^2 + k$ şeklinde ifade ediniz. a, r ve k katsayılarını nasıl bulabileceğinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

d) Müşterilerin 64 Mbps genel ağ hızı hizmetini ayın hangi günlerinde aldıklarını bulunuz.

Performans Görevi

Adı:	Karesel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Yapılan Dönüşümlerin Fonksiyonun Cebirsel Temsilinde Oluşturduğu Değişim
Beklenen Performans:	Karesel referans fonksiyonun grafik temsiline yapılan dönüşümlerin fonksiyonun cebirsel temsilinde oluşturduğu değişime dair rapor hazırlama
Görev:	Bu görevde karesel referans fonksiyonun grafik temsiline yapılan dönüşümlerin fonksiyonun cebirsel temsilinde oluşturduğu değişime dair bir rapor hazırlayarak sınıfta arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Öğretmeninizin rehberliğinde 4 kişilik bir çalışma grubu oluştururuz. • Grup çalışmasında her üyenin hangi görevleri üstleneceğine dair bir plan hazırlayınız. • Bir çalışma planı oluşturunuz. Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli olan $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonuna aşağıdaki tabloda verilen dönüşümleri uygulayınız.

x eksenine göre yansıma dönüşümü, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme dönüşümü	x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim öteleme dönüşümü	Her x değerine karşılık gelen y değerinin 2 katı, x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme dönüşümü	x eksenine göre yansıma dönüşümü, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü

	• Dönüşümleri uyguladığınızda oluşan fonksiyonların grafik temsilini çiziniz. • Grafik temsilinden faydalanarak fonksiyonların cebirsel temsilini yazınız. • Elde ettiğiniz sonuçları bir rapor hâline getiriniz. • Çalışmanızı 1 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Raporunuzu özenle hazırlayarak öğretmeninize zamanında ve eksiksiz teslim ediniz. • Raporunuzu sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili video

a, r, k, b ve c birer gerçek sayı, $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ şeklinde tamkare formu verilen fonksiyonların genel denklemi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dir.

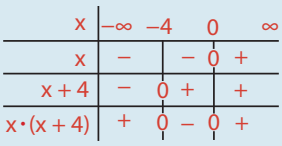
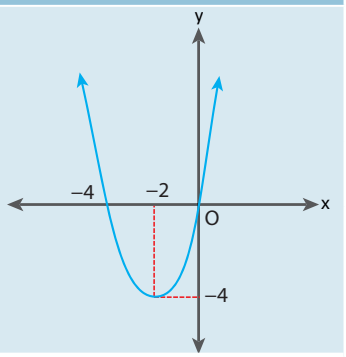
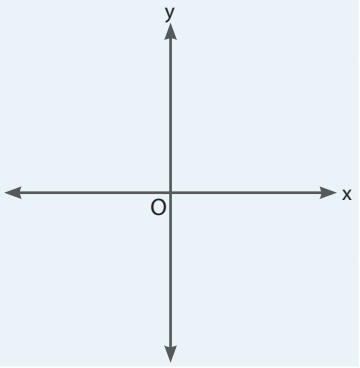
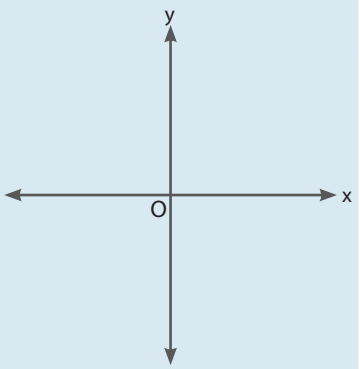
6. Uygulama

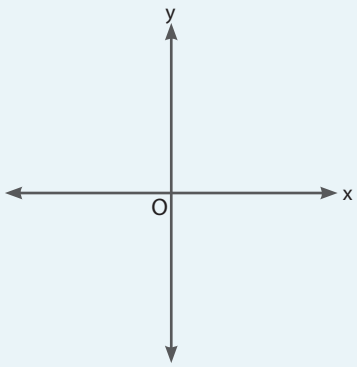
Cebirsel Temsili $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ Genel Formunda Olan Karesel Fonksiyonların $f(x) = a(x \pm r)^2 \pm k$ $(r, k \in \mathbb{R})$ Tamkare Formuna Dönüştürülmesi

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Tabloda cebirsel temsilleri $f(x) = ax^2 + bx + c$ genel formunda verilen gerçek sayılarda tanımlı ve değerli fonksiyonlara aşağıda verilen işlemleri örnekteki gibi sırasıyla uygulayınız.

- Verilen fonksiyonların cebirsel ifadesini tamkareye tamamlayarak grafik temsilini dönüşümlerle çiziniz.
- Tamkare formundan faydalanarak fonksiyonun (varsa) sıfırlarını bulunuz ve grafik üzerinde gösteriniz. İşaret tablosu veya cebirsel inceleme yöntemlerinden uygun olan birini kullanarak fonksiyonun işaretini belirleyiniz.
- Fonksiyonun sıfırlarından ve simetri doğrusundan faydalanarak fonksiyonun maksimum veya minimum noktalarını bulunuz.

Cebirsel Temsili	Tamkareye Tamamlama	İşareti	Grafiği
$f(x) = x^2 + 4x$	$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 4$ $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ **Sıfırları** $(x + 2)^2 - 4 = 0$ $(x + 2)^2 - 2^2 = 4$ $(x + 2 - 2) \cdot (x + 2 + 2) = 0$ $x \cdot (x + 4) = 0$ $x = 0$ ve $x = -4$		
$g(x) = x^2 - 6x$	**Tamkareye Tamamlama** **Sıfırları**		
$h(x) = -x^2 + 2x - 1$	**Tamkareye Tamamlama** **Sıfırları**		

Cebirsel Temsili	Tamkareye Tamamlama	İşareti	Grafiği
$m(x) = x^2 - 4x + 5$	**Sıfırları**		

2. Yukarıda cebirsel temsilleri verilen fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıkların belirlenmesini sağlayan nokta hakkındaki varsayımlarınızı yazınız.

3. Elde ettiğiniz varsayımdan faydalanarak verilen fonksiyonların artan-azalan olduğu aralıkları ve fonksiyonun minimum-maksimum noktasını ve değerini aşağıdaki tabloda ilgili kısma örnekteki gibi yazınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar		Maksimum-Minimum Noktası		Maksimum-Minimum Değeri	
	Azalan	Artan	Maksimum	Minimum	Maksimum	Minimum
$f(x) = x^2 + 4x$	$(-\infty, -2]$	$[-2, \infty)$	Yoktur.	$x = -2$	Yoktur.	-4
$g(x) = x^2 - 6x$						
$h(x) = -x^2 + 2x - 1$						
$m(x) = x^2 - 4x + 5$						

4. Aşağıda verilen problemi çözünüz.

Müşterilerine özel bir kahve sunan bir kafe sahibi bu kahveyi 120 TL'den satmaktadır. Kafe sahibi, fiyat artışının müşteri sayısını nasıl etkilediğini anlamak ve toplam gelirini maksimuma çıkaracak fiyatı belirlemek istemektedir.

Yapılan bir pazar araştırmasına göre kahve fiyatı her 10 TL artırıldığında kahve satın alan müşteri sayısı 20 kişi azalmakta, kahve fiyatı her 10 TL azaltıldığında ise müşteri sayısı 20 kişi artmaktadır. Kafe sahibi bu kahveyi şu anda 120 TL'den günde 200 kişiye satmaktadır.

Bu gerçek yaşam modeline göre

a) x her bir 10 TL'lik fiyat artışını ifade etmek üzere müşteri sayısını ve kahvenin yeni fiyatını cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Elde ettiğiniz cebirsel ifadelerle kafe sahibinin bu kahveden elde edeceği gelir fonksiyonunu (g(x)) modelleyiniz.

c) g fonksiyonunu tamkareye tamamlama metodu ile $g(x) = a(x + r)^2 + k$ şeklinde yazınız.

ç) Elde ettiğiniz gelir fonksiyonundan yararlanarak kafe sahibinin kahveyi kaç TL'den satarsa maksimum gelire ulaşacağını hesaplayınız.

d) Kafe sahibinin bu kahveden bir günde elde edeceği maksimum geliri bulunuz.

5. Fonksiyonun sıfırlarını, artan-azalan olduğu aralıkları ve maksimum-minimum noktalarını elde ederken kullandığınız tamkareye tamamlama, grafik temsilinden yararlanma ve çarpanlara ayırma yöntemlerini kullanışlılık açısından değerlendiriniz. Sonuçları sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

8. Örnek

Tarım alanlarında bitkilerin büyüme hızı (verimlilik), gübre miktarına (x) bağlı olarak artar ancak aşırı gübreleme nedeniyle belli bir noktadan sonra düşüş gösterir. Bu ilişki,

- x: Uygulanan Gübre Miktarı (kg)
- v(x): Verimlilik (kg/m^2) olmak üzere

$v(x) = -0{,}1x^2 + 4x + 20$ şeklinde ifade edilir.

Buna göre

a) Gübre miktarının maksimum verimlilik sağladığı değeri bulunuz.

b) Maksimum verimlilik değerini hesaplayınız.

c) Gübre miktarının sıfır olduğu durumda verimliliği bulunuz.

Çözüm

Verilen fonksiyon tamkare formuna çevrilirse

$v(x) = -0{,}1x^2 + 4x + 20$

$v(x) = -0{,}1(x^2 - 40x - 200)$

$v(x) = -0{,}1(x^2 - 40x + 400 - 600)$

$v(x) = -0{,}1[(x - 20)^2 - 600]$

$v(x) = -0{,}1(x - 20)^2 + 60$ elde edilir.

Yukarıdaki v(x) fonksiyonu yorumlandığında

a) Maksimum verimlilik için gübre miktarı x = 20 kg olmalıdır.

b) Maksimum verimlilik değeri 60 kg/m^2 olur.

c) $v(0) = -0{,}1(0 - 20)^2 + 60 = -0{,}1 \cdot 400 + 60 = -40 + 60 = 20$ bulunur.

Buna göre gübre kullanılmadığında başlangıç verimliliği 20 kg/m^2 olur.

6. Sıra Sizde

Aşağıda gerçek sayılarda tanımlı ve değerli cebirsel temsili $f(x) = ax^2 + bx + c$ genel formunda olan karesel fonksiyonlar verilmiştir.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **2.** $g(x) = -x^2 - 4x$ **3.** $h(x) = x^2 + 6x + 10$

Buna göre

a) Fonksiyonların grafiklerini karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerden faydalanarak çiziniz.

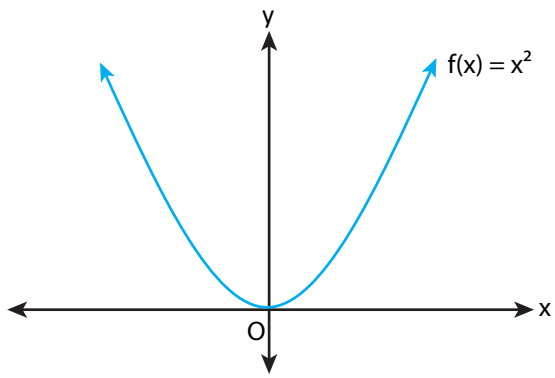
b) Fonksiyonların (varsa) sıfırlarını bulunuz ve işaret tablosunu yapınız.

c) Fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ç) Fonksiyonların maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.

9. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f karesel referans fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre şıklarda verilen tanım aralıklarına göre karesel referans fonksiyonun görüntü kümelerini bulunuz.

a) $x < 0$

b) $x \geq 0$

c) $-1 < x < 2$

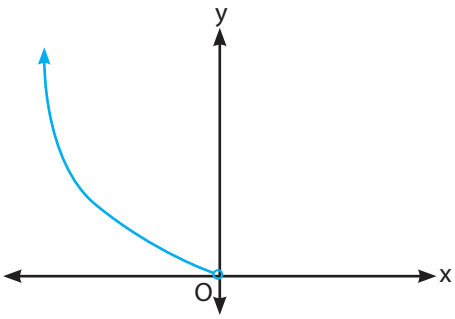
ç) $-3 \leq x \leq 2$

Çözüm

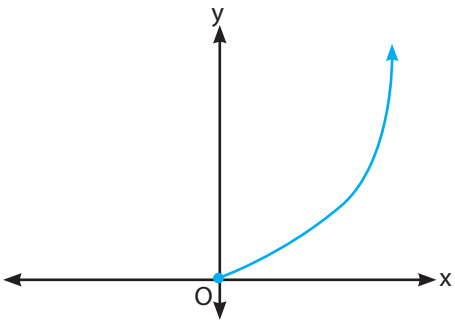
Cebirsel Yaklaşım

Grafik Yaklaşımı

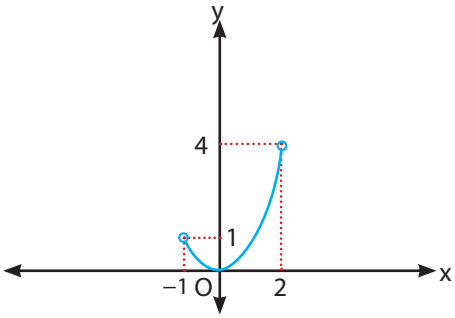
a) $x < 0$ için $x^2 > 0$ olur.
Görüntü aralığı $(0, \infty)$ dır.



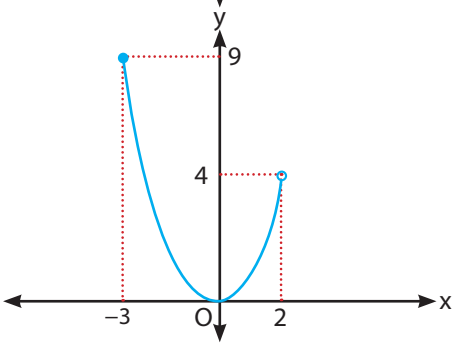
b) $x \geq 0$ için $x^2 \geq 0$ olur.
Görüntü aralığı $[0, \infty)$ dır.



c) $-1 < x < 2$ için $0 \leq x^2 < 4$ olur.
Görüntü aralığı $[0, 4)$ dır.



ç) $-3 \leq x < 2$ için $0 \leq x^2 \leq 9$ olur.
Görüntü aralığı $[0, 9]$ dır.



7. Sıra Sizde

$f(x) = x^2 - 2x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun aşağıda verilen tanım aralıklarında cebirsel ve grafik temsillerinden faydalanarak görüntü kümelerini bulunuz.

a) $x \geq 0$

b) $-4 \leq x < -1$

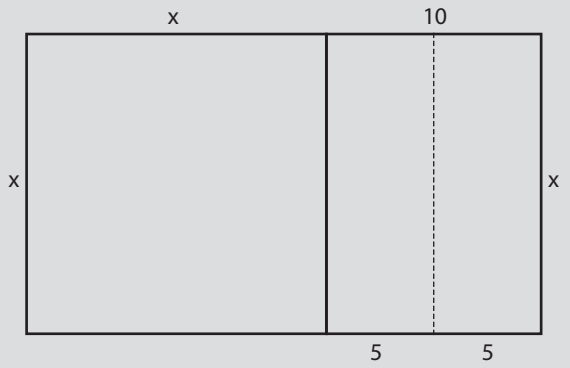
c) $-2 \leq x \leq 3$

Harizmi'nin Tamkareye Tamamlama Yöntemi

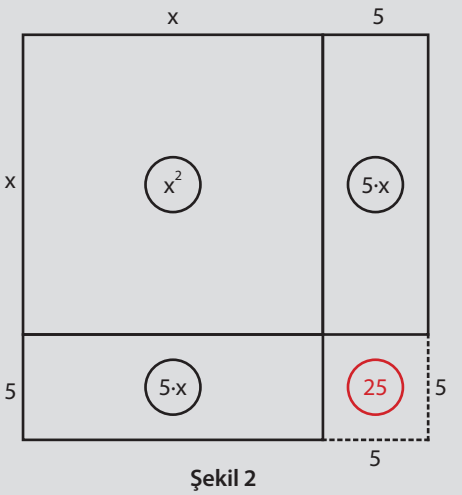
Harizmi'nin tamkareye tamamlama yöntemi, hem geometrik hem de cebirsel yaklaşımları birleştiren yenilikçi bir yöntemdir. Bu yöntem, denklemleri bir kare veya dikdörtgen alanı şeklinde görselleştirerek eksik alanları tamamlayıp tamkare bir ifade oluşturmayı hedefler. Harizmi, bu yaklaşımı sistematik bir çözüm yolu hâline getirerek cebir alanında bir devrim gerçekleştirmiştir. Geometri ile cebiri birleştiren bu yöntem, Avrupa matematiğine de ilham kaynağı olmuştur.

Harizmi yaşadığı dönemde henüz sembol dili gelişmediği için ikinci dereceden denklemleri çözerken geometrik modellerden faydalanmıştır.

$x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözümünde "x^2 " bir kenar uzunluğu x birim olan kare, "10x" bir kenar uzunluğu 10 ve diğer kenar uzunluğu x birim olan dikdörtgen ile modellenir.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de bir kenar uzunluğu x birim, diğer kenar uzunluğu $(x + 10)$ birim olan dikdörtgen çizilir. Bir kenar uzunluğu 10 birim diğer kenar uzunluğu x birim olan dikdörtgen bir kenar uzunluğu 5 birim diğer kenar uzunluğu x birim olan iki dikdörtgene ayrılır ve bu dikdörtgenler Şekil 2'de gösterildiği gibi yerleştirilir. Şekil 2'de eksik kalan kısım bir kenar uzunluğu 5 birim olan kare ile tamamlanır.

Bir kenar uzunluğu $(x + 5)$ birim olan karenin alanı

$$(x + 5)^2 = \underbrace{x^2 + 10 \cdot x}_{39} + 25$$

$(x + 5)^2 = 64$ elde edilir.

$x + 5 = 8$ olduğu için $x = 3$ bulunur.

Harizmi döneminde negatif sayılar henüz bulunmadığı için sonuçlar pozitif olarak bulunmaktaydı.

(Genel ağdan alınmıştır.)

10. Örnek

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)^2 + 1$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) g fonksiyonunun bire birliğini inceleyiniz.

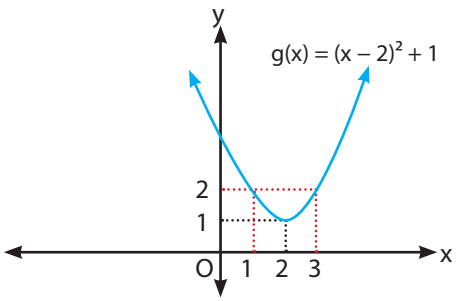
b) g fonksiyonunun örtenliğini inceleyiniz.

c) g fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

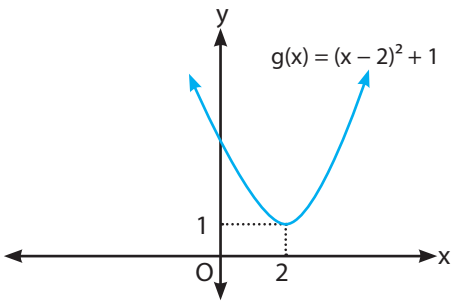
Grafik Yaklaşımı

a) g fonksiyonunun grafiği $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonu yardımıyla çizilirse aşağıdaki grafik elde edilir.



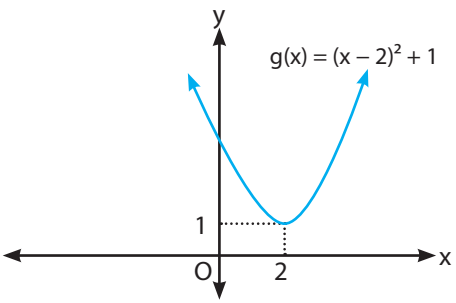
g fonksiyonunun değer aralığındaki bazı f(x) değerlerine karşılık gelen farklı x değerleri olduğundan f bire bir değildir. Örneğin $g(1) = g(3) = 2$ iken $1 \neq 3$ olduğundan bire bir değildir.

b)



Değer kümesindeki her g(x) değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden g fonksiyonu örten değildir. Örneğin $g(a) = -2$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ yoktur.

c)



g fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olmadığı için g çift fonksiyon değildir. g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olmadığı için g tek fonksiyon değildir.

Cebirsel Yaklaşım

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $g(x_1) = g(x_2)$ olsun.

$$(x_1 - 2)^2 + 1 = (x_2 - 2)^2 + 1$$
$$(x_1 - 2)^2 = (x_1 - 2)^2$$
$$|x_1 - 2| = |x_2 - 2|$$

elde edilir. Buradan

$x_1 - 2 = x_2 - 2$ ve $x_1 - 2 = -x_2 + 2$

$x_1 = x_2$ ve $x_1 = -x_2 + 4$ bulunur.

Sonuç olarak

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ şartı sağlanmadığı için g fonksiyonu bire bir değildir.

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = g(x_0)$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$ bulunmadığı için g örten değildir. Örneğin $g(x_0) = -2$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ yoktur.

$g(-x) = (-x-2)^2 + 1$ dir.

$g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyon değildir.

$g(-x) = (-x-2)^2 + 1$ ve $-g(x) = -(x-2)^2 - 1$ fonksiyonlarına göre $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

Başka bir deyişle g ne tek ne çift fonksiyondur.

8. Sıra Sizde

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) g fonksiyonunun bire birliğini inceleyiniz.

b) g fonksiyonunun örtenliğini inceleyiniz.

c) g fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

Proje Ödevi

Karesel Fonksiyonların Nitel Özelliklerinin Gerçek Yaşam Durumlarına Uygulanması

- Bu ödevde sizden ekonomi, fizik, kimya ve biyoloji alanlarında ikinci dereceden fonksiyonlarla modellenebilen gerçek yaşam durumlarını araştırmanız veya oluşturmanız, bu yaşam durumlarındaki problemleri belirlemeniz, bunların çözümlerini yapmanız ve ödevinizi titiz bir şekilde hazırlayarak zamanında, eksiksiz teslim etmeniz beklenmektedir.

Ödeve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Öğretmeninizin rehberliğinde 3 veya 4 kişilik gruplara ayrılınız.
- Bir çalışma planı oluşturunuz, yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.

Ödev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Ekonomi, fizik, kimya ve biyoloji alanlarında birer adet farklı gerçek yaşam durumu içeren problem durumu araştırınız veya oluşturunuz.
- Problem durumlarının karesel fonksiyonlarla modellenebilen bir yapı örneği içerdiğinden emin olunuz.
- Problem durumlarının çözümlerini aşamalı olarak ve açıklayarak yapınız.
- Problemlerinizin çözümlerini yaparken fonksiyonun nitel özelliklerinden faydalanınız.
- Çalışmanız için sunum hazırlayınız ve grup sözcüsü tarafından çalışmanızı sununuz.
- Çalışma süresince grup arkadaşlarınızla iletişiminizi saygı çerçevesinde sürdürünüz.
- Ödevinizi öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Ödev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Ödevinizi tamamladıktan sonra sınıfta sunarak arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Çalışmanızı öğretmeninize zamanında teslim ediniz.

Proje ödeviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

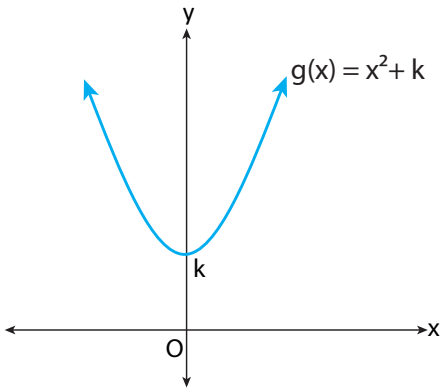
7. Uygulama

Karesel Fonksiyonların Nitel Özellikleri Hakkında Elde Edilen Önermelere İlişkin İspat Yapma

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

Önerme: $k \geq 0$ olmak üzere $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun minimum değeri k olur.

Yukarıdaki önermenin matematiksel doğrulama veya ispatı yapılırken grafik ve cebirsel yaklaşım kullanılır.



Grafik Yaklaşımı

$g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f referans fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenmesiyle elde edilir.

Grafikte görüldüğü üzere $x = 0$ noktası için $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun minimum değeri k olur.

Cebirsel Yaklaşım

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan $x^2 + k \geq k$ olur.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = x^2 + k \geq k$ olacağından fonksiyonunun alabileceği en küçük değerin k olduğu görülür.

Buna göre $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun minimum değeri k dir.

1. Yukarıdaki önermenin grafiksel doğrulama ve cebirsel ispatından faydalanarak aşağıda verilen önermelerin grafiksel olarak doğrulamasını ve cebirsel ispatını yapınız.

✓ $k \geq 0$ olmak üzere $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun azalan olduğu aralık $(-\infty, 0]$ dır.	
Grafiksel Doğrulama	**Cebirsel İspat**

✓ $k \geq 0$ olmak üzere $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun artan olduğu aralık $[0, \infty)$ dır.	
Grafiksel Doğrulama	**Cebirsel İspat**

✓ $k \geq 0$ olmak üzere $g(x) = x^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun maksimum değeri yoktur.	
Grafiksel Doğrulama	**Cebirsel İspat**

2. Fonksiyonların artan-azalan olduğu aralıkları ve maksimum-minimum değerlerini belirlerken kullandığınız grafiksel doğrulama ve cebirsel ispat yöntemlerinin kullanışlılığını karşılaştırarak tartışınız.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Kontrol Noktası

1. $a, r, k \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $k > 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:

1. adım : $f(x) = x^2$ referans fonksiyonu x ekseni boyunca negatif yönde r birim ötelenerek $m(x) = (x + r)^2$ şeklinde tanımlı m fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. adım : $m(x) = (x + r)^2$ fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $n(x) = a \cdot (x + r)^2$ şeklinde tanımlı n fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. adım : $n(x) = a \cdot (x + r)^2$ fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenerek $g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. $a, r, k \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere gerçek sayılarda değerli $f(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ tamkare formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri

$a > 0$ için

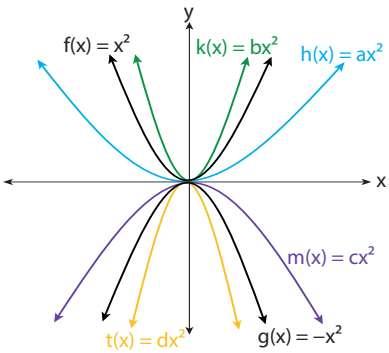
- Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[k, \infty)$ dır.
- Azalan olduğu aralık $(-\infty, -r]$, artan olduğu aralık $[-r, \infty)$ dır.
- Fonksiyonun minimum değeri k dır. Fonksiyon minimum değerini $x = -r$ noktasında alır.
- Bire bir değildir. Örten değildir. Simetri doğrusu $x = -r$ dir.

$a < 0$ için

- Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $(-\infty, k]$ dır.
- Artan olduğu aralık $(-\infty, -r]$, azalan olduğu aralık $[-r, \infty)$ dır.
- Fonksiyonun maksimum değeri k dır. Fonksiyon maksimum değerini $x = -r$ noktasında alır.
- Bire bir değildir. Örten değildir. Simetri doğrusu $x = -r$ dir.

Alıştırmalar

1. Yanda gerçek sayılarda tanımlı ve değerli $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$, $h(x) = ax^2$, $k(x) = bx^2$, $m(x) = cx^2$, $t(x) = dx^2$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre

a) a, b, c ve d katsayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

b) a, b, c ve d katsayılarının en geniş değer aralıklarını bulunuz.

2. Yerden atılan bir füzenin zamana (sn.) bağlı aldığı yolu (km) ifade eden grafik $f(t) = -0{,}1(t - 5)^2 + 2{,}5$ karesel fonksiyonu ile modellenmiştir. Füze, atıldığı yer ile yatayda aynı doğrultuda farklı bir noktaya düşmüştür.

Buna göre

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Roketin yerden en fazla kaç kilometre yükseldiğini bulunuz.

c) Roketin atıldıktan kaç saniye sonra yere düştüğünü bulunuz.

3. Bir firmanın ürettiği bir malın üretim maliyeti ve satış fiyatı üretim miktarına (x) bağlıdır. Firmanın kâr fonksiyonu (k(x)), gelir fonksiyonundan maliyet fonksiyonunun çıkarılması ile elde edilir.

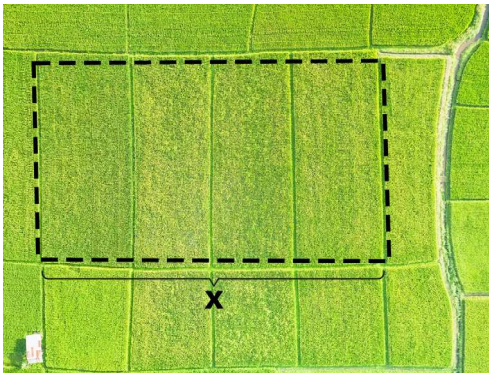
Gelir ve maliyet birimleri TL cinsinden hesaplanan bu firmanın ürettiği malın gelir fonksiyonu $g(x) = -2x^2 + 50x$ ve maliyet fonksiyonu $m(x) = 10x + 100$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre

a) Firmanın kârının maksimum olması için kaç adet üretim yapması gerektiğini bulunuz.

b) Firmanın elde edeceği maksimum kârın kaç TL olduğunu bulunuz.

4. Yanda çevre uzunluğu 400 metre olan dikdörtgen şeklinde bir arsa görseli verilmiştir. Arsanın bir kenar uzunluğu x metredir.



Buna göre

a) Arsanın bir kenar uzunluğuna (x) bağlı alanını (a(x)) gösteren fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) Arsanın alanının maksimum olabilmesi için kenar uzunluklarının metre cinsinden hangi değerleri alması gerektiğini bulunuz.

c) Arsanın alanının alabileceği maksimum değerin kaç metrekare olduğunu bulunuz.

ç) Arsanın alanını veren fonksiyonun (a(x)) grafik temsilini çiziniz.

4. Tema alıştırma ek soruları

4.3. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KAREKÖK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Bir şirket satışlarını artırmak için ürünlerinde farklı kampanyalar düzenlemiş, bu kampanyaları hazırladığı reklamlarla halka duyurmuştur. Bir haftalık kampanya sonunda şirketin sürekli kâr elde ettiği saptanmış ancak satılan ürün sayısı arttıkça reklam masrafları ve diğer masraflar da arttığından kâr oranının değiştiği gözlenmiştir.

x: Türk lirası cinsinden günlük satıştan elde edilen kazanç

f(x): Türk lirası cinsinden x kazancından elde edilen günlük kâr

olmak üzere şirketin bir haftalık kazancı ve bu kazanca bağlı olarak elde ettiği kâr arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda verilmiştir:

	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
x	10 000	40 000	90 000	160 000	250 000	360 000	490 000
f(x)	100	200	300	400	500	600	700

Buna göre

1. **Şirketin günlük kazancı ile kârı arasında doğrusal bir ilişki olup olmadığını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
2. **x ile f(x) niceliklerini karşılaştırarak f fonksiyonunun cebirsel ifadesini bulunuz. Bu fonksiyonun nasıl tanımlanabileceğini ve nitel özelliklerinin neler olabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Geometride alanı bilinen karenin bir kenarını veya alanı bilinen bir dairenin çapının uzunluğunu fizikte yer çekimi kuvveti ile kütle arasındaki ilişkiyi ve farklı ışık kaynaklarının yaydığı enerjiyi, mühendislikte bir yapının taşıma kapasitesini, istatistik ve veri biliminde veri analizi ve standart sapmayı hesaplayan fonksiyonlar karekök fonksiyonudur. Bu örneklerin her biri, karekök fonksiyonunun matematiksel bir işlem olmanın ötesinde hayatın farklı alanlarında nasıl işe yaradığını gösterir. Günlük yaşamda değişik alanlarda yapılan hesaplamalar finansal analizler, mühendislik projeleri ve daha birçok alanda kullanılan karekök fonksiyonu hayatı kolaylaştıran matematiksel bir araçtır.

8. Uygulama

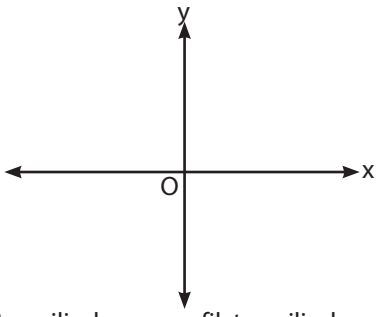
Gerçek Sayılarda $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ Şeklinde Tanımlı Karekök Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Gerçek sayılarda $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ şeklinde tanımlı fonksiyon için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen değerleri dikkate alarak boş alanları örneklerdeki gibi doldurunuz.

x	0	1	2	3	4	9	16	25	...
y = f(x)				$\sqrt{3}$			4		...

2. Tablodaki değerleri kullanarak aşağıda verilen dik koordinat sistemi üzerinde $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğini çiziniz.



3. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun cebirsel temsilinden ve grafik temsilinden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

b) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

c) Fonksiyonun sıfırını hesaplayınız.

ç) Fonksiyonun işaretini inceleyiniz.

d) Fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

e) Fonksiyonun varsa maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.

g) Fonksiyonun bire bir fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

ğ) Fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.

h) Bir fonksiyonun tekliğinin-çiftliğinin cebirsel incelemesinden veya grafik temsillerinden hareketle f fonksiyonunun tekliği-çiftliğinden bahsedilip bahsedilmeyeceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu karekök referans fonksiyonu olarak adlandırılır.

11. Örnek

$f: [0, 20] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.

Buna göre bu fonksiyonun

a) Grafiğini çiziniz.

b) Bire bir ve örtenliğini inceleyiniz.

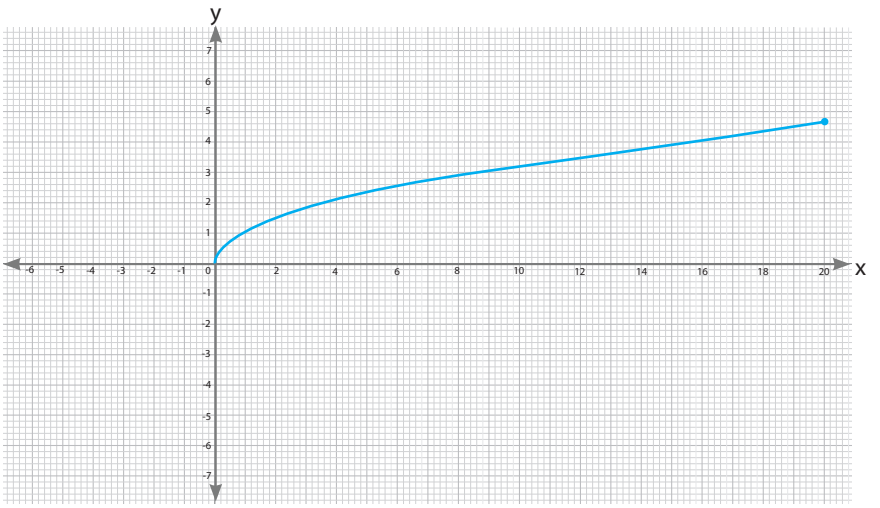
c) Sıfırlarını bulunuz ve işaretini inceleyiniz.

ç) Artan-azalanlığını inceleyiniz.

d) Verilen aralıkta fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm

a) Verilen tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



b) Tanım aralığındaki her farklı x değerlerine karşılık gelen f(x) değerleri de farklı olduğundan f bire birdir. Bir başka ifadeyle

$\forall a, b \in [0, 20]$ için $a \neq b$ iken $f(a) \neq f(b)$ veya $f(a) = f(b)$ iken $a = b$ dir.

Değer aralığındaki her f(x) değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden f fonksiyonu örten değildir.

c) $f(x) = \sqrt{x} = 0$ ise $x = 0$ olmalıdır.

x	$-\infty$	0	∞
f(x)	Tanımsız	0	+

Fonksiyon tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değer alır.

ç) Tanım aralığı içinde alınan a ve b değerleri için $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ olduğundan f fonksiyonu daima artan bir fonksiyondur.

d) Fonksiyonun verilen aralıkta minimum değeri 0, maksimum değeri $2\sqrt{5}$ 'tir.

9. Sıra Sizde

f: [0, 5] → $\mathbb{R}$, f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun

a) Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

b) Grafiğini çiziniz.

c) Bire bir ve örtenliğini inceleyiniz.

ç) Artan-azalanlığını inceleyiniz.

d) Maksimum-minimum değerini bulunuz.

9. Uygulama

Gerçek Sayılarda f(x) = $\sqrt{x}$ (x ≥ 0) Şeklinde Tanımlı Karekök Referans Fonksiyonundan Türetilen (g(x) = a · f(x ± r) ± k (a, r, k ∈ R, a ≠ 0)) Karekök Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.

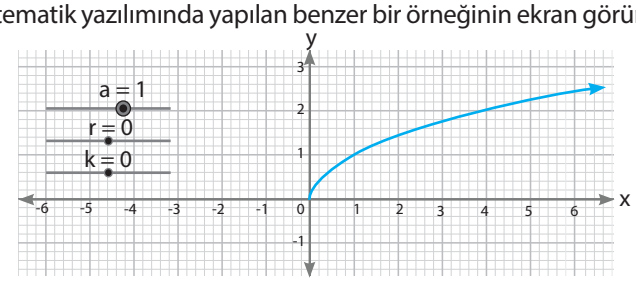
1. Matematik yazılımları yardımı ile aşağıda verilen adımları takip ederek istenen grafikleri çiziniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, r, k sürgülerini tanımlayıp aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Cebir menüsünden **Giriş** bölümüne g(x) = a · $\sqrt{x + r}$ + k yazarak giriş yapınız.

3. adım: Sürgüde a = 1, r = 0 ve k = 0 seçerek f(x) = $\sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Yukarıdaki adımların matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) r = 0, k = 0 iken a sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri girip elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak tablodaki ilgili kısımları örneklerdeki gibi doldurunuz.

Tablo 1: *r = 0, k = 0 İken a Sürgüsündeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a Sürgüsünün Değeri	Oluşan Karekök Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	–1	$h(x) = -\sqrt{x}$	–1 ile çarpma	x eksenine göre yansıma
m(x)	2	$m(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$	2 ile çarpma	2 kat dikey daralma
n(x)	4			
s(x)	–3			

b) k = 0 iken a ve r sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri girip elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak tablodaki ilgili kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2: *k = 0 İken a ve r Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Karekök Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	$a = \frac{1}{2}$ $r = 2$	$h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$	Tüm bağımsız değişkenlerine 2 ekleme, karekökünü $\frac{1}{2}$ ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, 2 kat dikey genişleme
m(x)	$a = 1$ $r = -3$			
n(x)	$a = 2$ $r = 3$			
s(x)	$a = -2$ $r = -3$			

c) r = 0 iken a ve k sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri girip elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak tablodaki ilgili kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3: *r = 0 İken a ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

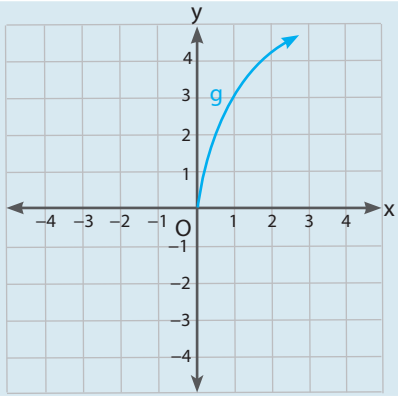
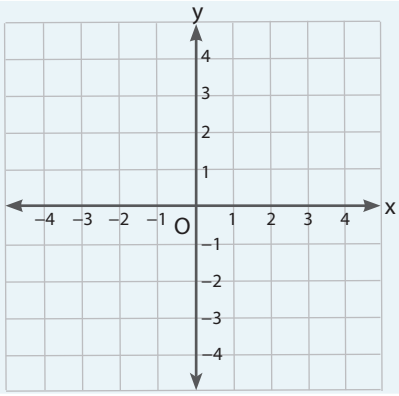
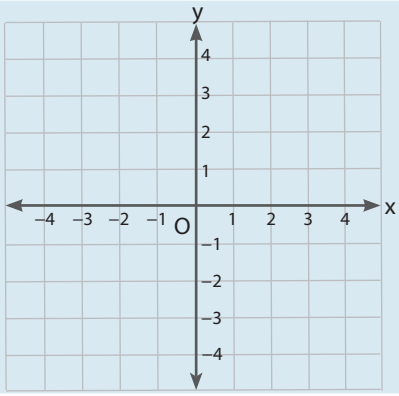
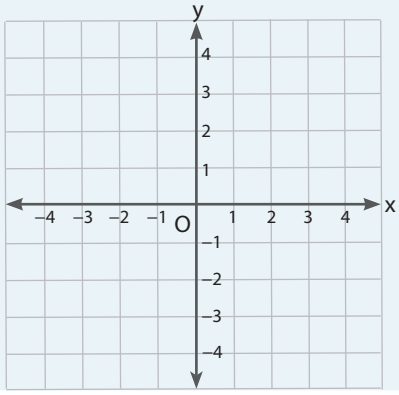
Fonksiyon İsmi	a ve k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Karekök Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 k = 2	$h(x) = \sqrt{x} + 2$	Tüm bağımsız değişkenlerin karekköküne 2 eklenmiştir	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
m(x)	a = 1 k = –1			
n(x)	a = 4 k = 3			
s(x)	a = –2 k = –2			

ç) a, r ve k sürgüsüne Tablo 4'te verilen değerleri girerek tablodaki ilgili kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4: *a, r ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a, r ve k Sürgülerinin Değeri	Oluşan Karekök Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 r = 1 k = 3	$h(x) = \sqrt{x + 1} + 3$	Bağımsız değişkeninin 1 fazlasının aldığı değerin karekköküne 3 ekleme	x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
m(x)	a = 1 r = –2 k = –1			
n(x)	a = 2 r = 3 k = –4			
s(x)	a = –1 r = –1 k = 1			

2. Aşağıdaki tabloyu f: [0, ∞) →[0, ∞), f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümlerle elde edilen fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini örnekteki gibi ilgili yerlere yazarak doldurunuz. Grafik temsilini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

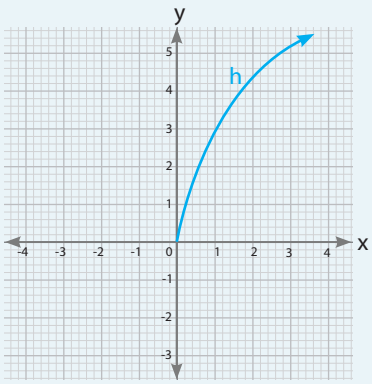
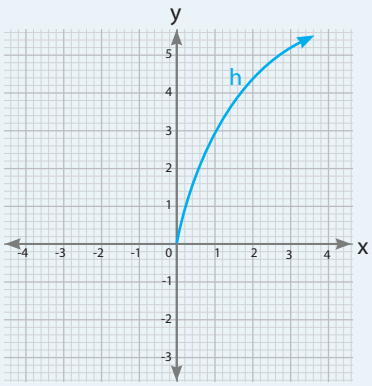
Karekök Referans Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşümler	Cebirsel Temsili	Grafik Temsili
3 kat dikey daralma	$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$	
x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca negatif yönde 4 birim öteleme		
x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme		
3 kat dikey daralma, x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birimöteleme		

3. f: [0,∞) → [0, ∞), $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ $(a, r, k \in R, a \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı ilgili yerlere yazınız.

$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$, $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$		
Nitel Özellikleri	**Varsayım**	
	a > 0	**a < 0**
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

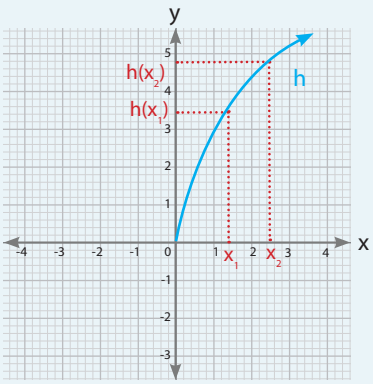
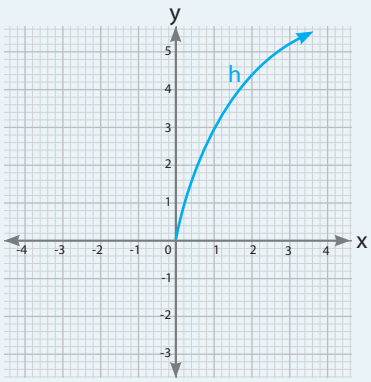
4. Aşağıdaki tabloda f: [0,∞) → [0, ∞), $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

a) Bu fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, nitel özelliklerini örnekteki gibi ilgili yerlere yazarak doldurunuz.

Fonksiyon	**İnceleme Türü**	**Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi**	**İşareti**
$h(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$	Grafik	 TANIM KÜMESİ: Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun negatif gerçek sayılarda tanımlı olmadığı görülür. Bu nedenle tanım kümesi [0, ∞) dır. GÖRÜNTÜ KÜMESİ: Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun negatif değer almadığı görülmektedir. Bu nedenle görüntü kümesi [0, ∞) dır.	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun (0, ∞) da pozitif değer aldığı görülür.
	Cebirsel	TANIM KÜMESİ: f karekök referans fonksiyonu [0, ∞) da tanımlı olduğu için f fonksiyonundan türetilen $h = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ fonksiyonunun da tanım kümesi [0, ∞) dır. GÖRÜNTÜ KÜMESİ: f karekök referans fonksiyonunun görüntü kümesi [0,∞) olduğu için f fonksiyonundan türetilen $h(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ fonksiyonunun da görüntü kümesi [0, ∞) dır.	f karekök referans fonksiyonundan türetilen h fonksiyonunun sıfırları $h(x) = 3 \cdot \sqrt{x} = 0$ ise $x = 0$ olur. Bu durumda h fonksiyonunun işaret tablosu x | −∞ 0 ∞ h(x) | Tanımsız 0 + olur. Tabloya göre h fonksiyonunun (0, ∞) da pozitif değer aldığı görülür.

Fonksiyon	İnceleme Türü	Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi	İşareti
$m(x) = -2 \cdot \sqrt{x-2}$	Grafik		
	Cebirsel		
$n(x) = 3\sqrt{x-1} + 2$	Grafik		
	Cebirsel		

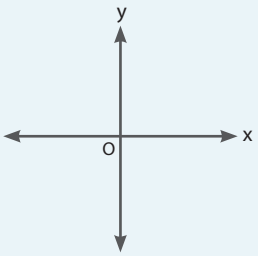
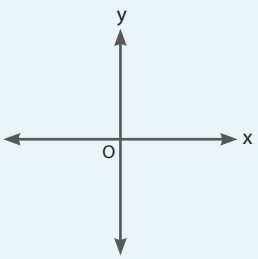
b) Bu fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, tabloda istenilen nitel özellikleri örnekteki gibi doldurunuz.

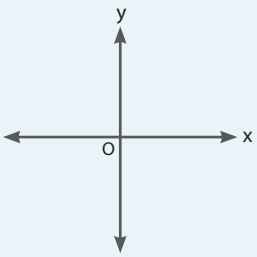
Fonksiyon	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$h(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$	Grafik	 Grafik incelendiğinde $\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için $h(x_1) < h(x_2)$ olduğundan h fonksiyonu artandır.	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonu $x = 0$ noktasında minimum değerini alır. Fonksiyonun minimum değeri 0'dır. Maksimum değeri yoktur.
	Cebirsel	$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için $h(x_1) < h(x_2)$ olduğundan h fonksiyonu tanımlı olduğu $[0, \infty)$ da artandır.	$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için $h(x_1) < h(x_2)$ olduğundan h fonksiyonu daima artandır. Bu nedenle maksimum değeri yoktur. Minimum değerini de bağımsız değişkenin ilk değeri olan $x = 0$ noktasında alır. Minimum değeri $h(0) = 3 \cdot \sqrt{0} = 0$'dır.
$m(x) = -2 \cdot \sqrt{x - 2}$	Grafik		
	Cebirsel		

Fonksiyon	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$n(x) = 3\sqrt{x-1} + 2$	Grafik		
	Cebirsel		

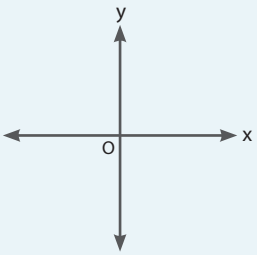
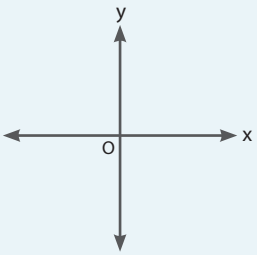
5. Aşağıdaki tabloda $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

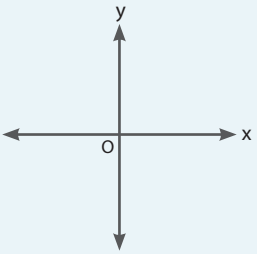
a) Verilen fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi	İşareti
$h(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$	Grafik		
	Cebirsel		
$m(x) = -3 \cdot \sqrt{x+2}$	Grafik		
	Cebirsel		

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi	İşareti
$n(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 2$	Grafik		
	Cebirsel		

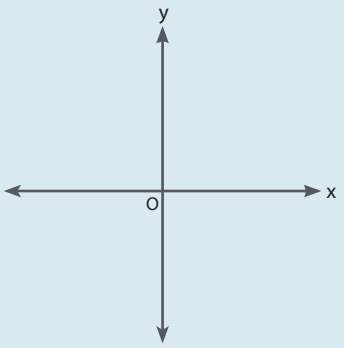
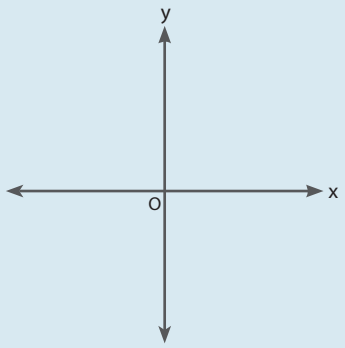
b) Verilen fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$h(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$	Grafik		
	Cebirsel		
$m(x) = -3 \cdot \sqrt{x+2}$	Grafik		
	Cebirsel		

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi ve Grafik Temsili	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$n(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 2$	Grafik		
	Cebirsel		

6. 4 ve 5. maddelerdeki n fonksiyonunun çizimini yaptığınız grafik ile kullandığınız matematik yazılımından elde ettiğiniz fonksiyonun nitel özeliklerini karşılaştırınız. Elde ettiğiniz farklı sonuçlar varsa nedenlerini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

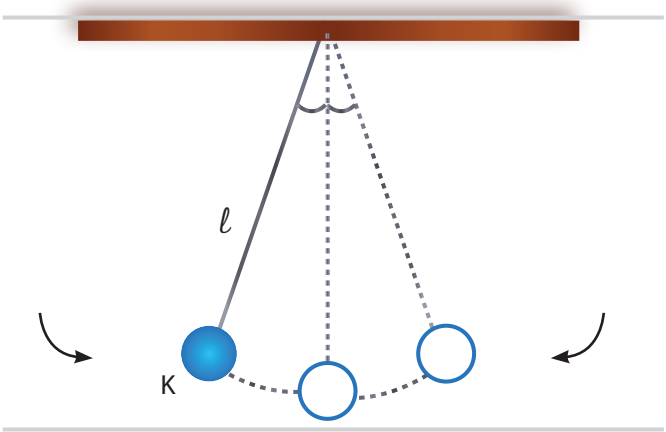
7. Yukarıdaki tablolardan elde ettiğiniz bilgileri varsayımlarınız ile karşılaştırarak $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ kare-köklü fonksiyonların nitel özellikleri hakkındaki önermenizi $a > 0, r > 0, k > 0$ ve $a < 0, r > 0, k > 0$ için ayrı ayrı oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel olarak veya cebirsel dil ile ifade ediniz.

$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$	$a > 0, r > 0, k > 0$ 	$a < 0, r > 0, k > 0$ 

Nitel Özellikler	Genellemeler
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
İşareti	
Artanlığı-Azalanlığı	
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri	

8. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıdaki problem durumunu inceleyerek soruları çözünüz.

Sabit bir noktaya bağlı, ağırlığı ve sürtünmeleri ihmal edilen ipin ucuna takılan bir cisim denge konumundan küçük bir açı ile bırakıldığında basit harmonik hareket yapar. Aşağıdaki görselde K basit sarkacının bir açı ile yaptığı salınımı verilmiştir (Görsel 4.3).



Görsel 4.3: *Basit Sarkaçın Salınımı*

Sarkacın bir tam salınımını yapması için gereken süreye periyot denir. Sarkacın salınım süresi, uzunluğuna ve bulunduğu ortamdaki yer çekimi ivmesine bağlıdır. T saniye cinsinden sarkacın periyodu, ℓ metre cinsinden sarkacın uzunluğu, g m/s^2 cinsinden yer çekimi ivmesi olmak üzere periyot

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

formülü ile hesaplanır.

Ezgi, fizik dersinde sarkacın periyodunun yukarıdaki formülle hesaplandığını öğrenmiştir. Yer çekimi ivmesinin 9 m/s^2 olduğu bir ortamda x sarkacının boyu f(x) sarkacının periyodu olmak üzere

$$f(x) = \frac{2\pi}{3}\sqrt{x}$$

fonksiyonu ile modellenmiştir.

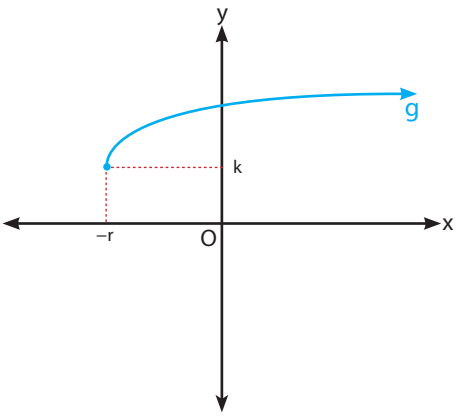
Sarkacın boyunun 1 m ve 9 m arasında değişen (1 ve 9 dâhil) gerçek sayı değerleri aldığı bilindiğine göre

a) Sarkacın periyodunun alabileceği değerleri gösteren grafiği çiziniz.

b) Sarkacın boyu arttıkça periyodun değeri nasıl değişir? Fonksiyonun nitel özelliklerinden yararlanarak yazıp açıklayınız.

c) Belirtilen aralıkta periyodun alabileceği maksimum-minimum değerlerini fonksiyonun nitel özelliklerinden yararlanarak bulunuz.

9. $f: [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilmiş $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ karekök fonksiyonlarının $a > 0$, $r > 0$ ve $k > 0$ için çizilen grafiği aşağıda verilmiştir. g fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermenizi aşağıda verilen g fonksiyonunun grafiği yardımı ile doğrulayınız veya cebirsel olarak ispatlayınız.



Nitel Özellikleri	Grafik ile Doğrulama	Cebirsel İspat
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları		

10. Yukarıdaki tabloyu doldururken kullandığınız grafik ile doğrulama veya cebirsel ispat yöntemlerinin kullanışlılık açısından olumlu ya da olumsuz yönlerini sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x - 3} + 1$ fonksiyonunun maksimum ve minimum noktaları ile bu noktalardaki değerlerini bulunuz. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Bulgularınızı grafikle doğrulayınız ve cebirsel olarak ispatlayınız. Kullanılan yöntemleri sağladığı faydalar ve kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

12. Örnek

$f: [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler ile $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 5} - 4$ fonksiyonu türetilmiştir.

Buna göre

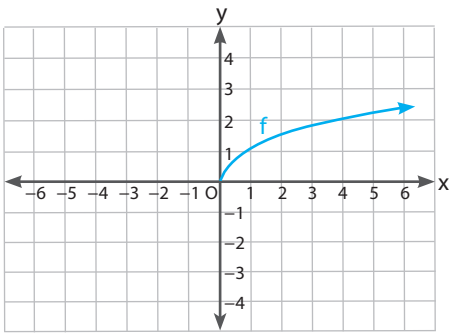
a) f fonksiyonundan yararlanarak g fonksiyonunun grafiğini çiziniz. g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

b) g fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz. g fonksiyonunun bire birliğini, örtenliğini ve tekliği-çiftliğini belirleyiniz.

Çözüm

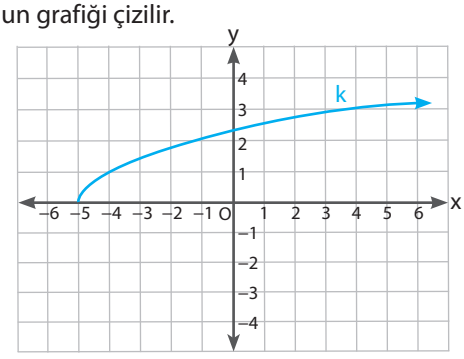
a) $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafiğine uygulanacak dönüşümler ile $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5} - 4$ fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. adım: $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafiği çizilir.



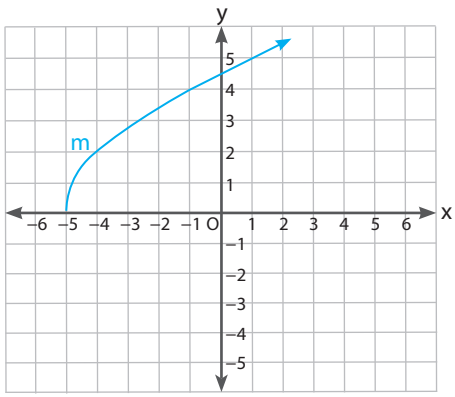
$f(x) = \sqrt{x}$

2. adım: $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafiğine x ekseni boyunca negatif yönde 5 birim öteleme dönüşümü uygulanarak oluşan $k(x) = \sqrt{x+5}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.



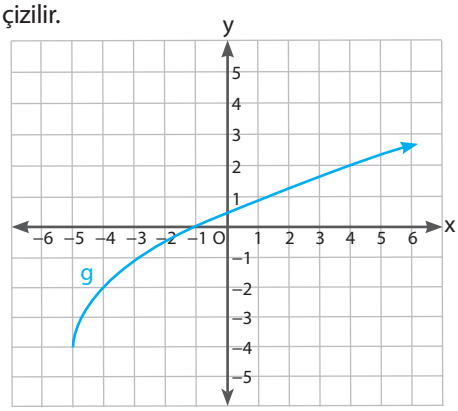
$k(x) = \sqrt{x+5}$

3. adım: $k(x) = \sqrt{x+5}$ fonksiyonunun grafiğinin üzerindeki noktaların değerlerini 2 katına eşleyen $m(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5}$ grafiği çizilir.



$m(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5}$

4. adım: $m(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5}$ fonksiyonunun grafiğine y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim öteleme dönüşümü uygulanarak oluşan $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5} - 4$ fonksiyonunun grafiği çizilir.



$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5} - 4$

g fonksiyonunun tanım kümesi $[-5, \infty)$, görüntü kümesi $[-4, \infty)$ dır.

b) Fonksiyonun Sıfırları

Cebirsel İnceleme

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+5} - 4 = 0$ ise

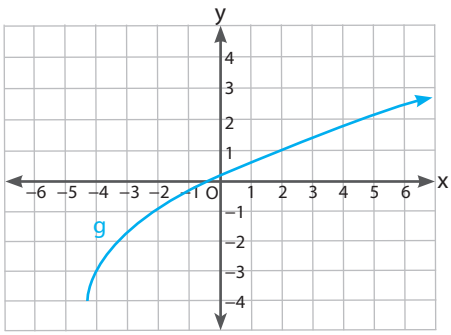
$2 \cdot \sqrt{x+5} = 4$

$\sqrt{x+5} = 2$

$x + 5 = 4$

$x = -1$ olur.

Grafik İnceleme



Yukarıdaki g fonksiyonun grafiği incelendiğinde fonksiyonun sıfırı x = −1 olarak bulunur.

Fonksiyonun Bire Birliği

Cebirsel İnceleme

$\forall x_1, x_2 \in [-5, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$

$2 \cdot \sqrt{x_1 + 5} - 4 = 2 \cdot \sqrt{x_2 + 5} - 4$

$2 \cdot \sqrt{x_1 + 5} = 2 \cdot \sqrt{x_2 + 5}$

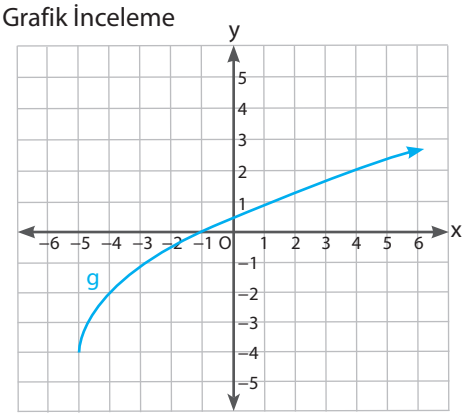
$\sqrt{x_1 + 5} = \sqrt{x_2 + 5}$

$x_1 + 5 = x_2 + 5$

$x_1 = x_2$ olur.

$\forall x_1, x_2 \in [-5, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$ olduğunda $x_1 = x_2$ olduğundan fonksiyon bire birdir.

Grafik İnceleme



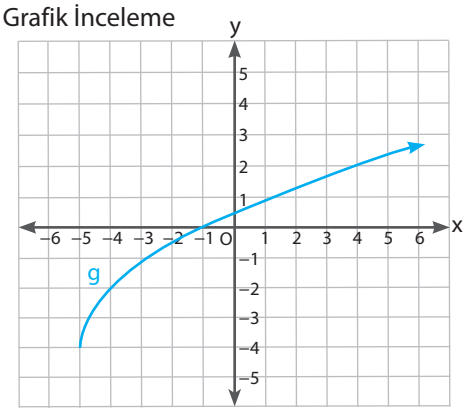
Yukarıdaki g fonksiyonunun grafiği incelendiğinde fonksiyonun tanım aralığındaki farklı x değerlerine karşılık gelen g(x) değerlerinin farklı olduğu görüldüğünden g fonksiyonu bire birdir.

Fonksiyonun Örtenliği

Cebirsel İnceleme: f fonksiyonuna uygulanan dönüşümlerle oluşan g fonksiyonunun tanım kümesi $[-5, \infty)$, görüntü kümesi $[-4, \infty)$ dır.

$\forall y_1 \in [-4, \infty)$ için $y_1 = g(x_1)$ olacak şekilde $\exists x_1 \in [-5, \infty)$ bulunduğundan g örten fonksiyondur.

Grafik İnceleme



Grafik incelendiğinde –4'ten küçük değerlere karşılık gelen en az bir x değeri bulunduğundan g örten fonksiyondur.

Fonksiyonun Tekliği-Çiftliği

Cebirsel İnceleme

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 5} - 4$ için

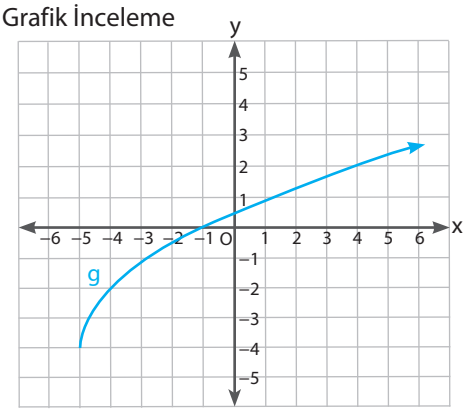
$g(-x) = 2 \cdot \sqrt{-x + 5} - 4$ ve

$-g(x) = -2 \cdot \sqrt{x + 5} + 4$ olur.

$g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyon değildir.

$g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

Grafik İnceleme



Yukarıdaki grafik incelendiğinde g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olmadığından g tek fonksiyon değildir. g fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olmadığından g çift fonksiyon değildir. Bu nedenle g fonksiyonu ne tek ne çift fonksiyondur.

10 . Sıra Sizde

Cebirsel gösterim veya grafiksel temsil kullanarak aşağıda tanım ve değer kümesi verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bulup tablodaki ilgili yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel Özellikleri	$f: [-2, \infty) \to [-5, \infty)$ $f(x) = \sqrt{x+2} - 5$	$g: [1, \infty) \to [2, \infty)$ $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} + 2$	$h: [-4, \infty) \to (-\infty, 3]$ $h(x) = -2 \cdot \sqrt{x+4} + 3$
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
İşareti			
Artanlığı-Azalanlığı			
Maksimum-Minimum Değeri			
Sıfırları			
Bire Birliği			
Tekliği-Çiftliği			
Örtenliği			

Kontrol Noktası

1. $a, r, k \in \mathbb{R}$, $r > 0, k > 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere negatif olmayan gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:

1. adım: $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafik temsili x ekseni boyunca negatif yönde r birim ötelenerek $k(x) = \sqrt{x+r}$ şeklinde tanımlı k fonksiyonun grafiği çizilir.

2. adım: k fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $m(x) = a \cdot \sqrt{x+r}$ şeklinde tanımlı m fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: m fonksiyonunun grafik temsili y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenerek $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. $a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere değer kümesi gerçek sayılar olan $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ şeklindeki karekök fonksiyonlarının nitel özellikleri aşağıdaki gibidir:

- Tanım Kümesi: $[-r, \infty)$ dır.
- Görüntü Kümesi: $[k, \infty)$ dır.
- Bire birdir.
- Örten değildir.
- $a > 0$ ise maksimum noktası yoktur. Fonksiyonun minimum değeri k dır. Fonksiyon minimum değerini $x = -r$ noktasında alır.
- $a < 0$ ise minimum noktası yoktur. Fonksiyonun maksimum değeri k dır. Fonksiyon maksimum değerini $x = -r$ noktasında alır.
- $a > 0$ ise fonksiyon artan, $a < 0$ ise fonksiyon azalandır.

Konu ile ilgili video

Alıştırmalar

1. Matematik dersinde karekök fonksiyonlarının grafik çizimleri ile ilgili uygulama yapan Belda Öğretmen öğrencilerinden aşağıdaki soruyu uygulama basamaklarını takip ederek çözmelerini istiyor.

Uygulama Basamakları

a) Dik koordinat sisteminde $f: [-1, \infty) \to [0, \infty)$ tanımlı ve değerli $f(x) = \sqrt{x+1}$ ve $g: [-1, \infty) \to (-\infty, 0]$ tanımlı ve değerli $g(x) = -\sqrt{x+1}$ fonksiyonunun grafiklerini çiziniz.

b) Grafikler üzerinde A(0, f(0)), B(0, g(0)), C(8, g(8)) ve D(8, f(8)) noktalarını işaretleyiniz.

c) [AB], [BC], [CD] ve [DA] nı çizerek ABCD dörtgenini oluşturunuz.

Buna göre oluşan ABCD dörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2. Bir fabrikada üretilen bir ürünün üretim maliyetine göre olası kâr miktarı,

x: Üretim maliyeti (TL)

f(x): Olası kâr miktarı (TL)

200 TL: Sabit masraflar

10 TL: İskonto tutarı olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \sqrt{x + 200} - 10$$

ile modellenmiştir.

Aşağıdaki tabloda bu ürünün farklı üretim maliyetleri verilmiştir.

x (Üretim Maliyeti)	25 TL	200 TL	700 TL	1400 TL

Buna göre

a) Şirketin verilen üretim maliyetleri için elde edebileceği olası kâr miktarını bulunuz.

b) Modellenen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

3. Aşağıda Tablo 1'de bazı fonksiyonlar Tablo 2'de ise bu fonksiyonlara ait tanım ve görüntü kümeleri verilmiştir.

Tablo 1'deki fonksiyonlara ait tanım ve görüntü kümelerini temsil eden harfleri Tablo 2'den bularak ilgili fonksiyonun yanındaki boşluklara yazınız.

Tablo 1

f(x)	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$f(x) = \sqrt{x+4} - 3$	Ç	G
$g(x) = \sqrt{x-2} + 1$		
$h(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1}$		
$k(x) = 3 \cdot \sqrt{x-3} + 4$		
$m(x) = -2 \cdot \sqrt{x+5} - 6$		

Tablo 2

A	B	C	Ç	D	E
[3, ∞)	[−5,∞)	[−2, ∞)	[−4, ∞)	[1, ∞)	[0, ∞)
F	**G**	**H**	**J**	**K**	**L**
[−1, ∞)	[−3,∞)	[2, ∞)	(−∞, −6]	[4, ∞)	[5, ∞)

4. Tabloda cebirsel temsili ile tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların artan-azalanlığını, maksimum-minimum değerlerini ve (varsa) sıfırlarını bulunuz.

Tanım ve Değer Kümeleri	Fonksiyonların Cebirsel Temsili
a) $f: [-5, 4] \to [-1, 2]$	$f(x) = \sqrt{x+5} - 1$
b) $g: [-1, 8] \to [3, 9]$	$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1} + 3$
c) $h: [-2, 14] \to [-4, 0]$	$h(x) = -\sqrt{x+2}$
ç) $k: [-3, 6] \to [-12, -6]$	$k(x) = -2 \cdot \sqrt{x+3} - 6$

4. Tema alıştırma ek soruları

4.4. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI RASYONEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Sabit bir mesafeyi katetmek için yürümenin haricinde ihtiyaca göre bisiklet, araba, tren, uçak, gemi gibi çeşitli araçlar kullanılır.

Yandaki görselde A ve B noktaları ile gösterilen şehirler arasındaki mesafe 1600 km'dir.

Bu iki şehir arasında yolculuk yapmak isteyenler için otobüs, tren ve uçak seferleri düzenlenmektedir. Araçların ortalama hızları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Araç Cinsi	Ortalama Hızı (km/sa.)
Otobüs	100
Tren	200
Uçak	800

Buna göre

1. **Bu üç araçtan birini tercih edecek olan kişilerin araç tercihleri ile yolculuk süreleri arasındaki ilişki ile ilgili görüşlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile paylaşarak tartışınız.**
2. **Herhangi bir araç için yolculuk süresini cebirsel olarak ifade ediniz.**

3. **Yolun fiziksel durumu, araç trafiğinin yoğunluğu vb. durumlarda otobüsün ortalama hızı değişmektedir. Otobüs uygun koşullarda saatte en fazla ortalama 100 km hıza çıkabilmektedir. A ve B noktaları arasındaki mesafenin otobüs ile katedilmesi durumunda hız ve yolculuk süresi arasındaki ilişkiyi belirleyiniz. Belirlediğiniz ilişki grafik temsil ile gösterilebilir mi? Görüşlerinizi aşağıdaki alana yazarak sınıf arkadaşlarınız ile paylaşınız. Karşılıklı saygı çerçevesinde görüşlerinizi sözel olarak tartışınız.**

Yukarıdaki örnekte bir aracın ortalama hızı v olmak üzere yolculuk süresini modelleyen $f(v) = \frac{1600}{v}$ fonksiyonu bir rasyonel fonksiyondur. Ekonomide arz-talep dengesi ve piyasa analizleri, elektrik devrelerinde direnç-akım-voltaj ilişkileri, inşaat mühendisliğinde yük dağılımı veya enerji verimliliği hesaplamaları gibi pek çok farklı alanda kullanılan cebirsel temsiller rasyonel fonksiyon örnekleridir. Rasyonel fonksiyonlar, farklı alanlardaki karmaşık sistemleri sadeleştirerek bunlara çözüm yolları üretilmesine olanak tanır.

10. Uygulama

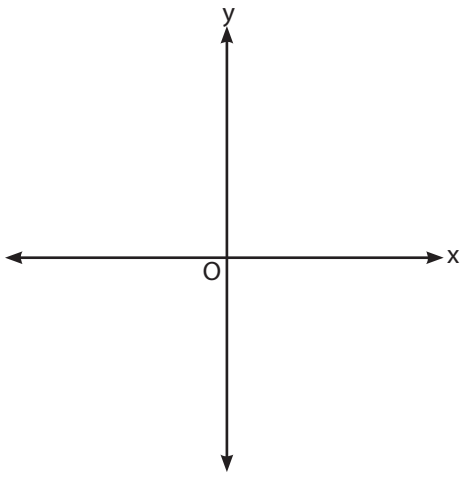
Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Gerçek sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen bağımsız değişkenlerin alabileceği değerleri dikkate alarak tabloyu doldurunuz.

x	...	−10	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	...
y = f(x)	...														...

2. Tablodaki değerleri kullanarak aşağıda verilen dik koordinat sistemi üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



3. f rasyonel fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Bağımsız değişkenin (0, ∞) nda aldığı değerler küçüldüğünde fonksiyonun aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirtiniz. Bu değişimin fonksiyon grafiğinde y ekseni ile ilişkisini açıklayınız.

b) (−∞, 0) nda bağımsız değişkenin aldığı değerlerin büyümesine bağlı olarak fonksiyonun aldığı değerlerin durumunu açıklayınız. Bu durumun fonksiyon grafiğinde y ekseni ile ilişkisini belirtiniz.

c) (0, ∞) nda bağımsız değişkenin aldığı değerler büyüdüğüne fonksiyonun aldığı değerlerin durumunu açıklayınız. Fonksiyon grafiğinde bu durumun x ekseni ile ilişkisini belirtiniz.

ç) (−∞, 0) nda bağımsız değişkenin aldığı değerler küçüldükçe fonksiyonun aldığı değerlerin durumunu açıklayınız. Bu durumun fonksiyon grafiğinde x ekseni ile ilişkisini değerlendiriniz.

4. Uygulamanın 2. maddesinde çizdiğiniz grafikten ve $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonun cebirsel ifadesinden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tanım kümesini bulunuz.

b) Görüntü kümesini bulunuz.

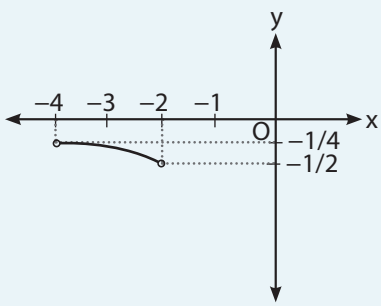
c) Fonksiyonun sıfırının olup olmadığını belirleyiniz.

ç) Fonksiyonun işaretini inceleyiniz.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu rasyonel referans fonksiyonu olarak adlandırılır.

d) Rasyonel referans fonksiyonu sıfırdan farklı her gerçek sayıyı çarpmaya göre tersine çevirir. "$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve a ile b aynı işaretli olmak üzere $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur." önermesinden hareketle fonksiyonun $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ nın her birinde artan-azalan olma durumlarını belirleyiniz.

e) Verilen bir tanım aralığının $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonundaki karşılığı olan aralığını (görüntü aralığını) cebirsel veya grafik temsili ile belirleyerek aşağıdaki tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

Tanım Aralığı	Cebirsel veya Grafiksel Temsil ile Yapılan İşlem	Görüntü Aralığı
$-4 < x < -2$		$-\frac{1}{2} < y < -\frac{1}{4}$

Tanım Aralığı	Cebirsel veya Grafiksel Temsil ile Yapılan İşlem	Görüntü Aralığı
(2, 5)	$2 < x < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} < y < \frac{1}{2}$
(–5, –1]		
$-3 \leq x < 0$		
$x > 4$		
$x < -2$		

f) Verilen bir tanım aralığının fonksiyondaki karşılığı olan aralığı belirlerken verilen aralıkla rasyonel referans fonksiyonunun azalan olduğu aralıklar arasındaki ilişkiyi yukarıdaki tabloyu dikkate alarak aşağıdaki alana yazınız.

g) Rasyonel fonksiyonlarda iki nicelik arasındaki ilişkinin doğru ya da ters orantılı çokluklardan hangisi ile temsil edildiği ile ilgili görüşlerinizi aşağıdaki alana yazarak sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

ğ) Rasyonel fonksiyonların gerçek yaşam problemlerinde hangi nicelikler arasındaki ilişkilerin modellenmesinde kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız.

h) Rasyonel referans fonksiyonun bire bir fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

ı) Rasyonel referans fonksiyonun tek-çift fonksiyon olma durumunu belirleyiniz.

i) Rasyonel referans fonksiyonun örten fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

j) Rasyonel referans fonksiyonun maksimum-minimum noktalarının bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

13. Örnek

$f: [2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun

a) Görüntü kümesini bulunuz.

b) Maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

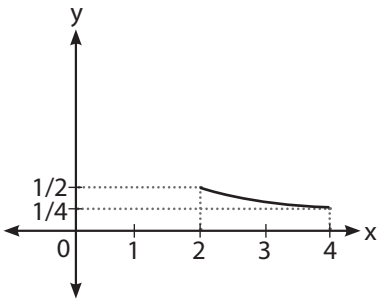
c) Bire birliğini inceleyiniz.

ç) Örtenliğini inceleyiniz.

d) Artan-azalanlığını inceleyiniz.

Çözüm

f fonksiyonunun tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş grafik temsili aşağıdaki gibidir:



a) f fonksiyonun grafiği incelendiğinde görüntü kümesi $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ dır. f fonksiyonunun cebirsel temsili kullanılırsa $2 \le x \le 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$ olacağından görüntü kümesi $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ olarak bulunur.

b) f fonksiyonunun grafiği ve cebirsel temsili dikkate alındığında tanım kümesi [2, 4], görüntü kümesi $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ dır. Bu durumda f fonksiyonu x = 2 noktasında maksimum değerini alır ve bu değer $\frac{1}{2}$'dir, x = 4 noktasında minimum değerini alır ve bu değer $\frac{1}{4}$'tür.

c) Tanım aralığındaki farklı x değerlerine karşılık gelen f(x) değerleri farklı olduğundan f, bire birdir. $\forall x_1, x_2 \in [2, 4]$ için $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

$x_1 = x_2$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.

ç) Değer aralığındaki her f(x) değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden f fonksiyonu örten değildir. Görüntü Kümesi: $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, Değer Kümesi: $\mathbb{R}$
f fonksiyonunun görüntü kümesi, değer kümesine eşit olmadığı için f örten değildir.

d) $\forall x_1, x_2 \in [2, 4]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu azalandır.

11. Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun

a) Grafiğini çiziniz.

b) Bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.

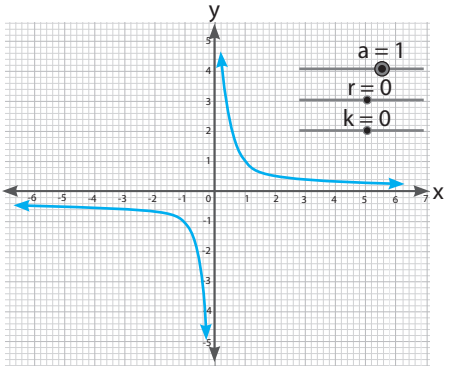
c) $x \in \left[-\frac{1}{6}, 3\right] - \{0\}$ olmak üzere f fonksiyonunun bu aralıkta alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

Etkileşimli içerik

11. Uygulama

Rasyonel Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a \neq 0, a \in \mathbb{R})$ Rasyonel Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.



1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen etkinliği gerçekleştiriniz.
   1. **adım:** Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, r, k sürgülerini tanımlayarak aralığı –5 ile 5 olarak seçiniz.
   2. **adım:** Cebir menüsünden **Giriş** bölümüne $g(x) = a \cdot \frac{1}{x + r} + k$ yazarak giriş yapınız.
   3. **adım:** Sürgüde a = 1, r = 0, k = 0 seçerek $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Yukarıda verilen etkinliğin matematik yazılımında yapılan benzer bir örneğinin ekran görüntüsü yukarıda verilmiştir.

a) r = 0, k = 0 iken a sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri girerek elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1: *r = 0, k = 0 iken a Sürgüsündeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a Sürgüsünün Değeri	Oluşan Rasyonel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $(g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k)$	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = −1	$h(x) = -\frac{1}{x}$	−1 ile çarpma	x eksenine göre yansıma
m(x)	a = 2	$m(x) = \frac{2}{x}$	2 ile çarpma	2 kat dikey daralma
n(x)	a = 4			
s(x)	a = −3			

b) k = 0 iken a ve r sürgülerine Tablo 2'deki değerleri girerek elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanıp tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2: *k = 0 iken a ve r Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a ve r Sürgülerinin Değeri	Oluşan Rasyonel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $(g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k)$	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 r = 2	$h(x) = \frac{1}{x+2}$	Tüm bağımsız değişkenlerine 2 ekleme	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme
m(x)	a = 1 r = − 1			
n(x)	a = 4 r = 3			
s(x)	a = −2 r = −2			

c) r = 0 iken a ve k sürgülerine Tablo 3'teki değerleri girerek elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanıp tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo3: *r = 0 iken a ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

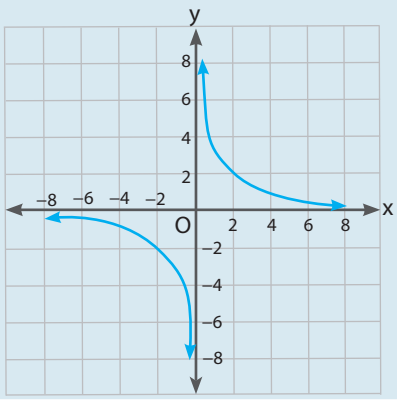
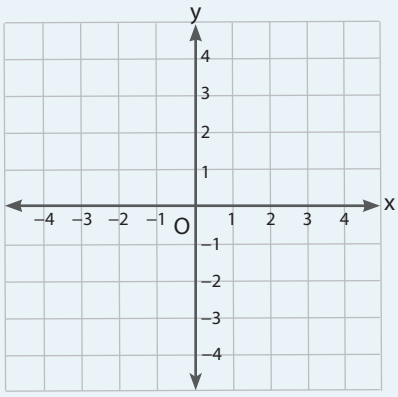
Fonksiyon İsmi	a ve k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Rasyonel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $(g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k)$	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 k = 2	$h(x) = \frac{1}{x} + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değere 2 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
m(x)	a = 1 k = −1			
n(x)	a = 4 k = 3			
s(x)	a = −2 k = −2			

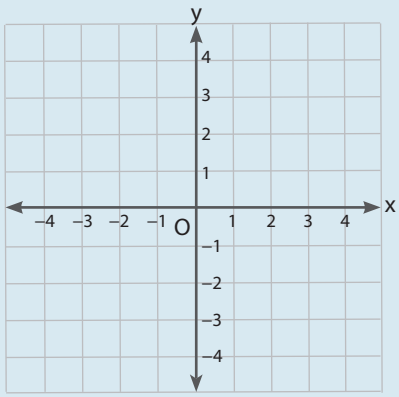
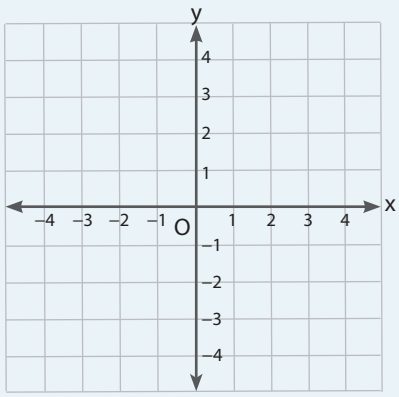
ç) a, r, k sürgülerine Tablo 4'teki değerleri girip elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak tabloda boş olan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4: *a, r ve k Sürgülerindeki Değişimine Göre Fonksiyondaki Dönüşümler*

Fonksiyon İsmi	a, r, k Sürgülerinin Değeri	Oluşan Rasyonel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $(g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k)$	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Rasyonel Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h(x)	a = 1 r = 2 k = 3	$h(x) = \frac{1}{x+2} + 3$	Bağımsız değişkeninin 2 fazlasının aldığı değere 3 ekleme	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
m(x)	a = 1 r = –2 k = –1			
n(x)	a = 1 r = 3 k = –2			
s(x)	a = –2 r = –4 k = 3			

2. Aşağıdaki tabloyu $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerle elde edilen rasyonel fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini örnekteki gibi doldurunuz. Grafik temsilini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsili	Grafik Temsili
4 kat dikey daralma	$g(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$	
x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme		

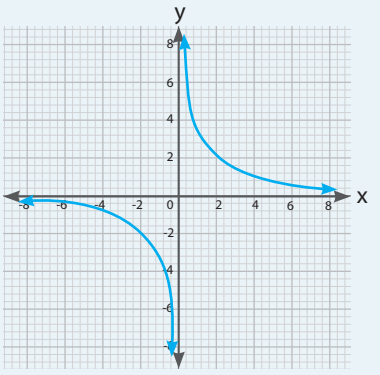
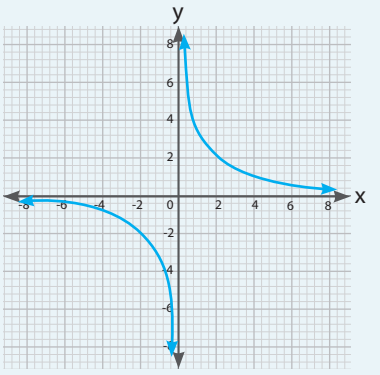
Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsili	Grafik Temsili
x eksenine göre yansıma, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme		
2 kat dikey daralma, x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme		

3. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun nitel özelliklerinden hareketle aşağıda cebirsel temsili verilen rasyonel fonksiyonun nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı ifade ediniz.

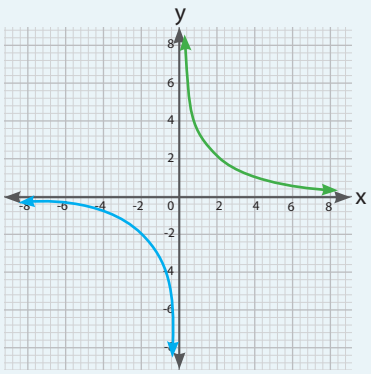
$g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$, $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$		
Nitel Özellikleri	**Varsayım**	
	a > 0	**a < 0**
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		

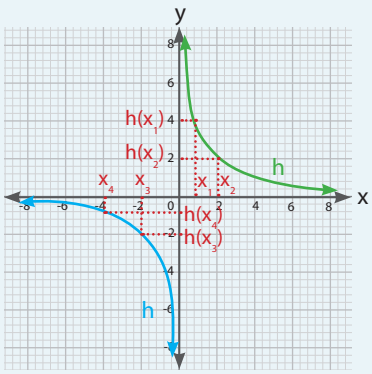
4. Aşağıdaki tabloda $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımı kullanarak çiziniz, tabloda istenen nitel özellikleri örnekteki gibi doldurunuz.

Fonksiyon	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = \frac{3}{x}$	Grafik	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun sıfırda tanımlı olmadığı görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ - {0} dır.	 Grafik incelendiğinde h fonksiyonun değerinin sıfır olamayacağı görülmektedir. Görüntü kümesi $\mathbb{R}$ - {0} dır.
	Cebirsel	f rasyonel referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ - {0} da tanımlıdır. $h(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ 'inde tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır.	f rasyonel referans fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ - {0} dır. $h(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ 'inde görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır.
$m(x) = \frac{-2}{x-3}$	Grafik		
	Cebirsel		
$n(x) = \frac{3}{x-2} + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımı kullanarak çiziniz, tabloda istenen nitel özellikleri örnekteki gibi doldurunuz.

<table>
<tr><th>Fonksiyon</th><th>İnceleme Türü</th><th>İşareti</th><th>Artan-Azalan Olduğu Aralıklar</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$h(x) = \frac{3}{x}$</td><td>Grafik</td><td> 

Grafik incelendiğinde h fonksiyonu $(0, \infty)$ da pozitif, $(-\infty, 0)$ da negatiftir.</td><td> 

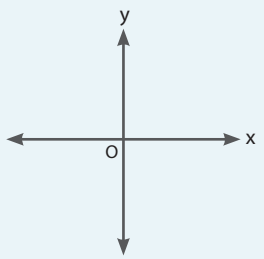
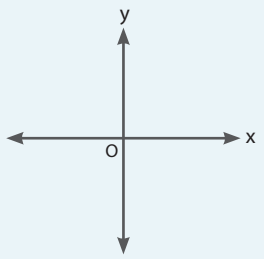
$\forall x \in (0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için $h(x_1) > h(x_2)$ olduğundan $(0, \infty)$ da azalandır.
$\forall x \in (-\infty, 0)$ ve $x_4 < x_3$ için $h(x_4) > h(x_3)$ olduğundan $(-\infty, 0)$ da azalandır.</td></tr>
<tr><td>Cebirsel</td><td>f referans fonksiyonu olmak üzere
$\forall x \in (-\infty, 0)$ için $f(x)<0$ ise
$\forall x \in (-\infty, 0)$ için
$h(x) = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x} < 0$ olduğundan
$(-\infty, 0)$ da h fonksiyonu negatiftir.
$\forall x \in (0, \infty)$ için $f(x) > 0$ ise
$\forall x \in (0, \infty)$ için
$h(x) = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x} > 0$ olduğundan
$(0,\infty)$ da h fonksiyonu pozitiftir.
İşaret tablosu
$k(x) = 3$, $t(x) = x$, $h(x) = \frac{k(x)}{t(x)}$ olsun,
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>||</td><td>+</td></tr>
<tr><td>x</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$h(x) = \frac{3}{x}$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
</table>
h fonksiyonu $(0,\infty)$ da pozitif
$(-\infty, 0)$ da negatiftir.
Tabloda h fonksiyonunu tanımsız yapan değer çift çizgi ile gösterilmiştir.</td><td>$\forall x_3, x_4 \in (-\infty, 0)$ ve $x_4 < x_3$ için f rasyonel referans fonksiyonu azalandır.
$x_4 < x_3 < 0$ olmak üzere $\forall x_3, x_4$ için
$\frac{1}{x_4} > \frac{1}{x_3}$
$\frac{3}{x_4} > \frac{3}{x_3}$
$h(x_4) > h(x_3)$ olur.
Bu nedenle $(-\infty, 0)$ da h fonksiyonu azalandır.
$\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)$ ve $x_1 < x_2$ için f rasyonel referans fonksiyonu azalandır.
$0 < x_1 < x_2$ olmak üzere $\forall x_1, x_2$ için
$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$
$\frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2}$
$h(x_1) > h(x_2)$ olur.
Bu nedenle $(0, \infty)$ da h fonksiyonu azalandır.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$m(x) = \frac{-2}{x-3}$</td><td>Grafik</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cebirsel</td><td></td><td></td></tr>
</table>

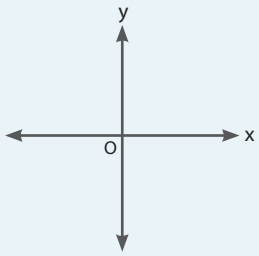
Fonksiyon	İnceleme Türü	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$n(x) = \frac{3}{x-2} + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

Rasyonel fonksiyonun paydasını sıfır yapan değer tanımsız yapan değerdir ve işaret tablosunda çift çizgiyle belirtilir.

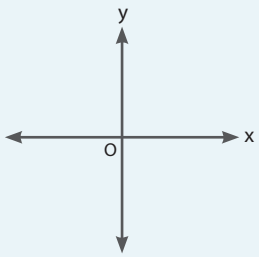
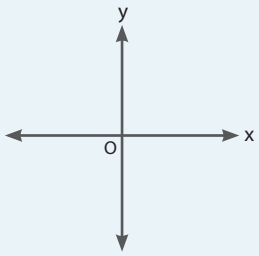
5. Aşağıdaki tabloda $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

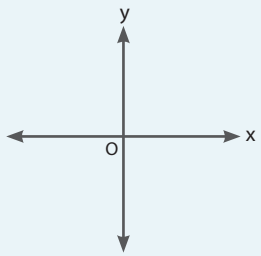
a) Aşağıdaki tabloda değer kümesi gerçek sayılar olan fonksiyonlar verilmiştir. Bu fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

Fonksiyon	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$k(x) = \frac{2}{x}$	Grafik		
	Cebirsel		
$r(x) = \frac{-3}{x-2}$	Grafik		
	Cebirsel		

Fonksiyon	İnceleme Türü	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri
$n(x) = \frac{3}{x-2} + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

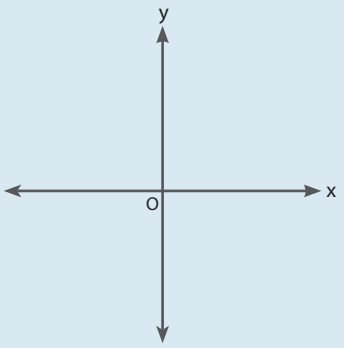
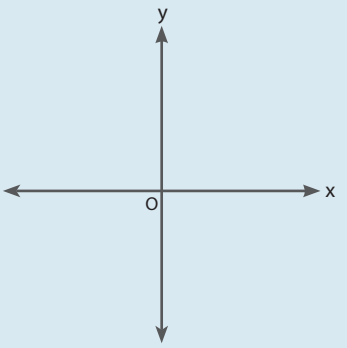
b) Aşağıdaki tabloda değer kümesi gerçek sayılar olan fonksiyonlar verilmiştir. Bu fonksiyonların grafiklerini tablodaki dik koordinat sistemine çiziniz. Tabloyu fonksiyonların grafik temsillerinden yararlanarak doldurunuz.

Fonksiyon	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$k(x) = \frac{2}{x}$	Grafik		
	Cebirsel		
$r(x) = \frac{-3}{x-2}$	Grafik		
	Cebirsel		

Fonksiyon	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$n(x) = \frac{3}{x-2} + 1$	Grafik		
	Cebirsel		

6. 4 ve 5. maddelerdeki n fonksiyonunun çizimini yaptığınız grafik ile kullandığınız matematik yazılımından elde ettiğiniz nitel özelliklerini karşılaştırınız. Elde ettiğiniz farklı sonuçlar varsa nedenlerini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

7. Yukarıdaki tablolardan elde ettiğiniz bilgileri varsayımlarınız ile karşılaştırarak $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonundan türetilmiş, $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k \; (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonların nitel özellikleri hakkındaki önermenizi $a > 0, r > 0, k > 0$ ve $a < 0, r > 0, k > 0$ için ayrı ayrı oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel olarak veya cebirsel dil ile ifade ediniz.

$g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$	$a > 0, r > 0, k > 0$ 	$a < 0, r > 0, k > 0$ 

Nitel Özellikler	Genellemeler
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
İşareti	
Artanlığı-Azalanlığı	
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri	

8. Oluşturduğunuz önerme yardımıyla aşağıda verilen problemi inceleyip soruları çözünüz.

Bir aracın belirli bir mesafeyi katetme süresi hızı ile ters orantılıdır. Örneğin bir aracın hızına göre 500 km'lik yolu ne kadar sürede tamamlayacağını ifade eden denklem

V: Aracın hızı (km/saat)

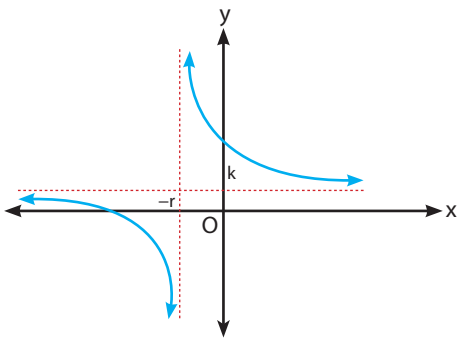
D: Sabit mesafe (örneğin 500 km)

f (V): Aracın belirli bir mesafeyi katetme süresi (saat)

olmak üzere $f(V) = \frac{D}{V}$ şeklinde ifade edilebilir.

Buna göre bir aracın katettiği 500 kilometrelik yol için f fonksiyonunun nitel özelliklerinin (tanım kümesi, görüntü kümesi, artan-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları) problem bağlamındaki anlamlarını ifade ederek çözümlerini yapınız.

9. Genellemelerinizden yola çıkarak $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonundan türetilmiş, $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k \, (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonlarının $a > 0$, $r > 0$ ve $k > 0$ için grafiği aşağıdaki dik koordinat sistemine çizilmiştir. g fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi verilen grafik yardımıyla doğrulayınız veya cebirsel olarak ispatlayınız.



Nitel Özellikleri	Grafik ile Doğrulama	Cebirsel İspat
Tanım Kümesi	Grafik incelendiğinde $x = -r$ haricinde tüm gerçek sayılarda tanımlı olduğu görülmektedir.	$g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ ifade $x + r = 0$ $x = -r$ için tanımsız olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-r\}$ dir.
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artanlığı-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları		

10. Yukarıdaki tabloyu doldururken kullandığınız grafik ile doğrulama veya cebirsel ispat yöntemlerinin olumlu veya olumsuz yönlerini sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonunun maksimum ve minimum noktaları ile bu noktalardaki değerlerini bulunuz, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Bulgularınızı grafikle doğrulayınız ve cebirsel olarak ispatlayınız. Kullanılan yöntemleri, sağladıkları faydalar ve kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

14. Örnek

$g: \mathbb{R}-\{-4\} \to \mathbb{R}-\{1\}, g(x) = \frac{1}{x+4} + 1$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) g fonksiyonunun sıfırını bulunuz.

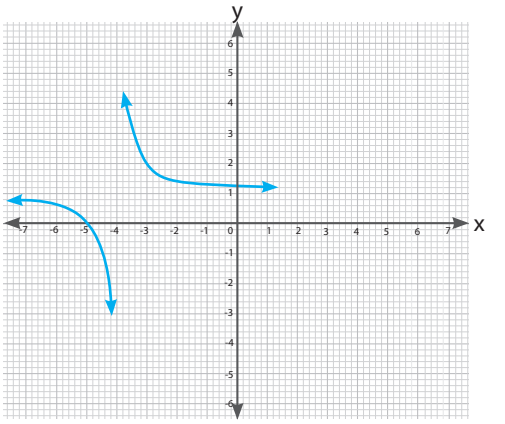
b) g fonksiyonunun örten fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

c) g fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

ç) g fonksiyonunun tekliğini-çiftliğini belirleyiniz.

Çözüm

g fonksiyonunun grafiği $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun grafiği yardımıyla çizilirse yandaki grafik elde edilir.



a) $g(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerleri bulunmalıdır. $\frac{1}{x+4} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+4} = -1$

$1 = -x - 4 \Rightarrow x = -5$ fonksiyonun sıfırıdır.

b) g fonksiyonunun grafik incelemesinden görüntü kümesi $\mathbb{R}-\{1\}$ bulunur. g fonksiyonunun görüntü kümesi ile değer kümesi eşit olduğundan g fonksiyonu örtendir.

c) Cebirsel inceleme: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{-4\}$ için

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$\frac{1}{x_1+4} + 1 = \frac{1}{x_2+4} + 1$$

$$\frac{1}{x_1+4} = \frac{1}{x_2+4}$$

$$x_1 + 4 = x_2 + 4$$

$x_1 = x_2$ olduğundan g fonksiyonu bire birdir.

Referans Fonksiyonu Yardımıyla İnceleme: f rasyonel referans fonksiyonu bire birdir. g fonksiyonu f fonksiyonuna uygulanan dönüşümlerle elde edilmiş fonksiyon olduğundan bire bir olma durumuna etkisi yoktur. Dolayısıyla g fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire birdir.

ç) Grafik İnceleme: g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olmadığından tek fonksiyon değildir, y eksenine göre simetrik olmadığından çift fonksiyon değildir.

Cebirsel İnceleme: $g(-x) = \frac{1}{-x+4} + 1$'dir.

$g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyon değildir.

$g(-x) = \frac{1}{-x+4} + 1$ ve $-g(x) = -\left(\frac{1}{x+4} + 1\right)$

fonksiyonlarına göre $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

12. Sıra Sizde

$g: \mathbb{R}-\{-1\} \to \mathbb{R}-\{0\}, g(x) = \frac{4}{x+1}$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) g fonksiyonunun (varsa) sıfırını bulunuz.

b) g fonksiyonunun örtenliğini inceleyiniz.

c) g fonksiyonunun bire birliğini inceleyiniz.

ç) g fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz

15. Örnek

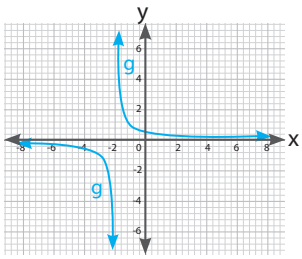
$g: \mathbb{R}-\{-2\} \to \mathbb{R}-\{0\}, g(x)=\frac{1}{x+2}$ **şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.**
Buna göre

a) g fonksiyonunun maksimum-minimum noktasını ve değerlerini bulunuz.

b) g fonksiyonunun artan-azalan olduğu aralıkları inceleyiniz.

Çözüm

g fonksiyonunun grafiği $f(x)=\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun grafiği yardımıyla çizilirse yandaki grafik elde edilir.



a) Grafik incelendiğinde g fonksiyonunun maksimum-minimum noktası ve değerinin olmadığı görülmektedir.

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{-2\}, x_1<x_2$ olmak üzere

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{1}{x_1+2}-\frac{1}{x_2+2}=\frac{x_2+2-x_1-2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$x_1<x_2$ olduğundan $x_2-x_1>0$ olur. $-2<x_1<x_2$ ise $(x_1+2)(x_2+2)>0$'dır.

$g(x_1)-g(x_2)>0 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$ olduğundan g fonksiyonu $(-2, \infty)$ da azalandır.

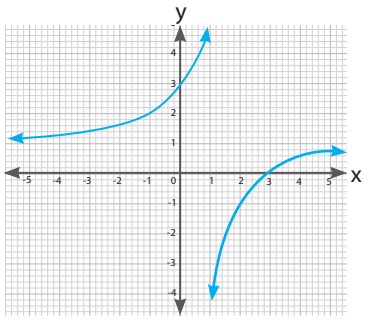
$x_1<x_2<-2$ ise $(x_1+2)(x_2+2)>0$'dır. $g(x_1)-g(x_2)>0 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$ olduğundan g fonksiyonu $(-\infty, -2)$ da azalandır. g fonksiyonunun azalan olduğu aralıklar $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ dır

16. Örnek

$g(x)=\frac{-2}{x-1}+1$ **şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonunun nitel özelliklerini (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırları, bire birliği, tekliği-çiftliği, örtenliği) bulunuz.**

Çözüm

g fonksiyonunun grafiği $f(x)=\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun grafiği yardımıyla çizilirse Şekil 1'deki grafik elde edilir.



Şekil 1

Nitel Özellikleri	Açıklamalar
Tanım Kümesi	Grafik incelenirse tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{1\}$ bulunur.
Görüntü Kümesi	Grafik incelenirse görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ bulunur.
İşareti	Grafik incelenirse Pozitif değerli olduğu aralık: $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$ Negatif değerli olduğu aralık: $(1, 3)$ bulunur.
Artanlığı–Azalanlığı	Tanım kümesinin her a, b elemanı için $a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$ olduğundan g fonksiyonu artan fonksiyondur.
Maksimum–Minimum Noktaları	Grafik incelenirse maksimum ve minimum noktalarının bulunmadığı görülür.
Sıfırları	$g(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri bulunmalıdır. Bu durumda g fonksiyonunun sıfırı $\frac{-2}{x-1} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$ olarak bulunur.
Bire Birliği	g fonksiyonunun tanım aralığındaki farklı x değerlerine karşılık gelen g(x) değerleri farklı olduğundan g fonksiyonu bire birdir.
Tekliği–Çiftliği	g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olmadığından g, tek fonksiyon değildir. g fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olmadığından g, çift fonksiyon değildir. Bu nedenle g fonksiyonu ne tek ne de çift fonksiyondur.
Örtenliği	$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = g(x_0)$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$ bulunmadığı için g örten değildir.

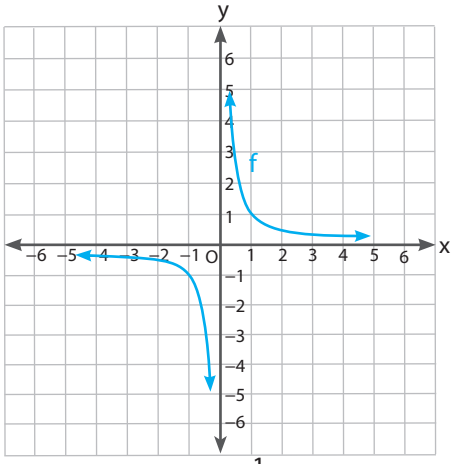
17. Örnek

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler ile türetilen $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

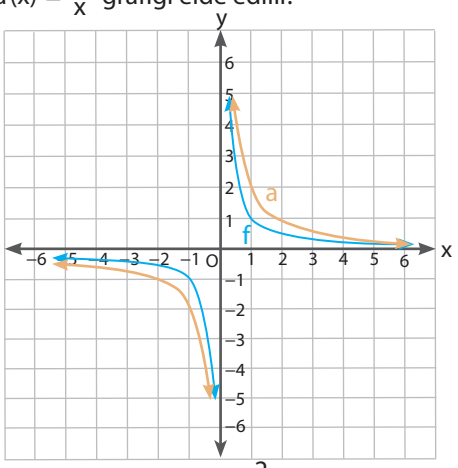
$f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonunun grafiğine uygulanacak dönüşümler ile $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilir. Uygulanacak dönüşüm ve elde edilecek grafikler aşağıdaki adımlarda verilmiştir.

1. adım: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.



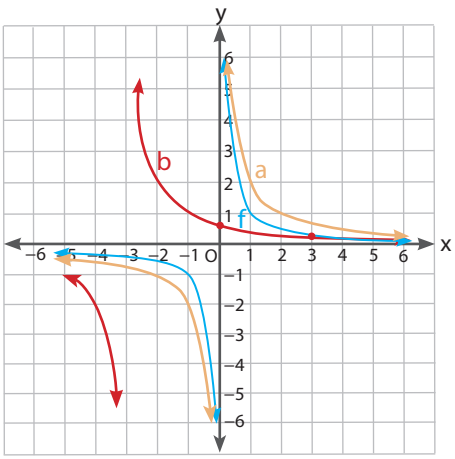
$f(x) = \frac{1}{x}$

2. adım: f fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların değerleri 2 katına eşlenir ise $a(x) = \frac{2}{x}$ grafiği elde edilir.

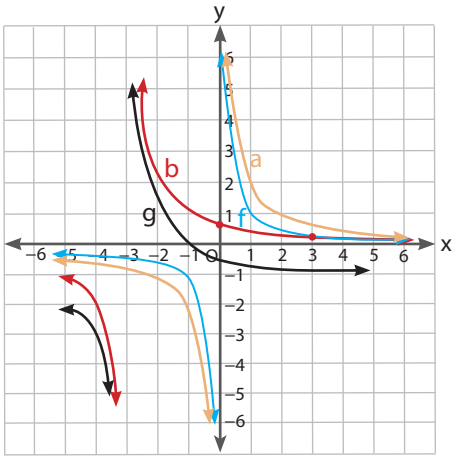


$a(x) = \frac{2}{x}$

3. adım: a fonksiyonunun grafiğine x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme dönüşümü uygulanır ise $b(x) = \frac{2}{x+3}$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



4. adım: b fonksiyonunun grafiğine y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanır ise $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



13 . Sıra Sizde

Aşağıdaki verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tablodaki ilgili yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel Özellikleri	$f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$, $f(x) = \frac{4}{x}$	$g: [0, 5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{x+1} + 3$	$h: [-8, -3] \to \left[\frac{7}{6}, 2\right]$, $h(x) = -\frac{1}{x+2} + 1$
Bire Birliği			
Örtenliği			
Artanlığı-Azalanlığı			
Maksimum-Minimum Değerleri			
Sıfırları			
İşareti			

Performans Görevi

Adı:	Karesel, Karekök ve Rasyonel Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri
Beklenen Performans:	Karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonların nitel özellikleri ve bu referans fonksiyonların grafiklerine uygulanan dönüşümlerin fonksiyonun cebirsel temsilinde oluşturduğu değişime yönelik inceleme yapma ve sunum hazırlama
Görev:	Bu görevde karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonların nitel özellikleri ve bu referans fonksiyonların grafiklerine uygulanan dönüşümlerin fonksiyonun cebirsel temsilinde oluşturduğu değişime yönelik inceleme yapmanız beklenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bir çalışma planı oluşturunuz, yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • "Karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonların nitel özellikleri" ve "Karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonların grafiklerine uygulanan dönüşümlerin fonksiyonun cebirsel temsilinde oluşturduğu değişim" ile ilgili incelemeniz için araştırmanızı yapınız. • Araştırma sonucunu sınıfta nasıl paylaşacağınıza karar veriniz. • Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız. • Görevinizi öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamladıktan sonra araştırma sonucunuzu sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Kontrol Noktası

1. $a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere gerçek sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ şeklinde tanımlanan rasyonel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. adım: $f(x) = \frac{1}{x}$ referans fonksiyonunun grafiği x ekseni boyunca negatif yönde r birim $(r > 0)$ ötelenerek $h(x) = \frac{1}{x+r}$ şeklinde tanımlı h fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. adım: $h(x) = \frac{1}{x+r}$ fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $r(x) = a \cdot \frac{1}{x+r}$ şeklinde tanımlı r fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: $r(x) = a \cdot \frac{1}{x+r}$ fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde k birim $(k > 0)$ ötelenerek $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. $a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ şeklinde tanımlanan rasyonel fonksiyonların nitel özellikleri aşağıdaki gibidir:

- Tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{-r\}$, görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{k\}$
- Bire birdir, örten değildir, maksimum-minimum noktası ve değeri yoktur.
- $a > 0$ ise $(-\infty, -r)$ ve $(-r, \infty)$ nda azalandır.
- $a < 0$ ise $(-\infty, -r)$ ve $(-r, \infty)$ nda artandır.

Alıştırmalar

1. Bir işin birim zamanda yapılma hızına güç denir ve P (watt) ile gösterilir. Yapılan iş W (joule), işin yapılması için geçen süre t (sn.) olmak üzere güç $P = \frac{W}{t}$ şeklinde ifade edilmektedir.

Yapılan 300 joule işin yapılma süresi t ve gücün t'ye bağlı fonksiyonu p(t) olmak üzere

a) p fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Fonksiyonun artan-azalanlığını inceleyiniz.

c) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

ç) $2 \leq t \leq 100$ aralığında gücün maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

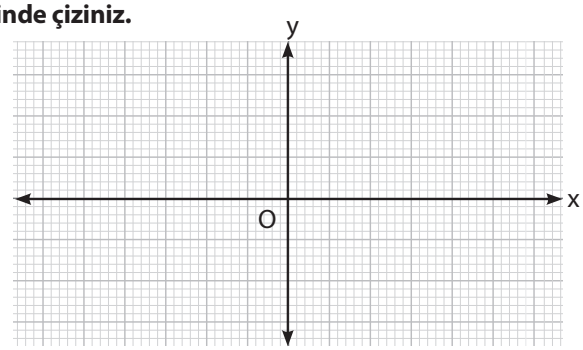
2. Yapılan bir yardım etkinliğinin maliyeti 2000 TL'dir. Maliyet, etkinliğe katılacak kişilere eşit bir şekilde paylaştırılarak karşılanacaktır. Etkinliğe katılan kişi sayısı x olmak üzere kişi başına düşen maliyet k fonksiyonu ile temsil ediliyor.

Buna göre

a) k fonksiyonunun cebirsel temsilini yazarak grafiğini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz.

b) Etkinliğe katılan her kişi, kendisine düşen ücrete yirmişer TL ilave ederek Çocuk Esirgeme Kurumuna yardım ediyor. Etkinliğe katılanların kişi başına düşen toplam ücret t fonksiyonu ile temsil ediliyor. t fonksiyonunun cebirsel temsilini yazarak grafiğini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz.

c) Etkinliğin olduğu güne doğum günü denk gelen 3 kişinin ödeyeceği ücret diğer katılanlara eşit şekilde dağıtılarak bu kişilerden ücret alınmamıştır. Ücret ödeyenlerin kişi başına düşen maliyeti d fonksiyonu ile temsil ediliyor. d fonksiyonunun cebirsel temsilini yazarak grafiğini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz.



3. $f(x) = \frac{3}{x+4} - 2$ **fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak verilen tanım ve değer kümesine göre istenen özelliklere uygun olarak tabloyu doldurunuz.**

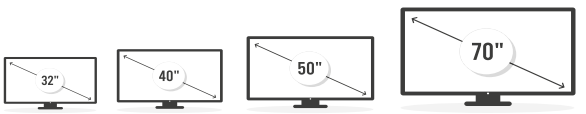
Tanım ve Değer Kümesi	Bire Birliği	Örtenliği	Maksimum ve Minimum Değeri	Sıfırları	Artan-Azalanlığı
$f: \mathbb{R} - \{-4\} \to \mathbb{R}$					
$f: \mathbb{R} - \{-4\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$					
$f: [-3, \infty) \to (-2, 1]$					
$f: [-7, -5] \to [-6, -3]$					

4. Tema alıştırma ek soruları

4.5. DOĞRUSAL, KARESEL, KAREKÖK VE RASYONEL REFERANS FONKSİYONLAR İLE BU FONKSİYONLARDAN TÜRETİLEBİLEN FONKSİYONLARIN TERS FONKSİYONLARI

Konuya Başlarken

Bir uzunluk ölçüsü olan inç (inch), birçok ülkede yaygın şekilde kullanılmaktadır. Dünya genelinde ise elektronik cihazların ekran boyut ölçülerinde, bisiklet tekerleği ölçüsünde, boru çapları vb. alanlarda kullanılmaktadır. 1 inç 2,54 santimetredir ve çift tırnak sembolü (″) ile gösterilir. Televizyon ekranları köşegen uzunluklarının inç veya santimetre karşılığı cinsinden isimlendirilir. Örneğin bir televizyon ekranının köşegen uzunluğu 32″ ise 32 inçlik ekran veya santimetre cinsinden karşılığı 81, 28 cm yerine 81 cm'lik ekran şeklinde ifade edilir.



Buna göre

1. **Bir TV ekranının köşegen uzunluğunu inç ve cm cinsinden birbirine dönüştüren cebirsel temsillerin doğrusal fonksiyon olup olmadığı hakkındaki görüşlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile sözel olarak paylaşınız.**
2. **İnç cinsinden verilen bir TV ekranının köşegen uzunluğunu santimetreye çeviren ifadenin cebirsel temsilinde bağımlı ve bağımsız değişkenler yer değiştirdiğinde oluşacak yeni cebirsel temsilin ifadesini sınıf arkadaşlarınız ile sözel olarak paylaşınız.**

Para birimlerinin birbiri cinsinden ifadesi (döviz dönüşümleri), bir mesafenin alınma süresinin mesafe ve hız türünden ifadesi, sıcaklık dönüşümleri, bir mağazadaki ürünün indirimli fiyatından ürün etiket fiyatını bulma gibi birçok alanda ters fonksiyonlar kullanılır. Ters fonksiyon, bir fonksiyonun uyguladığı işlemi tersine çevirmek için ona karşılık gelen özel bir fonksiyondur.

12. Uygulama

Doğrusal Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

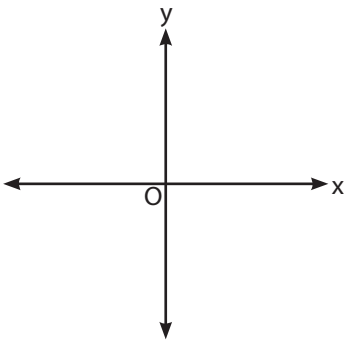
1. Aşağıda verilen adımları uygulayınız.
   1. **adım:** Tablo 1'deki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.
   2. **adım:** f fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki dik koordinat sisteminde çiziniz.
   3. **adım:** Tablo 1'deki bağımlı ve bağımsız değişkenlerin yer değiştirilmesi ile oluşturulan Tablo 2'de bağımsız değişken için ayrılan boşlukları uygun şekilde doldurunuz.
   4. **adım:** Tablo 2'deki bağımlı ve bağımsız değişkenlerden oluşan noktaları, dik koordinat sisteminde işaretleyiniz ve noktaları birleştirerek fonksiyonun grafiğini çiziniz.
   5. **adım:** Oluşan yeni fonksiyonun grafiğini inceleyip cebirsel temsilini Tablo 2'deki uygun alana yazınız.

Tablo 1

f(x) = 2x + 4	Bağımsız Değişken (x)	–1	0	1	2
	Bağımlı Değişken (y)				

Tablo 2

Bağımsız Değişken (x)					**Cebirsel Temsili**
Bağımlı Değişken (y)	–1	0	1	2	



a) Oluşan yeni fonksiyonun doğrusal fonksiyon olup olmadığını belirleyerek aşağıdaki alana görüşünüzü yazınız.

b) Verilen doğrusal fonksiyon ile oluşan yeni fonksiyonun birbirleri ile ilişkisine dair varsayımlarda bulununuz.

2. Aşağıda cebirsel temsilleri verilen doğrusal fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerlerinin değiştirilmesi ile oluşan yeni doğrusal fonksiyonlara ait bir tablo verilmiştir.

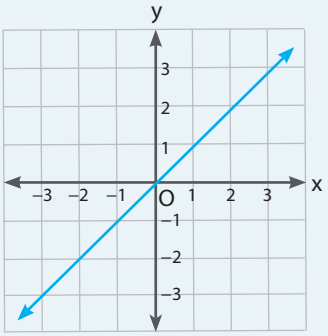
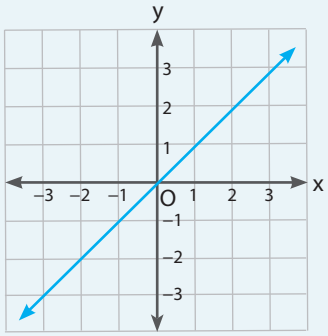
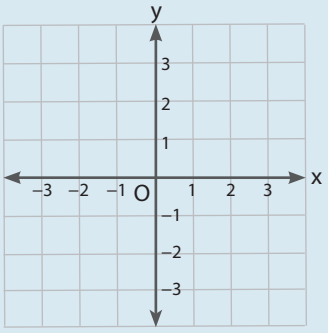
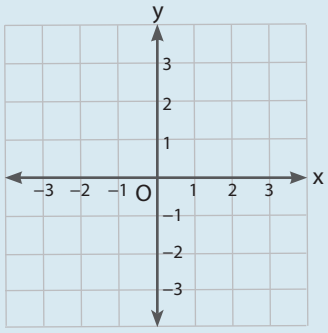
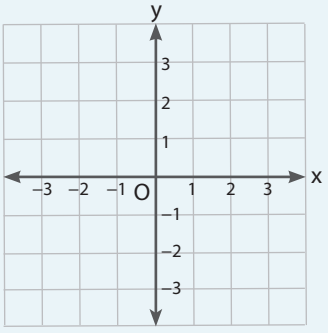
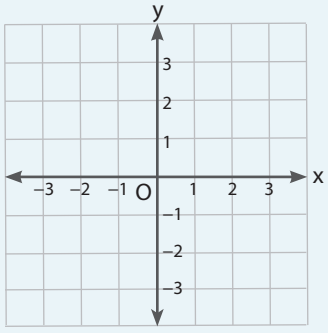
a) Bu tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili
$f(x) = x$	–1	–1	–1	–1	$f^{-1}(x) = x$
	0			0	
	1			1	
	2			2	
$g(x) = 4x$	–1	–4	–4	–1	
	0			0	
	1			1	
	2			2	
$h(x) = x - 2$	–1			–1	
	0	–2	–2	0	
	1			1	
	2			2	
$k(x) = 3x + 1$	–1			–1	
	0			0	
	1	4	4	1	
	2			2	

f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile gösterilir.

b) Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak doğrusal fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Aşağıdaki tabloda cebirsel temsili verilen fonksiyonların grafiğini, tersinin cebirsel temsilini ve tersinin grafiğini örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Grafiği	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$f(x) = x$		$f^{-1}(x) = x$	
$g(x) = 4x$			
$h(x) = x - 2$			

4. Doldurduğunuz tabloya göre genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız.

5. Doğrusal fonksiyon ile bu fonksiyonun ters fonksiyonu arasındaki ilişkiye ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.

6. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

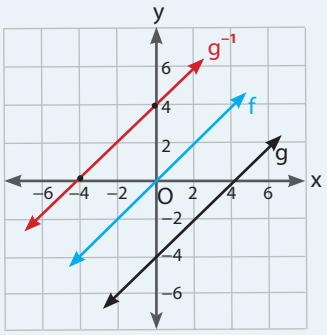
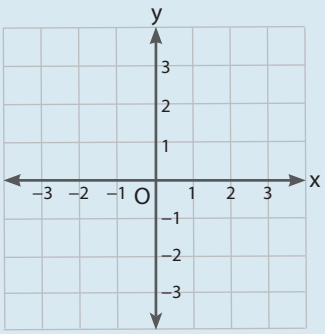
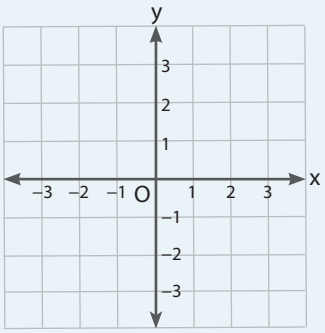
1. adım: Matematik yazılımında **Giriş** kısmına f(x) = x yazarak doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. adım: Aşağıdaki tabloda cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları giriş kısmına yazarak grafiklerini çiziniz.

3. adım: Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının cebirsel temsillerini tabloda uygun alana yazınız.

4. adım: Ters fonksiyonunun cebirsel temsilini matematik yazılımının giriş kısmına yazarak grafiğini çiziniz.

5. adım: Tüm grafikleri örnekteki gibi tabloda uygun alanlara çiziniz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g(x) = x - 4$	$g^{-1}(x) = x + 4$	
$h(x) = 3x$		
$k(x) = 2x + 1$		

7. Uygulamanın 6. maddesinden yararlanarak doğrusal fonksiyonun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği ile doğrusal fonksiyonun tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

8. Doğrusal fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait önermelerinizi fonksiyonların tanım-değer kümesi ve simetri özelliği bağlamında değerlendiriniz. Değerlendirmenizi aşağıdaki alana yazınız.

18. Örnek

Bir soğutucu dolap, içindeki malzemeleri bulunduğu ortam sıcaklığına göre 12°C soğutacak şekilde programlanmıştır.
Örneğin ortam sıcaklığı 22°C ise soğutucu dolap içi sıcaklık 10°C'tur.

Buna göre

a) Soğutucu dolabın iç sıcaklığının ortam sıcaklığına bağlı ifadesinin cebirsel temsilini bulunuz.

b) Ortam sıcaklığının soğutucu dolabın iç sıcaklığına bağlı ifadesinin cebirsel temsilini bulunuz.

c) Her iki cebirsel ifadenin birbirleriyle olan ilişkisini grafik temsillerini kullanarak tespit ediniz.

ç) Ortam sıcaklığının –4°C ile 18°C aralığında olduğu durumda soğutucu dolabın iç sıcaklığının değer aralığını bulunuz. Her iki aralığın ilişkisini, fonksiyonların genel özelliklerini tanım ve görüntü kümesi bağlamında değerlendiriniz.

Çözüm

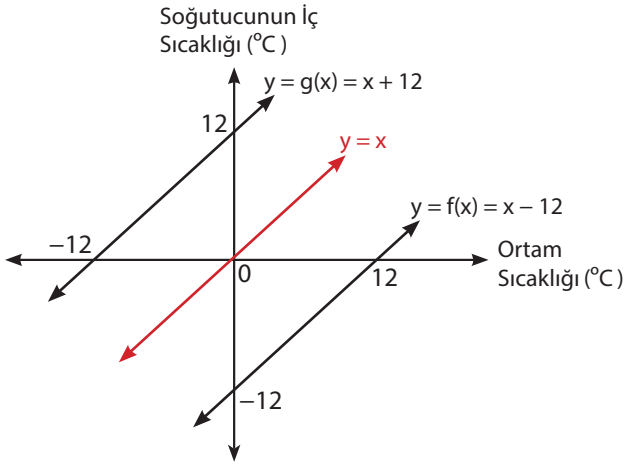
a) Ortam sıcaklığı x, soğutucu dolabın iç sıcaklığı y olsun. Soğutucu dolabın iç sıcaklığının ortam sıcaklığına bağlı ifadesinin cebirsel temsili f fonksiyonu ile ifade edilirse

$y = f(x) = x - 12$ olur.

b) Soğutucu dolabın iç sıcaklığı x, ortam sıcaklığı y olsun. Ortam sıcaklığının soğutucu dolabın iç sıcaklığına bağlı ifadesinin cebirsel temsili g fonksiyonu ile ifade edilirse

$y = g(x) = x + 12$ olur.

c) Bir fonksiyonun tersinin grafiği, fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. Buna göre g fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. Bu nedenle g fonksiyonu, f fonksiyonunun tersidir. $g(x) = f^{-1}(x)$ şeklinde ifade edilir. Fonksiyonların grafik temsilleri aşağıdaki dik koordinat sisteminde çizilmiştir.



ç) Ortam sıcaklığının –4°C ile 18°C aralığında olması, f fonksiyonunun tanım kümesinin [–4,18] olduğunu belirtir.

$f(-4) = -4 - 12 = -16$, $f(18) = 18 - 12 = 6$ olduğundan f fonksiyonunun görüntü kümesi [–16, 6] olur.

Bu durum $f: [-4, 18] \rightarrow [-16, 6]$ ile gösterilir.

g, f fonksiyonun tersi olduğundan [–16, 6] aralığı g nin tanım kümesi, [–4,18] aralığı g nin görüntü kümesi olur.

Bu durum $f: [-4, 18] \rightarrow [-16, 6]$

$g = f^{-1}: [-16, 6] \rightarrow [-4,18]$ şeklinde gösterilir.

14. Sıra Sizde

Ticari taksilerde yolcunun gideceği mesafeye göre ödeyeceği ücreti hesaplayan cihaza taksimetre denir. Bir taksimetre çalıştırıldığında önceden belirlenmiş bir açılış ücretine ek olarak kilometre başına belli bir ücreti hesaplayarak yolcunun ödeyeceği ücreti belirler. Bir ticari takside taksimetre açılış ücreti 80 TL, kilometre başına ücret 25 TL olarak belirlenmiştir.

Buna göre

a) Bir taksinin taksimetresi açıldığı andan itibaren aldığı mesafeye (km) göre yolcunun ödeyeceği ücreti (TL) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) Yolcunun ödeyeceği ücrete (TL) göre taksimetrenin açıldığı andan itibaren aldığı mesafeyi (km) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

c) Her iki cebirsel ifadenin birbirleriyle olan ilişkisini grafik temsillerini kullanarak tespit ediniz.

ç) Taksimetrenin hesap ettiği ücretin 680 TL ile 1080 TL arasında olması durumunda taksinin aldığı mesafenin aralığını bulunuz. Her iki aralığın ilişkisini, fonksiyonların genel özelliklerinden tanım ve görüntü kümesi bağlamında değerlendiriniz.

13. Uygulama

Rasyonel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonu için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken(x)	Bağımlı Değişken (y)	Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili
$f(x) = \frac{1}{x}$	–2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	–2	
	–1			–1	
	1			1	
	2			2	

a) Rasyonel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığı ile ilgili görüşünüzü sınıf arkadaşlarınız ile paylaşınız.

b) Rasyonel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmama durumunun nedeni ile ilgili varsayımda bulununuz.

2. $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonu için aşağıdaki tabloyu doldurunuz ve soruları cevaplandırınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken(x)	Bağımlı Değişken (y)	Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili
$f(x) = \frac{1}{x}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	
	-1			-1	
	1			1	
	2			2	

a) $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan rasyonel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız.

b) Rasyonel referans fonksiyonun tersinin de fonksiyon olma şartına yönelik varsayımda bulununuz.

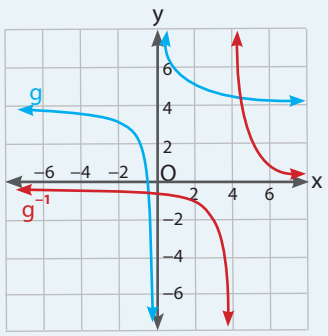
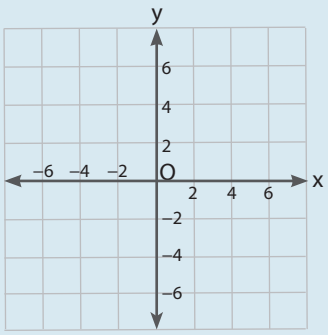
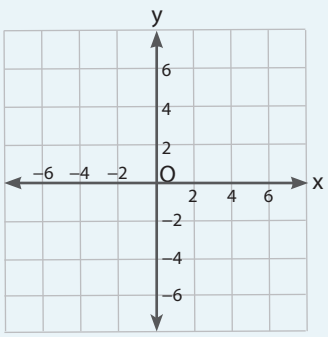
3. **a)** Cebirsel temsilleri verilen rasyonel fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilerek farklı tanım ve değer kümesine göre oluşan yeni rasyonel fonksiyonların bulunması ile ilgili verilen aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Farklı Tanım ve Değer Kümesine Göre Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili	
$g(x) = \frac{1}{x} + 2$	-1	1	1	-1	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{2\}$
	0	Tanımsız	Tanımsız	2		
	1			1	Fonksiyon değildir.	$g^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$
	2		$\frac{5}{2}$			
$h(x) = \frac{2}{x} - 4$	-1					
	0	Tanımsız	Tanımsız	-4		
	1					
	2					
$k(x) = \frac{1}{x-4}$	-1					
	0					
	2					
	4					
$m(x) = \frac{1}{x+2} - 1$	-4					
	-2					
	-1					
	2					

b) Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak rasyonel referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemeler yapınız.

4. Aşağıdaki tabloda cebirsel temsili verilen fonksiyonların tanım ve değer kümesini, bu fonksiyonların tersinin olmasını sağlayan tanım ve değer kümelerini, ters fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız. Fonksiyonun ve tersinin grafiğini çiziniz. Tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız. Karşılaştırmanızı tablonun altındaki alana yazınız.

Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi, Cebirsel Temsili	**Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi, Cebirsel Temsili**	**Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili**
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$g(x) = \frac{2}{x} + 4$	$g^{-1}(x) = \frac{2}{x-4}$	
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{4\}$	$g^{-1}: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{0\}$	
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$h(x) = \frac{1}{x+1}$		
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$k(x) = \frac{1}{x-2} - 1$		
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	

5. Rasyonel referans fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerinin birer fonksiyon olmasına ilişkin şartlara ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.

6. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Matematik yazılımında **Giriş** kısmına f(x) = x yazarak doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

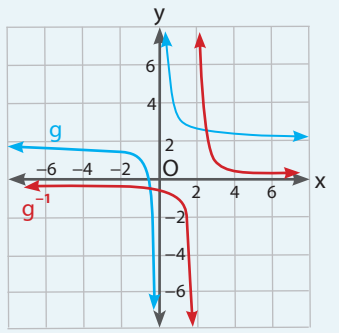
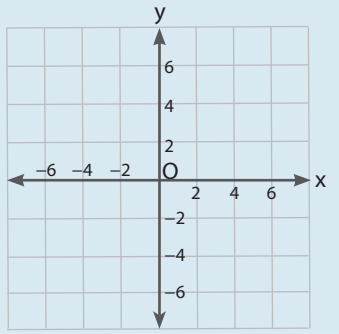
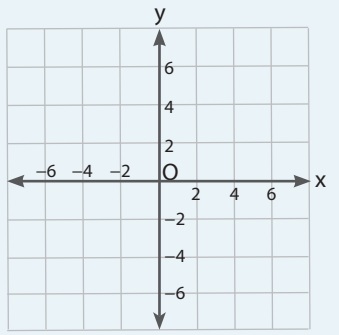
2. adım: Aşağıdaki tabloda cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

3. adım: Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının cebirsel temsillerini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan tanım ve değer kümesini tabloda uygun alana yazınız.

4. adım: Ters fonksiyonun cebirsel temsilini matematik yazılımının **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

5. adım: Tüm grafikleri tabloda uygun alanlara örnekteki gibi çiziniz.

Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak rasyonel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği ile bu fonksiyonların tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi bulunuz. Bulduğunuz ilişkiyi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi, Cebirsel Temsili	**Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi, Cebirsel Temsili**	**Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili**
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$g(x) = \frac{1}{x} + 2$	$g^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$	
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{2\}$	$g^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{0\}$	
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$h(x) = \frac{2}{x} - 4$		
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	
$k(x) = \frac{1}{x-4}$		
Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Tanım ve Değer Kümesi	

7. Rasyonel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait önermelerinizi fonksiyonların tanım-değer kümesi, artan-azalanlık, maksimum-minimum noktaları, simetri özellikleri bağlamında değerlendiriniz.

19. Örnek

f: A → B, $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve ters fonksiyonunun olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.

Çözüm

f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsili

$y = \frac{1}{x+4} - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{y+4} - 2 \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{y+4} \Rightarrow y + 4 = \frac{1}{x+2}$

$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x+2} - 4$ şeklinde bulunur.

Fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. Bu durumda

f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \mathbb{R} - \{-4\}$, değer kümesi $B = \mathbb{R} - \{-2\}$ olarak seçilmelidir.

15. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların tersinin cebirsel temsilini, tersinin olmasını sağlayan tanım ve görüntü kümelerini bularak tablodaki uygun alanları doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tanım Kümesi	Fonksiyon Görüntü Kümesi
$f(x) = \frac{1}{x} - 6$			
$g(x) = \frac{1}{x+8}$			
$h(x) = \frac{2}{x-5} - 4$			

14. Uygulama

Karesel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu fonksiyonda bağımlı değişken (y) ile bağımsız değişken (x) yer değiştirdiğinde elde edilen yeni ilişkinin bir fonksiyon oluşturup oluşturmadığını inceleyiniz. Tabloyu tamamlayarak bu durumu değerlendiriniz ve oluşuyorsa cebirsel temsilini yazınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Yeni Bir Fonksiyonun Oluşup Oluşmadığı / Oluşuyorsa Cebirsel Temsili
$f(x) = x^2$	–1	1			
	0	0	0		
	1	1	1	{–1, 1}	
	2		4		

a) Karesel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak görüşünüzü paylaşınız.

b) Karesel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmama durumunun nedeni ile ilgili varsayımda bulununuz.

2. $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonu için bağımlı değişkenle bağımsız değişken yer değiştirdiğinde oluşacak yeni fonksiyonun istendiği aşağıdaki tabloyu doldurunuz ve ilgili soruları cevaplandırınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili
$f(x) = x^2$	0			0	
	1	1	1		
	2				
	3			3	

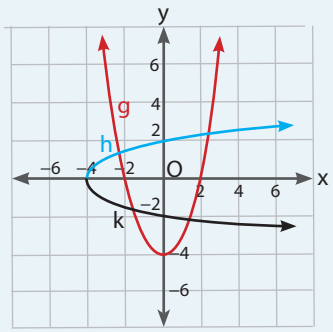
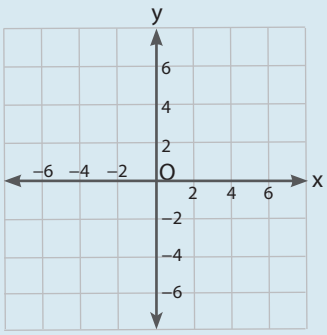
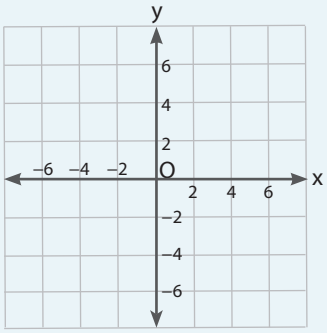
a) $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan karesel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak görüşünüzü paylaşınız.

b) Karesel referans fonksiyonun tersinin de fonksiyon olma şartına yönelik varsayımda bulununuz.

3. Cebirsel temsilleri verilen karesel fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilerek farklı tanım ve değer kümesine göre oluşan yeni karesel fonksiyonların bulunması ile ilgili verilen aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz. Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak karesel referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemeler yapınız. Genellemelerinizi tablonun altındaki alana yazınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Farklı Tanım ve Değer Kümesine Göre Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili		
$g(x) = x^2 - 4$	−1	−3	−3	{−1, 1}	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g: [0, \infty) \to [-4, \infty)$	$g: (-\infty, 0] \to [-4, \infty)$
	0	−4	−4	0			
	2	0	0	{2, −2}	Fonksiyon değildir.	$g^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$	$g^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}$
	3	5	5	{3, −3}			
$h(x) = (x-3)^2$	−1	16	16	{−1, 7}			
	0						
	1		4				
	2						
$k(x) = (x+2)^2 + 1$	−1	2	2				
	0						
	1						
	2						
$m(x) = 4(x-1)^2 + 2$	−1	18	18				
	0						
	1						
	2						

4. Aşağıdaki tabloda cebirsel temsili verilen fonksiyonların ters fonksiyonunun cebirsel temsilini, bu fonksiyonların tersinin fonksiyon olmasını sağlayan tanım ve görüntü kümelerini yazınız. Fonksiyonun ve tersinin grafiğini çiziniz. Tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz. Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız. Karşılaştırmanızı tablonun altındaki alana yazınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g(x) = x^2 - 4$	$g: [0, \infty) \to [-4, \infty)$ $h(x) = g^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ $g: (-\infty, 0] \to [-4, \infty)$ $k(x) = g^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}$	
$h(x) = (x-3)^2$		
$k(x) = (x+2)^2 + 1$		

5. Karesel referans fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerinin birer fonksiyon olmasına ilişkin şartlara ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.

6. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

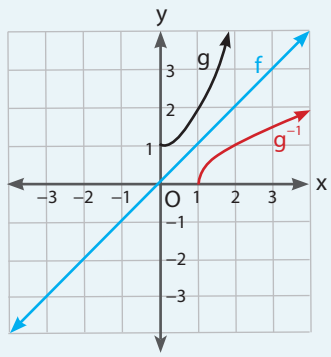
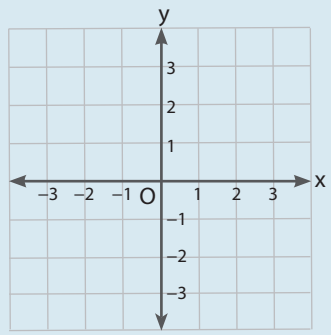
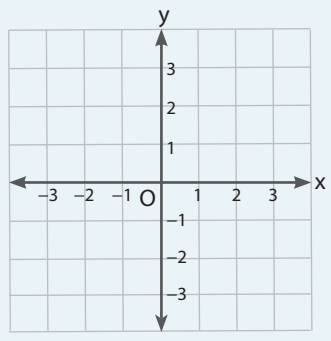
1. adım: Matematik yazılımında **Giriş** kısmına f(x) = x yazarak doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. adım: Aşağıdaki tabloda cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

3. adım: Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümesini dikkate alarak bu fonksiyonların terslerinin cebirsel temsilini tabloda uygun alana yazınız.

4. adım: Ters fonksiyonunun cebirsel temsilini matematik yazılımının **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

5. adım: Tüm grafikleri örnekteki gibi tabloda uygun alanlara çiziniz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g(x) = x^2 + 1$	$g: [0, \infty) \to [1, \infty)$ $g^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$	
$h(x) = 9x^2$	$h: (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ $h^{-1}(x) =$	
$k(x) = (x - 4)^2$	$k: [4, \infty) \to [0, \infty)$ $k^{-1}(x) =$	

Karesel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği ile bu fonksiyonların tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

7. Karesel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait önermelerinizi fonksiyonların tanım-değer kümesi, artan-azalanlık, maksimum-minimum noktaları, simetri özellikleri bağlamında değerlendiriniz.

20. Örnek

Bir su deposunun su ile doldurulması sırasında depodaki suyun yüksekliğinin (cm) zamana (dk.) bağlı değişimi $h(t) = t^2 + 2$ ile modellenmiştir.

Buna göre

a) 0-15 (dk.) zaman aralığında depodaki suyun yüksekliğinin değişimini gösteren fonksiyonun grafik temsilini çizerek tanım ve görüntü kümesini bulunuz, fonksiyonun artan-azalan olma durumunu inceleyiniz.

b) Depo su ile doldurulurken geçen zamanın depodaki suyun yüksekliğine bağlı değişimini gösteren cebirsel temsili yazınız. Depodaki su yüksekliğinin 2-227 cm aralığında olduğunda geçen zamanın değişimini gösteren grafik temsilini çiziniz. Çizdiğiniz grafik temsiline göre tanım ve görüntü kümesini bulunuz, artan-azalan olma durumunu inceleyiniz.

Çözüm

a) $h(t) = t^2$ karesel referans fonksiyonun grafiği

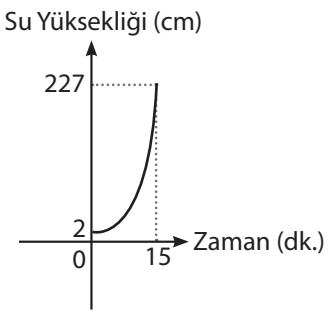
y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle $h(t) = t^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$h(0) = 0^2 + 2 = 2$ cm

$h(15) = 15^2 + 2 = 227$ cm bulunur.

İstenen grafik yan tarafta çizilmiştir. Grafik temsilinden hareketle h fonksiyonunun tanım kümesi [0,15], görüntü kümesi [2, 227] olur.

$\forall$ a, b $\in$ [0,15] için a < b iken h(a) < h(b) olduğundan artan fonksiyon olduğu görülür.



b) Deponun su ile doldurulması esnasında geçen zamanın depodaki suyun yüksekliğine bağlı değişimine ait cebirsel temsili bulmak için

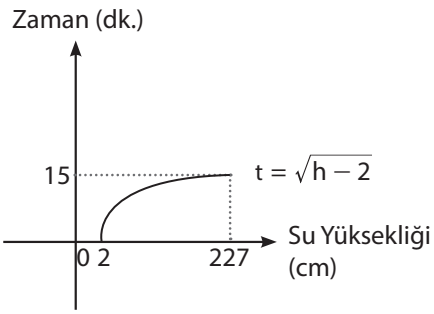
$h(t) = t^2 + 2$ eşitliğinden t çekilirse

$h - 2 = t^2$

$t(h) = \sqrt{h-2}$ bulunur. Bu temsil h fonksiyonunun tersi olduğundan t nin grafiği, h fonksiyonunun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği alınarak çizilebilir.

$t(h) = \sqrt{h-2}$ fonksiyonunda su yüksekliğinin aldığı değerler tanım kümesini, deponun su ile doldurulması esnasında geçen zamanın aralığı ise görüntü kümesini ifade eder. Tanım Kümesi [2, 227] ve görüntü kümesi [0,15] olur.

$\forall$ a, b $\in$ [2, 227] için a < b iken t(a) < t(b) olduğundan t artan fonksiyondur.



16. Sıra Sizde

Bir uçurtmanın t saniyede ulaştığı yerden yüksekliği (m), $h(t) = t^2 + 2t$ ile modellenmiştir.

Buna göre uçurtmanın uçurulması esnasında geçen zamanın uçurtmanın ulaşacağı yüksekliğe bağlı değişimi ile ilgili

a) Cebirsel temsili yazınız.

b) h fonksiyonu ile ilişkisini nedenlerini belirterek açıklayınız.

c) Uçurtmanın yerden 440 metre yüksekliğe ulaşıncaya kadar geçen hareketinin yükseklik-zaman grafiğini çiziniz.

ç) Çizdiğiniz grafik temsilinden hareketle fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulunuz. Artan-azalan olma durumunu, bire bir olma durumunu inceleyiniz.

15. Uygulama

Karekök Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonu için bağımlı değişkenle bağımsız değişken yer değiştirdiğinde oluşacak yeni fonksiyonun istendiği aşağıdaki tabloyu doldurunuz ve ilgili soruları cevaplandırınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili
$f(x) = \sqrt{x}$	0	0		0	
	1			1	
	4		2		
	9			9	

a) Karekök referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak görüşünüzü paylaşınız.

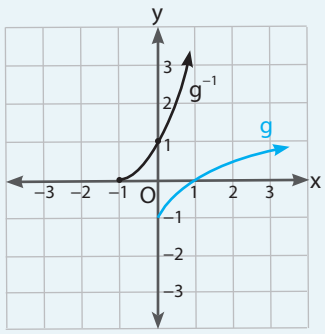
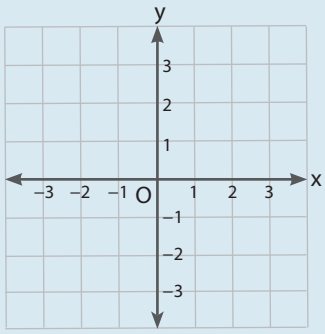
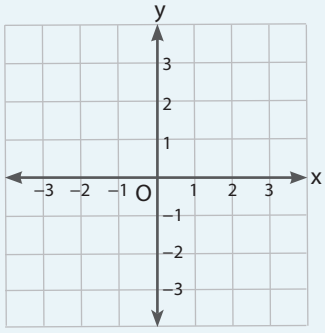
b) Karekök referans fonksiyonun tersinin de fonksiyon olma şartına yönelik varsayımda bulununuz.

2. Cebirsel temsilleri verilen karekök fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilerek farklı tanım ve değer kümesine göre oluşan yeni karekök fonksiyonları bulunuz. Bu işlemle ilgili aşağıda verilen tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	Farklı Tanım ve Değer Kümesine Göre Oluşan Yeni Fonksiyonun Cebirsel Temsili	
$g(x) = \sqrt{x} + 4$	0	4	4	0	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g: [0, \infty) \to [4, \infty)$
	1			1		
	4			4	Fonksiyon değildir.	$g^{-1}(x) = (x-4)^2$
	9			9		
$h(x) = \sqrt{x-2}$	0	Tanımsız			$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$h: [2, \infty) \to [0, \infty)$
	2		0			
	6		2			
	11		3			
$k(x) = \sqrt{x+3} - 1$					$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$k: [-3, \infty) \to [-1, \infty)$

Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak karekök referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemeler yapınız.

3. Aşağıdaki tabloda cebirsel temsili verilen fonksiyonların ters fonksiyonunun cebirsel temsilini, bu fonksiyonların tersinin fonksiyon olmasını sağlayan tanım ve görüntü kümelerini yazınız. Fonksiyonun ve fonksiyonun tersinin grafiğini çiziniz. Tabloyu örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz. Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız. Karşılaştırmanızı tablonun altındaki alana yazınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g(x) = \sqrt{x} - 1$	$g: [0, \infty) \to [-1, \infty)$ $g^{-1}(x) = (x+1)^2$	
$h(x) = \sqrt{x+8}$		
$k(x) = 4\sqrt{x-2}$		

4. Karekök referans fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerinin birer fonksiyon olmasına ilişkin şartlara ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.

5. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Matematik yazılımında **Giriş** kısmına f(x) = x yazarak doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

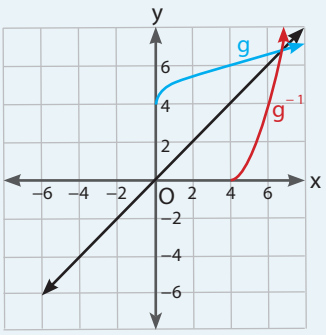
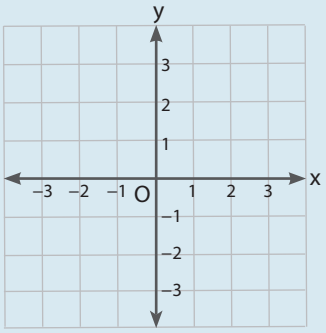
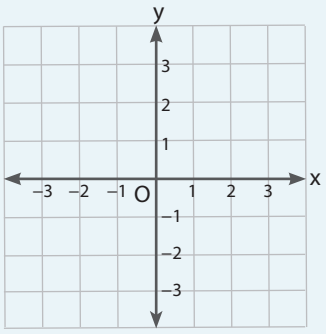
2. adım: Aşağıdaki tabloda cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

3. adım: Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümesini dikkate alarak bu fonksiyonların terslerinin cebirsel temsilini tabloda uygun alana yazınız.

4. adım: Ters fonksiyonun cebirsel temsilini matematik yazılımının **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

5. adım: Tüm grafikleri örnekteki gibi tabloda uygun alanlara çiziniz.

Doldurduğunuz tabloyu dikkate alarak karekök referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği ile bu fonksiyonların tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi belirtiniz. Bunun için tablonun altındaki alanı kullanınız.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g(x) = \sqrt{x} + 4$	$g: [0, \infty) \to [4, \infty)$ $g^{-1}(x) = (x - 4)^2$	
$h(x) = \sqrt{x - 2}$		
$k(x) = 2\sqrt{x + 1}$		

6. Karekök referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait önermelerinizi fonksiyonların tanım–değer kümesi, artan-azalanlık, maksimum-minimum noktaları, simetri özellikleri bağlamında değerlendiriniz.

21. Örnek

$f: A \to B, f(x) = \sqrt{x+3} - 2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.

Çözüm

f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsili

$y = \sqrt{x+3} - 2$

$x = \sqrt{y+3} - 2$

$x + 2 = \sqrt{y+3}$

$(x+2)^2 = y + 3$

$(x+2)^2 - 3 = y = f^{-1}(x)$ şeklinde bulunur.

Fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. Bu durumda tanım kümesi $A = [-3, \infty)$ ve değer kümesi $B = [-2, \infty)$ olarak seçilmelidir.

17. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların tersinin cebirsel temsilini, fonksiyonun tersinin fonksiyon olmasını sağlayan tanım ve değer kümelerini bularak tablodaki uygun alanları doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tanım Kümesi	Fonksiyonun Değer Kümesi
$f(x) = \sqrt{x} - 16$			
$g(x) = \sqrt{x-4}$			
$k(x) = \sqrt{x+5} - 3$			

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

- Doğrusal fonksiyonların tersi de doğrusal fonksiyondur.
- Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için fonksiyon, bire bir ve örten fonksiyon olmalıdır.
- Bir fonksiyonun tersinin grafiği, fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

Alıştırmalar

1. Elektronik cihazlar satan bir mağaza satışa sunduğu cihazlar için satış fiyatı 250 lira ile 750 lira arasında olanlara 50 lira ekleyerek cihazların garanti süresini uzatmaktadır.

Buna göre

a) Garanti süresi uzatılmış cihazların satış fiyatını cihazın ilk satış fiyatına bağlı ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazarak tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

b) Cihazın ilk satış fiyatını garanti süresi uzatılmış satış fiyatına bağlı ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazarak tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

c) a ve b şıklarında bulduğunuz her iki fonksiyonun grafik temsillerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz ve bu iki fonksiyonun birbirleriyle ilişkisini belirtiniz.

2. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların tersinin cebirsel temsilini, fonksiyonun tersinin olmasını sağlayan tanım ve değer kümelerini dikkate alarak a ve b değerlerini bulup tablodaki uygun alanları doldurunuz.

Tanım ve Değer Kümesi	Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	a ve b Değeri
$f: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$	$f(x) = \frac{4}{x-7} + 2$		a = b =
$g: [-5, \infty) \to [b, \infty)$	$g(x) = (x+5)^2 - 1$		b =
$h: [a, \infty) \to [b, \infty)$	$h(x) = \sqrt{x-6} + 4$		a = b =

3. Aşağıda verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının grafik temsillerini çiziniz.

a) $f: [-3, \infty) \to [-2, \infty), f(x) = (x+3)^2 - 2$

b) $g: [-3, \infty) \to [-1, \infty), g(x) = \sqrt{x+3} - 1$

4. $g: \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = \frac{1}{x} + 8$ **şeklinde tanımlı rasyonel fonksiyonunun ters fonksiyonuna ait görüntü kümesini, artan-azalan durumunu, maksimum-minimum noktalarını belirleyiniz.**

4. Tema alıştırma ek soruları

4.6. DOĞRUSAL, KARESEL, KAREKÖK, RASYONEL REFERANS FONKSİYONLAR VE BUNLARDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Konuya Başlarken

Birçok şirket satışını yaptığı ürünlerden elde ettiği geliri artırmak amacıyla çeşitli kampanyalar düzenlemektedir. Düzenlenen kampanyalarda şirket, bir ürün alana yanında başka bir ürün hediyesi veya çeşitli indirim oranları vadederek gelirlerini artırmayı amaçlamaktadır. Benzer bir indirim kampanyası düzenleyen bir şirket için kampanya şartlarının verildiği aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz.

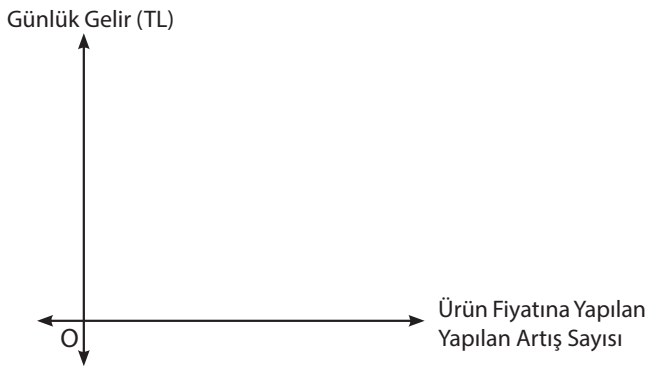
"Bir şirket günlük en fazla 200 adet, bir müşteriye ise en fazla bir adet satış yapabildiği ürünün fiyatını 50 TL olarak belirlemiştir. Şirketin ürün fiyatına yaptığı her 5 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 10 kişilik bir azalma oluyor. Şirket, üründen elde edeceği günlük gelirin en fazla olması için ürün fiyatını kaç lira olarak belirlemelidir?"

Buna göre

1. **Şirketin üründen elde edeceği günlük gelirin en yüksek seviyesinin nasıl hesaplanabileceğine dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınız ile paylaşarak tartışınız.**
2. **Şirketin üründen elde edeceği günlük gelirin en fazla olması için ürün fiyatının hesaplanması amacıyla oluşturulan aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurarak problemin çözümüne ulaşmaya çalışınız.**

Artış Sayıları	Ürün Fiyatı	Müşteri Sayısı	Günlük Gelir
0	50	200	10 000
1	55	190	
2			
3			

3. **Doldurduğunuz tablodaki verileri dikkate alarak günlük gelirin ürün fiyatına yapılan artış sayısına göre grafiğini çiziniz.**



4. **Şirketin üründen elde ettiği günlük gelirin ürün fiyatına yapılan artış sayısı ile ilişkisinin doğrusal ilişki olup olmadığını belirtiniz. Grafik ve tablo üzerinden incelediğiniz ilişkinin daha iyi temsil edilebilmesi için başka hangi fonksiyon temsiline ihtiyaç duyulabileceğini ve bunun nedenini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlardan ve bu fonksiyonlardan türetilen denklem ve eşitsizlikler gerçek yaşam problemlerinde kullanılır. Fizik, doğa olaylarını ve temel kuvvetleri matematiksel modellerle açıklamaya çalışır. Fonksiyonlar, bu modellerin merkezinde yer alır. Örneğin bir cismin hareketini tanımlamak için konum, hız, ivme gibi büyüklükler fonksiyonlar şeklinde ifade edilir. Kuantum mekaniği gibi ileri düzey fizik alanlarında parçacıkların konum ve enerji gibi özellikleri dalga fonksiyonlarıyla belirtilir. Kimyasal reaksiyonların hızını belirlemek için kullanılan fonksiyonlar, sıcaklık ve konsantrasyon gibi değişkenlerle bağlantılıdır. Mimarlıkta fonksiyonlar, hem yapının tasarımını hem de kullanımını etkiler. Bireyin fonksiyonları kullanarak problemleri çözme becerisi kazanması, eleştirel düşünme yetisini geliştirmesine de olanak tanır.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Tarihî Gelişim Süreci

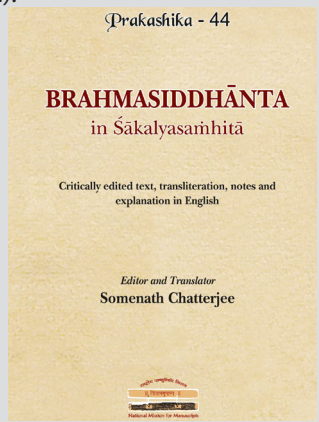
İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler tarihsel olarak çeşitli kültürlerde farklı şekillerde incelenmiş, günümüze kadar birkaç farklı aşamadan geçmiştir. MÖ 2000-1000 yılları arasında Babil ve Mısır'da, MÖ 300-200 yılları arasında Antik Yunan'da ikinci derece denklemler üzerinde çalışılmış ancak bu çalışmaların çoğu geometrik yaklaşımlarla yapılmıştır.

MS 7. yüzyılda yaşamış Hintli matematikçi **Brahmagupta** (Bırahmagupta), sıfır sayısını kullanan ve ikinci derece denklemlerin çözümü için bir formül geliştiren ilk kişidir. Bu formül, modern köklerin hesaplanmasındaki ilk adımların atılmasını sağlamıştır. Brahmagupta geliştirdiği çözümde, negatif köklerin varlığına da değinmiştir. Brahmagupta'nın en önemli eseri Brahmasphutasiddhanta (Bırahmasfutissidanta) adlı matematik ve astronomi kitabıdır (Görsel 4.4).

Harizmi 9. yüzyılda yaşamış ünlü bir İslam bilgini, matematikçi ve astronomdur. Yaşadığı yer olan Özbekistan'ın Hiva kentinde görkemli bir heykeli vardır(Görsel 4.5). Matematik alanındaki en önemli çalışması, *El-Kitab el-Muhtasar fi Hisab el-Cebr ve'l-Mukabele* (Cebir ve Mukabele Hakkında Özet Kitap) adlı eseridir. Bu eserde Harizmi cebirsel denklemleri sistematik bir şekilde ele almış ve çözüm yöntemlerini ilk defa belirgin bir biçimde formüle etmiştir. Harizmi'nin denklemleri çözme yaklaşımında geometrik bir yorumlama da bulunmaktadır. Örneğin ikinci dereceden denklemler için çözümün bir kare şeklinde geometrik olarak yorumlanması gerektiği vurgulanmıştır. Bu, çözümün aritmetiksel olmayan bir şekilde görsel olarak anlaşılmasını sağlamıştır. Harizmi, denklemlerin çözümlerini ararken her tür denkleme özel bir çözüm önerisi sunmuş ve bunun sonucunda birkaç basit algoritma geliştirmiştir. Ayrıca denklem çözme sırasında kullanılan terimler ve semboller, modern cebirin temellerini atmıştır. Harizmi'nin bu çalışmalarının Batı'da etkisi büyük olmuştur, Avrupa'da cebirsel ve matematiksel çözümleme alanında yeni bir dönemin başlamasına katkı sağlamıştır. Cebir kelimesi bile *Harizmi*'nin *Cebir* adlı kitabından türetilmiştir.

Abdülhamid bin Türk 9. yüzyılda yaşamış Türk asıllı Müslüman bir matematikçidir. Tarihte Türk lakabını taşıyan nadir Türk bilim insanlarından biridir. Harizmi'nin çağdaşıdır. Cebir konusunda yazmış olduğu *Katışık Denklemlerde Mantıki Zaruretler* adlı kitabın ancak küçük bir bölümü bugüne ulaşmıştır. Burada özel tipler hâlinde gruplandırılmış ikinci derece denklemlerin çözümleri, Harizmi'nin çözümlerinden daha ayrıntılı verilmiştir. Yapıtları *Kitab-ül Cami fi'l hisap (Hesap Kitabı), Kitab'ü Muamelat (İşlemler Kitabı) ve Kitab'ül Mesaha'dır (Ölçme İşleri)*.

(Genel ağdan alınmıştır.)



Görsel 4.4: *Brahmagupta'nın en önemli eseri matematik ve astronomi kitabı*

Görsel 4.5: *Harizmi'nin heykeli, Özbekistan*

16. Uygulama

Karesel Fonksiyonların Cebirsel İfadesinin Birinci Dereceden Çarpanlarının İşaret Değişimini Temsil Eden İşaret Tablosu

Aşağıda bulunan problem durumunu inceleyiniz ve açıklamaları takip ederek soruları cevaplayınız.

Bir göletin kıyısına yapılan yürüyüş yolu, su seviyesinin yükselmesi durumunda sular altında kalmaktadır. Göletteki su seviyesi, yağış miktarına bağlı olarak değişmektedir. Göletteki su seviyesinin yürüyüş yoluna göre yüksekliği, yağış miktarı x (cm) olmak üzere $f(x) = -x^2 + 20x - 96$ olarak modellenmektedir. Göldeki su seviyesi belirli bir yüksekliğe çıktığında tahliye kanalları ile göletteki su seviyesi düşürülebilmektedir.

Su seviyesinin yürüyüş yolu ile aynı hizada olduğu, yürüyüş yolunun sular altında kaldığı veya yürüyüş yolunun su seviyesinin üzerinde olduğu durumların belirlenmesi amacıyla yağış miktarının kaç cm olması gerektiğini bulunuz.

1. $f(x) = -x^2 + 20x - 96$ karesel fonksiyonun sıfırlarını bulmak için deneme yanılma ve tamkareye tamamlama yöntemlerinden yararlanarak aşağıdaki uygulamayı yapınız. Ardından bu fonksiyon ile oluşturulabilecek denklem ve eşitsizliklerin matematiksel bileşenlerini belirleyiniz.

a) Elektronik tablo uygulamasını kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştiriniz.

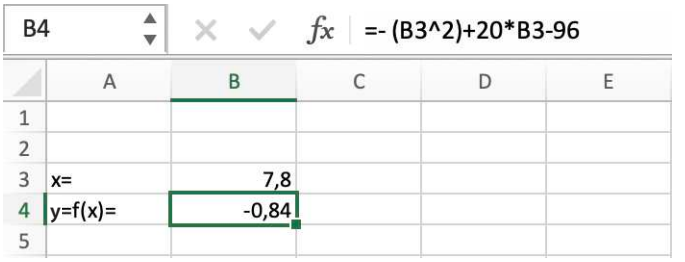
1. adım: A3 hücresine x = yazınız.

2. adım: A4 hücresine f(x) = (veya y=) yazınız.

3. adım: B4 hücresine sırasıyla = –(B3^2) + 20*B3 – 96 yazınız. (B3 hücre ismidir, sırası geldiğinde B3 hücresi üzerine tıklayınız.)

4. adım: Fonksiyonu sıfır yapan değerleri bulmak için Tablo 1 ve Tablo 2'deki x değerlerini sırasıyla B3 hücresine yazınız. B4 hücresinde bulduğunuz sonuçları Tablo 1 ve Tablo 2'de y = f(x) satırındaki ilgili alanlara yazınız.

Aşağıda elektronik tablo uygulamasında yapılan benzer bir işlemin ekran görüntüsü verilmiştir.



Tablo 1

x	2	4	6	7	7,8	7,9	7,95	7,99	8
y = f(x)	–60								

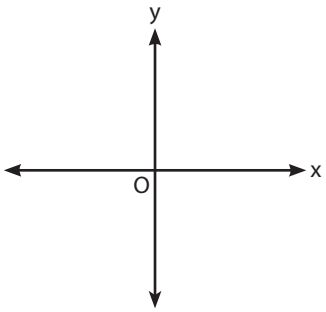
Tablo 2

x	9	10	11	11,2	11,8	11,85	11,9	11,99	12
y = f(x)	3								

b) Tablo 1 ve Tablo 2'deki doldurduğunuz değerlerden faydalanarak f fonksiyonunun sıfırlarını yazınız.

c) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak fonksiyonun sıfırlarını tamkareye tamamlama yöntemi ile bulunuz.

ç) f fonksiyonun grafik temsilini altta verilen dik koordinat sistemi üzerine çiziniz.



d) f fonksiyonun grafik temsilini ve tamkare formunu kullanarak yapacağınız cebirsel işlemlerden faydalanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Ardından denklem ve eşitsizliklerin matematiksel bileşenlerinin aralarındaki ilişkiyi belirleyiniz.

Denklem Eşitsizlik	Çözüm Aralığı
$f(x) = 0$	
$f(x) < 0$	
$f(x) \leq 0$	
$f(x) > 0$	
$f(x) \geq 0$	

e) $f(x) = -x^2 + 20x - 96$ fonksiyonunun cebirsel ifadesini tamkare formundan yararlanarak birinci dereceden çarpanlar şeklinde yazınız. İşaret tablosunu oluşturunuz.

f) c maddesinde oluşturduğunuz işaret tablosunu dikkate alarak f fonksiyonu ile ilgili eşitsizliklerin çözüm aralıklarını tabloda uygun alanlara yazınız.

Eşitsizlik	Çözüm Aralığı
$f(x) < 0$	
$f(x) \leq 0$	
$f(x) > 0$	
$f(x) \geq 0$	

2. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Göletteki su seviyesinin yürüyüş yolu ile aynı seviyede olduğu durumun f fonksiyonunun nitel özelliği ile ilişkisini belirtiniz. Problem bağlamındaki temsilini cebirsel temsile dönüştürünüz.

b) Göletteki su seviyesinin yürüyüş yolu seviyesinin altında olduğu durumun f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşenleri arasındaki ilişkisini aşağıdaki alana yazarak sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

c) Göletteki su seviyesinin yürüyüş yolu seviyesinin üstünde olduğu durumun f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşenleri arasındaki ilişkisini aşağıdaki alana yazarak sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

ç) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \leq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

d) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \geq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

3. Su seviyesinin yürüyüş yolu ile aynı hizada olduğu, yürüyüş yolunun sular altında kaldığı veya yürüyüş yolunun su seviyesinin üzerinde olduğu durumların belirlenmesi amacıyla yağış miktarının kaç cm olması gerektiği ile ilgili sorunun çözümü için stratejinizi oluşturunuz.

4. Belirlediğiniz stratejiyi kullanarak problemi çözünüz.

5. Problemin çözümünü farklı yöntemler kullanarak doğrulayınız.

6. Problemin olası tüm çözüm stratejileri ile ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

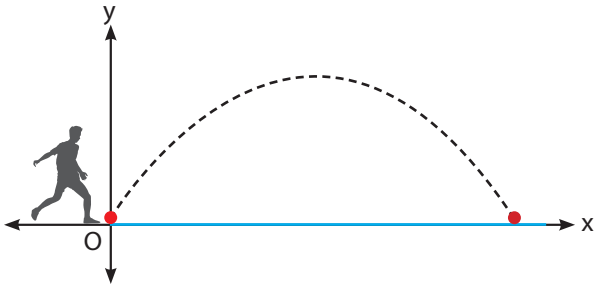
7. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri başka problemlerin çözümünde nasıl kullanabileceğiniz ile ilgili çıkarımlarınızı yazınız.

8. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel ve grafiksel argümanlarla değerlendiriniz.

17. Uygulama

$f(x) = ax^2 + bx + c$ Cebirsel Temsili ile Verilen Karesel Fonksiyonların Maksimum-Minimum Noktası ve Değerinin İfadesi

Aşağıda bulunan problem durumunu inceleyiniz ve istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.



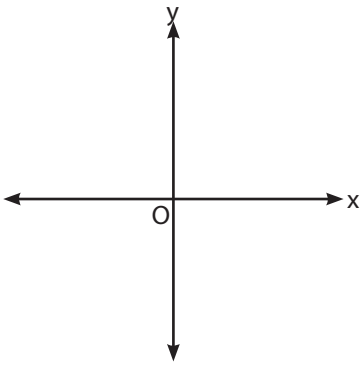
Düz bir futbol sahasının zemininde bulunan top, bir futbolcu tarafından atılıyor. Topun yatayda aldığı mesafe x (metre) ve yerden yüksekliği h(x) (metre) olmak üzere topun izlediği yol $h(x) = -x^2 + 4x$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Bu durum dik koordinat sistemi kullanılarak görselde verilmiştir.

Topun çıkabileceği maksimum yüksekliği, en yüksek noktaya ulaştığında yatayda kaç metre yol aldığını, topun yere düştüğü nokta ile ilk atış yapıldığı nokta arasındaki mesafeyi bulunuz. (Dik koordinat sisteminde 1 birim 1 metreye karşılık gelmektedir.)

1. Aşağıdaki soruları çözünüz.

a) h fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak fonksiyonun sıfırlarını tamkareye tamamlama yöntemi ile bulunuz.

b) h fonksiyonunun grafik temsilini altta verilen dik koordinat sistemi üzerine çiziniz.



2. h fonksiyonunun grafiğinden ve tamkare formundan faydalanarak yapacağınız cebirsel işlemlerle aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) h fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.

b) h fonksiyonununa ait grafiğin maksimum noktasını ve değerini bulunuz.

3. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

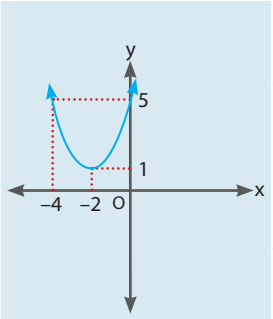
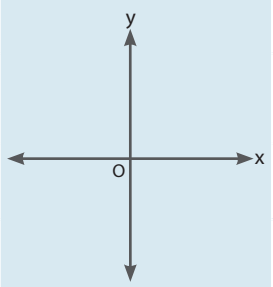
a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) genel formundaki f fonksiyonunu cebirsel işlemler yardımıyla $f(x) = a(x + r)^2 + k$ ($r, k \in \mathbb{R}$) tamkare formuna dönüştürünüz.

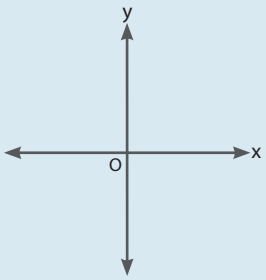
b) $f(x) = a(x + r)^2 + k$ ($r, k \in \mathbb{R}$) tamkare formunu dikkate alarak f fonksiyonundaki r ve k değerlerini $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) genel formundaki a, b, c katsayıları cinsinden ifade ediniz.

c) $f(x) = a(x + r)^2 + k$ ($r, k \in \mathbb{R}$) tamkare formunda $f(x) = k$ eşitliğini sağlayan x değerini r türünden bulunuz.

ç) f fonksiyonun maksimum-minimum noktasını ve değerini a ve b türünden ifade ediniz.

4. Aşağıdaki tabloda fonksiyonun genel formu, tamkare formu, grafiği, maksimum-minimum noktası ve değeri, genel formun katsayıları ve bu katsayılara göre yazılmış maksimum-minimum noktası ve değeri verilmiştir. Verilen örneği inceleyerek tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyonun Temsili		**Fonksiyonun Tamkare Formu veya Grafik İncelemesi ile Maksimum-Minimum Noktası ve Değerinin Tespiti**		**Fonksiyonun Genel Formu Kullanılarak Maksimum-Minimum Noktası ve Değerinin Tespiti**		
$f(x) = ax^2 + bx + c$ Genel Formu ile Verilen Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonların Tamkare Formu	Fonksiyonun Grafiği	Maksimum-Minimum Noktası	Maksimum-Minimum Değeri	a nın İşareti ve a, b, c Değerleri	Maksimum-Minimum Noktası $(-\frac{b}{2a})$	Maksimum-Minimum Değeri $f(-\frac{b}{2a})$
Fonksiyonun Genel Formu		Maksimum Noktası	Maksimum Değeri	a nın İşareti	Maksimum Noktası	Maksimum Değeri
$g(x) = x^2 + 4x + 5$		Yoktur.	Yoktur.	+	Yoktur.	Yoktur.
Fonksiyonun Tamkare Formu		Minimum Noktası	Minimum Değeri	a, b, c Değerleri	Minimum Noktası	Minimum Değeri
$g(x) = (x + 2)^2 + 1$		$x = -2$	1	$a = 1$ $b = 4$ $c = 5$	$x = -\frac{4}{2 \cdot 1}$ $x = -2$	1
Fonksiyonun Genel Formu		Maksimum Noktası	Maksimum Değeri	a nın İşareti	Maksimum Noktası	Maksimum Değeri
$m(x) = 2x^2 - 4x - 30$						
Fonksiyonun Tamkare Formu		Minimum Noktası	Minimum Değeri	a, b, c Değerleri	Minimum Noktası	Minimum Değeri

Fonksiyonun Temsili		Fonksiyonun Tamkare Formu veya Grafik İncelemesi ile Maksimum-Minimum Noktası ve Değerinin Tespiti		Fonksiyonun Genel Formu Kullanılarak Maksimum-Minimum Noktası ve Değerinin Tespiti		
$f(x) = ax^2 + bx + c$ Genel Formu ile Verilen Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonların Tamkare Formu	Fonksiyonun Grafiği	Maksimum-Minimum Noktası	Maksimum-Minimum Değeri	a nın İşareti ve a, b, c Değerleri	Maksimum-Minimum Noktası $(-\frac{b}{2a})$	Maksimum-Minimum Değeri $f(-\frac{b}{2a})$
Fonksiyonun Genel Formu		Maksimum Noktası	Maksimum Değeri	a nın İşareti	Maksimum Noktası	Maksimum Değeri
$n(x) = x^2 - 6x$						
Fonksiyonun Tamkare Formu		Minimum Noktası	Minimum Değeri	a, b, c Değerleri	Minimum Noktası	Minimum Değeri

a) Doldurduğunuz tabloya göre karesel fonksiyonun maksimum-minimum noktası ve değerini fonksiyonun cebirsel temsilinin katsayıları olan a, b, c türünden ifadesi ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

b) Genellemelerinizden yararlanarak başlangıç problemindeki $h(x) = -x^2 + 4x$ fonksiyonunun maksimum noktasını ve değerini bulunuz.

5. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Topun çıkabileceği maksimum yüksekliğin h fonksiyonunun nitel özelliği ile ilişkisini belirtiniz.

b) Çıkabileceği maksimum noktaya ulaşan topun yatayda aldığı yol ile h fonksiyonunun nitel özelliği arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

c) Topun yere düştüğü nokta ile ilk atış yapılan nokta arasındaki mesafenin, h fonksiyonunun nitel özelliği ile ilişkisini belirtiniz.

6. Topun çıkabileceği maksimum yüksekliği, en yüksek noktaya ulaştığında yatayda aldığı mesafeyi ve topun yere düştüğü nokta ile ilk atış yapıldığı nokta arasındaki toplam mesafeyi bulmaya yönelik sorunun çözüm stratejisini oluşturunuz.

7. Belirlediğiniz stratejiyi kullanarak problemi çözünüz.

8. Problemin çözümünü farklı yöntemler kullanarak doğrulayınız.

9. Problemin olası tüm çözüm stratejileri ile ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

10. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri başka problemlerin çözümünde nasıl kullanabileceğiniz ile ilgili çıkarımlarınızı yazınız.

11. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel veya grafiksel olarak değerlendiriniz.

a, b ve c gerçek sayılar ve a sıfırdan farklı olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için

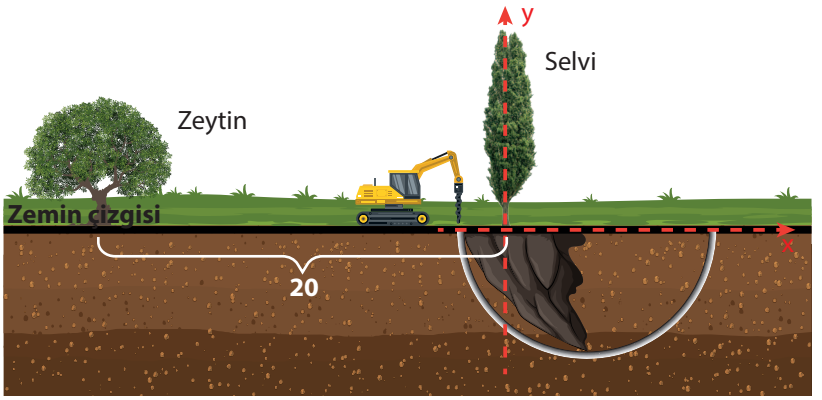
$a > 0$ ise $x = -\frac{b}{2a}$ için minimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ dır.

$a < 0$ ise $x = -\frac{b}{2a}$ için maksimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ dır.

18. Uygulama

Karesel Fonksiyonların İşareti, Aralıkları ve En Büyük-En Küçük Değerleri

Aşağıda bulunan problem durumunu inceleyiniz ve istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız. Görseldeki zeytin ve selvi ağaçları arasındaki mesafe 20 metredir. Bu duruma ait görsel aşağıda verilmiştir.



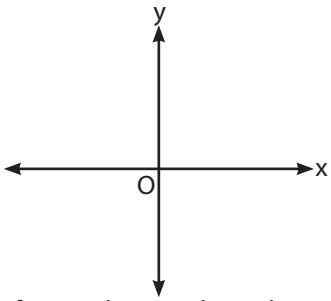
Toprak altı su borusu döşeme makinesi, çalışma yaptığı esnada delinemeyeceği kadar sert bir kaya ile karşılaşmıştır. Mühendisler plan değişikliği yapmış ve kayanın zemin altında kalan kısmının alt tarafından su borusunun kesintisiz bir şekilde geçmesini sağlamışlardır. Bilgisayar programı destekli yapılan çizimde zemin çizgisi x ekseni, toprak altındaki kayanın en uç noktasını içine alacak şekilde zemin çizgisine dik çizilen ve selvi ağacının gövdesi boyunca devam eden doğru y ekseni kabul edilmiştir. Yatay zeminde alınan yol x (m) olmak üzere kaya zeminin altından geçecek su borusunun izleyeceği yol, $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ ile modellenmiştir. Açılan yol, kayanın zemin altında kalan parçasının alt kısmının uç noktasından geçmektedir.

Yapılan yeni planlamanın kazıyı gerçekleştirecek makine operatörüne iletilmesi amacıyla bir taslak çizilmesi isteniyor. Bunun için zeytin ağacından itibaren kaçıncı metrede kazıya başlanması, modellenen yolu takip eden su borusunun selvi ağacından kaç metre sonra zemin çizgisi üzerine çıkması gerektiği ile ilgili bilgilerin olduğu taslağı iki ağacın konumlarından yararlanarak çiziniz.

1. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak fonksiyonun sıfırlarını tamkareye tamamlama yöntemi ile bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafik temsilini verilen dik koordinat sistemi üzerine çiziniz.



2. f fonksiyonunun grafiğinden ve tamkare formundan yararlanarak yapacağınız cebirsel işlemlerle aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

b) f fonksiyonunun minimum noktasını ve değerini bulunuz.

3. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) f fonksiyonunun genel formunun katsayılarını kullanarak, fonksiyonun minimum noktasını ve bu noktadaki minimum değerini bulunuz.

b) Matematik yazılımı kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştirip soruları cevaplandırınız.

1. adım: Giriş bölümüne $f(x) = ax^2 + bx + c$ yazınız.

2. adım: Oluşan a, b ve c sürgülerini hareket ettirerek herhangi bir f fonksiyonun grafiğini elde ediniz.

3. adım: Araçlar menüsünden **Kesiştir** aracını, sonra f fonksiyonunun grafiğini ve x eksenini seçiniz.

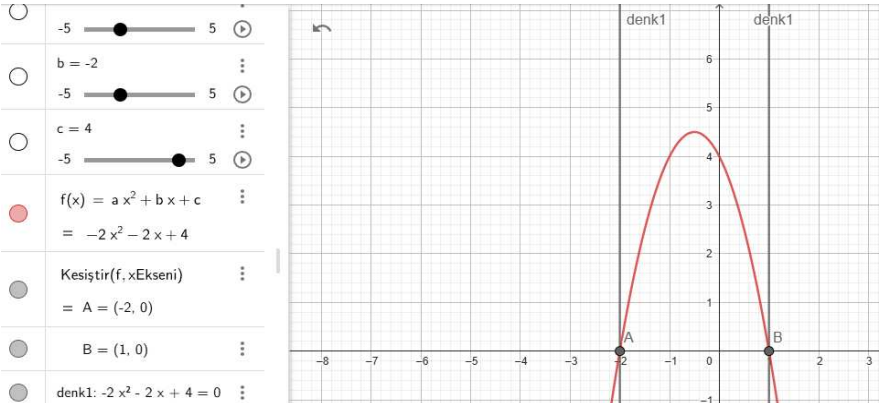
4. adım: Giriş bölümüne $ax^2 + bx + c = 0$ yazınız (Görsel 4.6).

5. adım: Giriş bölümüne $f(x) < 0$ yazınız (Görsel 4.7).

6. adım: 4. adımda yazdığınız $f(x) < 0$ eşitsizliğini siliniz. **Giriş** bölümüne $f(x) > 0$ yazınız (Görsel 4.8).

7. adım: 5. adımda yazdığınız $f(x) > 0$ eşitsizliğini siliniz. **Giriş** bölümüne $f(x) \geq 0$ yazınız (Görsel 4.9).

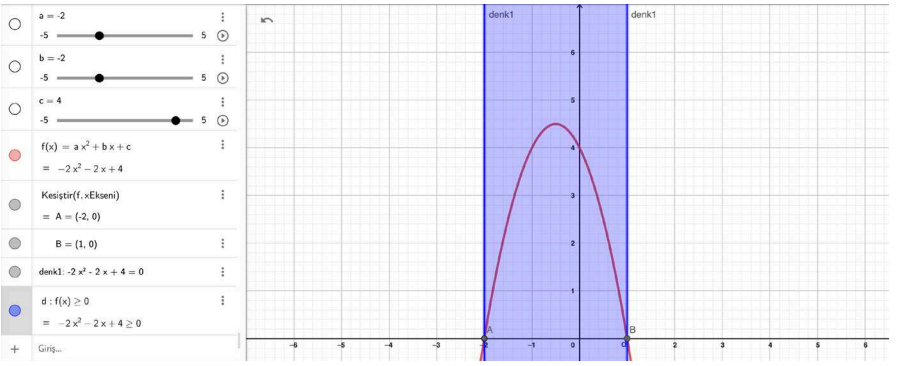
Aşağıda matematik yazılımında yapılan benzer bir işlemin ekran görüntüleri verilmiştir.



Görsel 4.6: *4. adımdaki fonksiyon grafiğinin görüntüsü*

Görsel 4.7: *5. adımdaki fonksiyon grafiğinin görüntüsü*

Görsel 4.8: *6. adımdaki fonksiyon grafiğinin görüntüsü*



Görsel 4.9: *7. adımdaki fonksiyon grafiğinin görüntüsü*

c) Matematik yazılımı yardımıyla b maddesinde yapılan etkinliği $f(x)= 2x^2 - 4x - 6$ fonksiyonu için uygulayarak aşağıdaki tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Eşitsizlik	Çözüm Aralığı
$f(x) < 0$	
$f(x) \leq 0$	
$f(x) > 0$	
$f(x) \geq 0$	

4. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Makinenin zemin çizgisi üzerinde su borusunu döşemeye başladığı ve üzerine çıktığı noktalara ait koordinatların f fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilişkisini belirtiniz. Cebirsel temsilini belirleyiniz.

b) Makinenin zemin çizgisi üzerinde su borusunu döşemeye başladığı ve borunun modellemeye uygun hareket ederek tekrar zemin çizgisi üzerine çıktığı noktaların arasında kalan bölgenin, f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşenleri arasındaki ilişkisi hakkındaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşarak fikirlerinizi tartışınız. Makinenin yapmış olduğu hareketin cebirsel temsilini belirleyiniz.

c) Makinenin zemin çizgisi üzerinde su borusunu döşemeye başladığı ve borunun modellemeye uygun hareket ederek tekrar zemin çizgisi üzerine çıktığı noktaların dışında kalan bölgenin, f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşenleri arasındaki ilişkisi hakkındaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşarak fikirlerinizi tartışınız. Makinenin yapmış olduğu hareketin cebirsel temsilini belirleyiniz.

ç) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \leq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

d) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \geq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

5. Zeytin ağacından itibaren kaçıncı metrede kazıya başlanması ve modellenen yolu takip eden su borusunun selvi ağacından kaç metre sonra zemin çizgisi üzerine çıkması gerektiği ile ilgili bilgilerin olduğu taslağı iki ağacın konumlarından yararlanarak çizilmesi probleminin çözümü için stratejinizi oluşturunuz.

6. Belirlediğiniz stratejiyi kullanarak problemi çözünüz.

7. Problemin çözümünü farklı yöntemler kullanarak doğrulayınız.

8. Problemin olası tüm çözüm stratejileri ile ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız

9. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri, başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlarınızı yazınız.

10. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel veya grafiksel olarak değerlendiriniz.

22. Örnek

Bir lisenin gezi kulübü üniversiteleri tanıtmak için İstanbul'a gezi yapmayı planlamaktadır. Kulüp, geziye en az 60 kişinin katılabileceğini bildiği için ücreti kişi başı 1200 TL olarak belirlemiştir. Geziye katılan kişi sayısının 60'tan fazla olması hâlinde 60 kişinin üzerindeki her bir kişi için tüm katılımcılara 10 TL geri ödeme yapılacaktır.

Buna göre

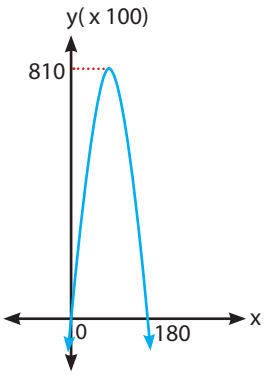
a) Gezi için alınan toplam ücretin katılan kişi sayısına göre değişimi ile modellenen fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız. Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) Gezi için alınan toplam ücretin en fazla olabilmesi için geziye kaç öğrencinin katılması gerektiğini bulunuz. Bu problem durumu fonksiyonun hangi nitel özelliği ile açıklanır.

c) Gezi için alınan toplam ücretin en fazla kaç TL olabileceğini bulunuz.

ç) Kulüp bu geziyi düzenleyecek firmaya 80 000 TL ödeme yapacaktır. Toplanan ücretten bu ödemeyi yapabilmesi, kâr veya zarar etmemesi için en fazla kaç öğrencinin geziye katılması gerektiğini bulunuz.

Çözüm



a) Geziye katılan kişi sayısına bağlı toplam ücret (Türk lirası), uygun bir aralıkta tanımlı f fonksiyonu ile modellenir. Buradan

x : Geziye katılan kişi sayısı, f(x) : Gezi için alınan toplam ücret ve $x \geq 60$ olmak üzere

$f(x) = [1200 - (x - 60) \cdot 10] \cdot x$

$f(x) = [1200 - 10x + 600] \cdot x$

$f(x) = [1800 - 10x] \cdot x$

$f(x) = 1800x - 10x^2$ olur.

b) Problemde f fonksiyonun nitel özelliklerinden maksimum nokta istenmektedir. Bunun için

Cebirsel İnceleme:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu maksimum veya minimum değerini $x = -\frac{b}{2a}$ için alır.

$f(x) = 1800x - 10x^2$ fonksiyonunda $a = -10$, $b = 1800$ olduğundan $x = -\frac{1800}{-20} = 90$ olur.

Grafik ile inceleme:

Yukarıdaki grafik incelendiğinde fonksiyonun sıfırlarının $x = 0$ ve $x = 180$ olduğu görülmektedir. Fonksiyon maksimum değerini bu noktaların orta noktasında alır. $x = 90$ olmalıdır.

Gezi için alınan toplam ücretin en fazla olabilmesi için geziye katılan kişi sayısı 90 olmalıdır

c) Bu problem durumu fonksiyonun maksimum değerini sormaktadır. Geziye 90 kişi katıldığında toplanan ücret maksimum değerine ulaşır. Buna göre

$f(90) = 1800 \cdot 90 - 10 \cdot 90^2 = 90(1800 - 900) = 90 \cdot 900 = 81\,000$ TL olur.

a seçeneğinde yer alan grafik incelendiğinde x= 90 noktasında fonksiyonun değerinin 81000 olduğu görülmektedir.

ç) Kulübün gezi için toplanan ücretten kâr veya zarar etmemesi için $f(x) = 80\,000$ olmalıdır.

$f(x) = 1800x - 10x^2 = 80.000$ ise $10x^2 - 1800x + 80\,000 = 0$

$10 \cdot (x^2 - 180x + 8000) = 0$

$10 \cdot (x^2 - 180x + 8100 - 100) = 0$

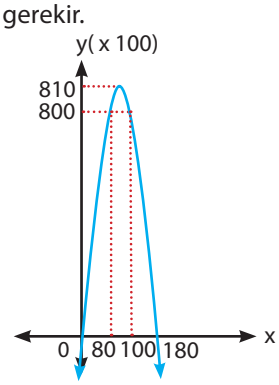
$10 \cdot [(x - 90)^2 - 10^2] = 0$

$(x - 90)^2 - 10^2 = 0$

$(x - 90 - 10) \cdot (x - 90 + 10) = 0$

$(x - 100) \cdot (x - 80) = 0$ ise $x = 100$ veya $x = 80$ olur.

Bu durumda gezi kulübünün kâr veya zarar etmemesi için en çok 100 kişinin geziye katılması gerekir.



Kulübün gezi için toplanan ücretten kar veya zarar etmemesi için $f(x) = 80\,000$ olmalıdır.

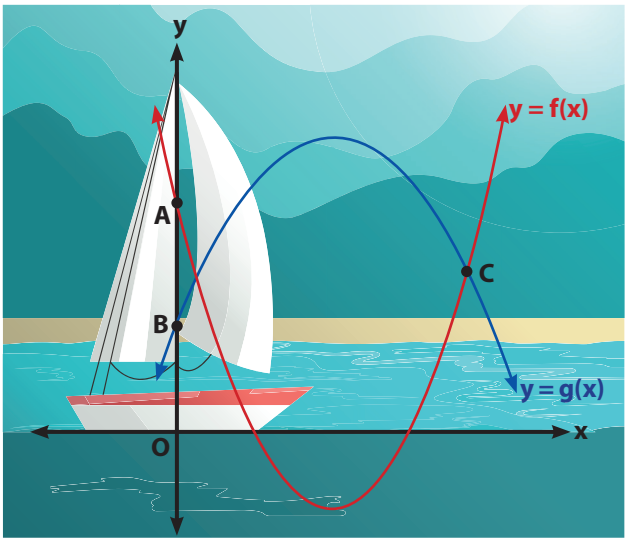
Grafikte y değeri $\frac{1}{100}$ ölçekle verilmiştir.

Buna göre 80 000 TL $y = 800$ ile gösterilmiştir.

$y = 800$ için $x = 80$ ve $x = 100$ bulunur.

Kâr ve zarar etmemek için geziye katılacak öğrenci sayısı en fazla 100 olur.

18. Sıra Sizde



Yandaki görselde yelkenlinin ana direği y ekseni, deniz yüzeyi x ekseni olmak üzere 1 metrenin 1 birim olduğu dik koordinat sistemi verilmiştir. Ana direk üzerindeki A noktasında bulunan bir karabatak kuşu, f fonksiyonunun grafiği boyunca hareket ederek fonksiyon grafiğinin minimum noktasında bulunan balığı avlamak için suya dalıyor. Daha sonra balıkla su yüzüne çıkıyor. Aynı anda yelkenlinin ana direği üzerindeki B noktasında bulunan martı g fonksiyonunun grafiği boyunca hareket ederek karabatak kuşunu C noktasında yakalıyor.

Problemde f ve g fonksiyonları

$f(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$g(x) = -x^2 + 6x + 16$

ile modellenmiştir.

Buna göre

a) Karabatak kuşu deniz yüzeyinin kaç metre altında balığı avlamıştır?

b) Martının karabatak kuşunu yakaladığı C noktasının apsisini veren ifadenin cebirsel temsilini yazınız.

19. Uygulama

Doğrusal, Karesel, Karekök ve Rasyonel Referans Fonksiyonlardan Türetilebilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklem ve Eşitsizlikler

Aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz ve soruları cevaplandırınız.

Bir kargo şirketi paket gönderim ücreti olarak biriminin 100 TL olduğu "kargo lira" adını verdikleri para birimini kullanmaktadır. Bu birime göre örneğin 12 "kargo lira" 1200 TL'ye karşılık gelmektedir. Şirket kayıtlı müşterilerinin kütlesi 1 kilograma kadar olan paketlerinden ücret almıyor, kütlesi 1 kilogramın üzerindeki paket gönderim ücreti için aşağıda içeriği verilen A ve B tarifelerini kullanmaktadır.

A tarifesinin kargo lira ücreti: Paketin kütlesinin karesinin bir eksiği

B tarifesinin kargo lira ücreti: Paketin kütlesinin dört katının dört eksiği

Buna göre paket gönderimi yapacak şirketin kayıtlı müşterilerinin paket kütlesine göre hangi tarifeyi seçmesi gerektiğine dair aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. A ve B tarifelerinin paketin kütlesine göre kargo lira ücretini sırasıyla ifade eden f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

2. f ve g fonksiyonlarının sıfırlarını bulunuz. Sıfırların problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

3. Kayıtlı bir müşterinin A ve B tarifelerine göre hangi kütle aralığında daha düşük ücret veya aynı ücreti ödeyeceğini gösteren $f = g$, $f < g$, $f > g$ denklem ve eşitsizliklerinin cebirsel ve grafik temsillerini belirleyiniz.

4. Kayıtlı bir müşterinin A ve B tarifelerine göre hangi kütle aralığında daha düşük ücret veya aynı ücreti ödeyeceğini gösteren eşitsizliklerin işaret tablosunu cebirsel ve grafik temsil yardımıyla yapınız.

5. Elde ettiğiniz ve yorumladığınız farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için strateji oluşturunuz.

6. Çözüm stratejinizi kullanarak problemi çözünüz.

7. Matematik yazılımı yardımıyla problemin çözümünde elde ettiğiniz denklem ve eşitsizliklere ait grafikleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek çiziniz.

1. adım: Giriş bölümüne f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

2. adım: Giriş bölümüne g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

- Grafiklerden yararlanarak problemin çözümünü doğrulayınız.

8. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümleri doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

9. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz. Bu stratejileri iki fonksiyonun birbiri ile ilişkisini içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlarınızı yazınız.

10. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel veya grafik olarak değerlendiriniz.

23. Örnek

Bir tavuk çiftliğinde üretilen farklı büyüklükteki A ve B yumurtalarının maliyet fiyatları hesaplanmış ve kârı da A yumurtası için maliyet ile ters orantılı, B yumurtası için maliyetle doğru orantılı olarak belirlenmiştir. A yumurtasının maliyeti 2 TL iken kârı 8 TL, B yumurtasının maliyeti 2 TL iken kârı 2 TL olmaktadır. Tavuk çiftliğinin sahibi hangi tür yumurtanın hangi maliyetle üretildiğinde daha fazla kâr elde edebileceğini öğrenmek amacıyla bir inceleme yapmaktadır. Bunun için A ve B türündeki yumurtaların satışından elde edilen kârın maliyete bağlı değişimini gösteren fonksiyonlar sırasıyla f ve g ile modellenmiştir.

Buna göre

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulunuz.

b) A ve B yumurtalarının satışından eşit miktarda kâr elde edebilmek için maliyetlerin kaç TL olması gerektiğini gösteren ifadenin cebirsel ve grafik temsilini yaparak her bir yumurtanın maliyetini hesaplayınız.

c) b maddesinde çizdiğiniz grafik temsilinden yararlanarak hangi maliyet aralığında A yumurtasının B yumurtasından daha kârlı olduğunu bulunuz. Bu ifadeye karşılık gelen eşitsizliğin cebirsel temsilini yapınız.

Çözüm

a) İki değişkenin değerleri değişirken çarpımları sabit kalıyorsa bu iki değişken birbiriyle **ters orantılıdır.**

A yumurtası için x maliyet, f(x) kârdır. Kâr ile maliyet ters orantılı ise

$f(x) = \frac{k}{x}$ $(k \in \mathbb{R} - \{0\})$ olmalıdır.

A yumurtasının maliyeti $x = 2$ TL iken kârı $f(x) = 8$ TL olduğuna göre $8 = \frac{k}{2}$ eşitliğinden $k = 16$ bulunur.

Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = \frac{16}{x}$ olur.

İki değişkenin değerleri değişirken bu değişkenlerin oranları sabit kalıyorsa bu iki değişken birbiriyle **doğru orantılıdır.**

B yumurtası için x maliyet, g(x) kârdır ve kâr ile maliyet doğru orantılı ise

$g(x) = k \cdot x$ $(k \in \mathbb{R} - \{0\})$ olmalıdır.

B yumurtasının maliyeti $x = 2$ TL iken kârı $g(x) = 2$ TL olduğuna göre $2 = k \cdot 2$ ise $k = 1$ bulunur.

Buna göre g fonksiyonunun cebirsel temsili $g(x) = x$ olur.

b) Üretilen A ve B yumurtalarının kârlarının eşit olması için $f(x) = g(x)$ olmalıdır.

$\frac{16}{x} = x$ ise $x^2 = 16$, $x = 4$ veya $x = -4$ bulunur. Maliyet pozitif bir değer olduğundan $x = 4$ olmalıdır.

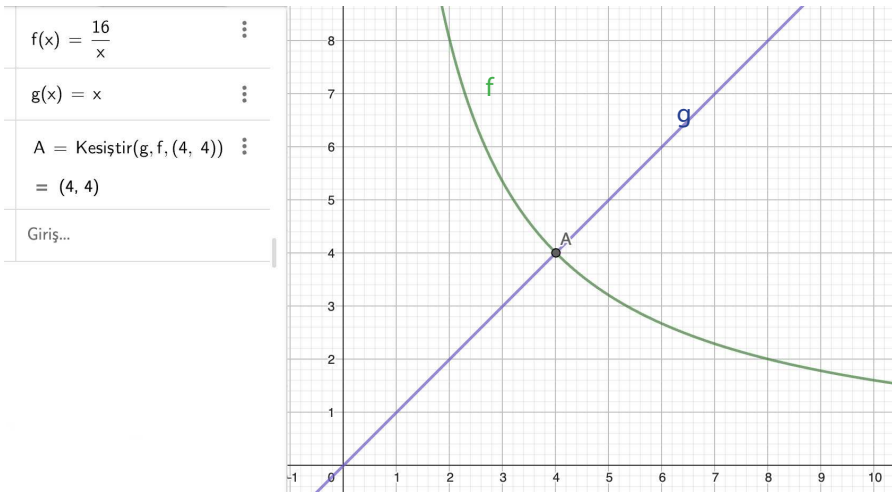
Bu durumda A ve B yumurtalarından elde edilen kârların eşit olabilmesi için her iki ürünün maliyeti de 4 TL olmalıdır .

- Bu problem durumunun çözümünü grafik temsili ile yapmak için matematik yazılımında aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

1. adım: Giriş bölümüne $f(x) = \frac{16}{x}$ yazılarak f fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. adım: Giriş bölümüne $g(x) = x$ yazılarak g fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: Araçlar sekmesinden **Kesiştir** aracı seçilip f ve g fonksiyonlarının üstüne tıklandığında fonksiyonların kesiştiği nokta bulunur.



Görsel 4.10: *f ve g fonksiyonlarının grafik görüntüsü*

f ve g fonksiyon grafiklerinin kesim noktasının apsis değerinin problem bağlamındaki anlamı, A ve B tip yumurtalardan elde edilen kârların eşit olması için bir yumurta maliyetinin 4 TL olması gerekir (Görsel 4.10).

c) A yumurtasından elde edilen kârın B yumurtasından elde edilen kârdan fazla olması cebirsel olarak $f(x) > g(x)$ yani $\frac{16}{x} > x$ ile gösterilir.

Görsel 4.10 incelendiğinde $f(x) > g(x)$ eşitsizliğini sağlayan bölge $0 < x < 4$ aralığıdır.

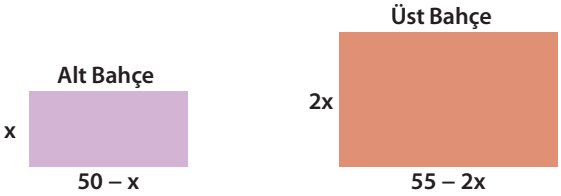
24. Örnek

Çiftçi Şenel Bey, dikdörtgen şeklinde olan, alt bahçe ve üst bahçe olarak adlandırdığı iki farklı bahçesini telle çevirmek istemektedir. Her iki bahçenin çevresi, ayrı ayrı tel ile çevrilmiş ve tellerin tamamı kullanılmıştır.

- Alt bahçe için kullanılan telin uzunluğu 100 metredir.
- Üst bahçe için kullanılan telin uzunluğu 110 metredir.
- Üst bahçenin kısa kenar uzunluğu, alt bahçenin kısa kenar uzunluğunun 2 katıdır.
- Üst bahçenin alanı alt bahçe alanından büyüktür.

Buna göre alt bahçenin kısa kenar uzunluğunun alabileceği değer aralığını cebirsel temsil ve grafik yöntemi ile bulunuz. İşaret tablosubu yapınız.

Çözüm



Cebirsel İnceleme

Alt bahçe için 100 metre tel kullandığına göre alt bahçenin çevre uzunluğu 100 metredir.

Alt bahçenin kısa kenar uzunluğu x ise uzun kenar uzunluğu $\frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$ olur.

Bu durumda alt bahçenin alanı,

$f(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu ile modellenebilir.

Üst bahçe için 110 metre tel kullandığına göre üst bahçenin çevre uzunluğu 110 metredir. Üst bahçenin kısa kenar uzunluğu alt bahçenin kısa kenar uzunluğunun 2 katı olduğundan üst bahçenin kısa kenar uzunluğu 2x olur.

Üst bahçenin uzun kenar uzunluğu $\frac{110 - 4x}{2} = 55 - 2x$ olur. Bu durumda üst bahçenin alanı,

$g(x) = 2x \cdot (55 - 2x) = 110x - 4x^2$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu ile modellenebilir.

Üst bahçenin alanı alt bahçenin alanından büyük ise $g(x) > f(x)$ omalıdır.

Buna göre $110x - 4x^2 > 50x - x^2$

$0 > 4x^2 - x^2 + 50x - 110x$

$0 > 3x^2 - 60x$ olur.

$3x^2 - 60x$ ifadesi h fonksiyonu olarak adlandırıldığında,

$h(x) = 3x^2 - 60x = 3(x^2 - 20x) = 3(x^2 - 20x + 100 - 100)$

$= 3[(x - 10)^2 - 10^2]$

$= 3[(x - 10 + 10) \cdot (x - 10 - 10)]$

$= 3x \cdot (x - 20)$ olur.

Burada $3x$ cebirsel ifadesi k fonksiyonu, $(x - 20)$ cebirsel ifadesi m fonksiyonu ile modellenirse, $h(x) = k(x) \cdot m(x)$ olur. $k(x) = 3x$ için k fonksiyonun sıfırı $x = 0$, $m(x) = x - 20$ için m fonksiyonunun sıfırı $x = 20$ olmalıdır. $h(x) < 0$ eşitsizliğinin tablosu yapıldığına,

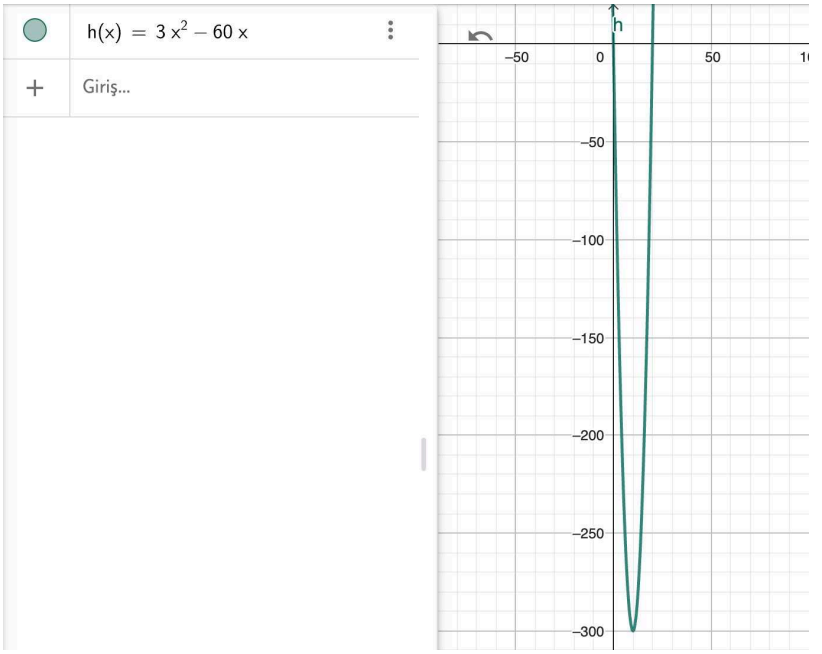
	$-\infty$		0		20		∞
k(x)	−		0	+		+	
m(x)	−			−	0	+	
h(x)	+		0	−	0	+	

bulunur. Tabloya göre $h(x) < 0$ olduğu aralık (0, 20) dır.

Problem bağlamında değerlendirildiğinde alt bahçenin kısa kenar uzunluğunun alabileceği değer aralığı (0, 20) dır.

Grafik İnceleme

$h(x) = 3x^2 - 60x = 3(x^2 - 20x) = 3(x^2 - 20x + 100 - 100) = 3[(x - 10)^2 - 100]$ fonksiyonunun grafiği, öteleme veya matematik yazılımı yardımı ile çizilir. $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonunun x ekseni boyunca pozitif yönde 10 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 100 birim ötelenip y değerlerinin 3 katına eşlenerek h fonksiyonunun grafik çizimi yapılır.



Görsel 4.11: *h fonksiyonunun grafiği*

Görsel 4.11'de eğrinin x eksenini kesen noktalarının T(0, 0) ve S(20, 0) olduğu görülmektedir. Grafik incelendiğinde $h(x) < 0$ şartını sağlayan aralık (0, 20) dır. Bu durumda alt bahçenin kısa kenar uzunluğunun alabileceği değer aralığı (0, 20) dır.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini 10 gün içinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Farklı alanlarda rasyonel referans fonksiyondan türetilen fonksiyonların gerçek yaşam durumlarında ters orantıyla olan ilişkisini veren (kâr-maliyet, işçi sayısı-gün vb.) örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturup grafiğini çiziniz.
- Gerçek yaşam durumunu yansıtması amacıyla oluşturduğunuz fonksiyonun cebirsel temsili için uygun tanım ve değer aralıkları belirleyiniz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

19. Sıra Sizde

Grup çalışması yapabilmek için öğretmeniniz rehberliğinde sınıfta üç gruba ayrılınız. Aşağıda yer alan problem cümlesini inceleyiniz ve soruları cevaplandırınız.

"İhtiyoloji (balık bilimi) dalında çalışan bir araştırmacı Bafa Gölü ve Gediz Nehri'nde bulunan yılan balığı sayısını x: 1 m^3 suda yaşayan yılan balığı sayısı olmak üzere sırasıyla

$f(x)= 2x^2+ 5x$ ve $g(x) = x^2 + 11x - 8$ fonksiyonları ile modellemiştir.

Buna göre Gediz Nehri'nde bulunan yılan balığı sayısının Bafa Gölü'nde bulunan yılan balığı sayısından fazla olması için 1 m^3 suda yaşayan kaç tane yılan balığı olduğunu bulunuz."

Yukarıda verilen problem durumunu 1. Grup cebirsel temsil yöntemi, 2. Grup grafik temsili yöntemi ve 3. Grup matematik yazılımı yardımı ile

1. **Çözebilmek için gerekli çözüm stratejisi oluşturunuz.**

2. **Oluşturduğunuz stratejiyi kullanarak problemi çözünüz.**

3. **Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümleri doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Proje Ödevi

Doğrusal, Karesel, Karekök, Rasyonel Referans Fonksiyonlardan ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlardan Elde Edilen Denklem ve Eşitsizlikler

Bu projede sizden doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlardan ve bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonlardan elde edilen denklem ve eşitsizliklerle ifade edilebilen bir gerçek yaşam problemi belirlemeniz istenmektedir. Belirlediğiniz problem için kullanılabilecek denklem veya eşitsizlikleri oluşturarak problemi çözmeniz, kullandığınız denklem ve eşitsizliklerin farklı problem durumlarında nasıl kullanılabileceğini belirlemeniz ve sınıfta sunmanız beklenmektedir.

Projeye başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlardan ve bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonlardan elde edilen denklem ve eşitsizlikler ile ifade edilebilen gerçek yaşam durumları belirleyiniz.
- Çözümünde doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlardan ve bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonlardan elde edilen denklem ve eşitsizliklerin kullanıldığı bir problem oluşturunuz.

Projeyi yaparken aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz problem durumunun çözümünde kullanacağınız denklem veya eşitsizlikleri belirleyiniz.
- Belirlediğiniz denklem veya eşitsizliklerden yararlanarak probleminizi çözünüz.
- Probleminizin çözümünde denklem veya eşitsizlikleri ifade eden fonksiyonların grafiklerinden nasıl yararlanabileceğinizi belirleyiniz.
- Problemin çözümünde kullandığınız denklem veya eşitsizliklerin başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini belirleyerek projenizi raporlayınız.
- Çalışmanızı 2 hafta içerisinde öğretmeninize teslim ediniz.

Proje raporunun aşağıdaki alt başlıkları içermesine dikkat ediniz:

Projenin amacı, kullanılan yöntem, problemin çözümü, farklı problem durumlarına uyarlanabilirliği

Projenizi sunmak için hazırlayacağınız modelde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

Gerçekleştirdiğiniz adımları sırasıyla anlatınız, anlatımınızı ilgili görsellerle destekleyiniz. Türkçenin düzgün ve etkili biçimde kullanılmasına özen gösteriniz. Proje ödeviniz öğretmeniniz tarafından karekodda yer alan analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili video

Kontrol Noktası

a, b ve c gerçek sayılar ve a sıfırdan farklı olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun maksimum-minimum değeri $f(-\frac{b}{2a})$ ile bulunur. Fonksiyon maksimum-minimum değerini $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında alır.

$a > 0$ ise $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında minimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ dır.

$a < 0$ ise $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında maksimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ dır.

Alıştırmalar

1. Bir otomotiv fabrikasında üretilen B ve C sınıfı iki farklı aracın günlük üretim miktarı ile fabrikanın aylık geliri arasındaki ilişki araştırılmış ve aylık gelirin her zaman pozitif değerde kalmasına dikkat edilmiştir. Günlük üretim miktarı ve fabrikanın aylık geliri arasındaki ilişki,

- x, fabrikada üretilen günlük araç miktarı
- b(x), B sınıfı araç için Türk lirası cinsinden aylık gelirin on binde biri
- c(x), C sınıfı araç için Türk lirası cinsinden aylık gelirin on binde biri olmak üzere
- $b(x) = 12x - 24$ ve $c(x) = -6x^2 + 72x - 120$ fonksiyonları ile modellenmiştir.

Buna göre

a) C aracından kazanılan aylık gelirin maksimum olması için C aracından bir günde kaç adet üretilmesi gerektiğini bulunuz.

b) Her iki araçtan elde edilen gelirin eşit olması için bu araçlardan kaçar tane üretilmesi gerektiğini bulunuz.

c) Bu iki araçtan aynı sayıda üretim yapılması şartı ile B aracının aylık gelirinin C aracının aylık gelirinden daha fazla olması için bu araçlardan en az kaç tane üretilmesi gerekir?

2. Mozaik duvar kaplaması üreten bir firma, kare şeklinde bir mozaik kaplama için üretim maliyetini kaplamanın alanı üzerinden santimetrekare başına 4 TL, satış fiyatı ise kenar uzunluğu üzerinden santimetre başına 12 TL olarak hesaplamaktadır.

Buna göre mozaik kaplama satışından elde edilebilecek en yüksek kârın kaç TL olduğunu ve bu kârın elde edilmesini sağlayan mozaik kaplamanın bir kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Bir boncuk dükkânında farklı büyüklükte A ve B boncukları satılmaktadır. A boncuğundan elde edilen kâr, maliyet fiyatı ile ters orantılıdır. A boncuğunun maliyeti 2 TL iken kârı 4 TL'dir. B boncuğundan elde edilen kâr daima maliyet fiyatından 2 TL fazladır. Dükkân sahibi hangi boncuk türünü satarsa daha fazla kâr elde edebileceğini öğrenmek amacıyla bir inceleme yapmaktadır. Bunun için A ve B türündeki boncukların satışından elde ettiği kârın maliyete bağlı değişimini gösteren fonksiyonları sırasıyla f ve g ile modellemiştir.

Buna göre

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulunuz.

b) A ve B boncuklarından eşit miktarda kâr elde edebilmek için maliyetin kaç TL olması gerektiğini gösteren ifadenin cebirsel ve grafik temsilini yaparak maliyeti hesaplayınız.

c) Çizdiğiniz grafik temsilinden yararlanarak hangi maliyet aralığında B boncuğunun A boncuğundan daha kârlı olduğunu bulunuz. Bu duruma karşılık gelen eşitsizliğin cebirsel temsilini yapınız.

4. Tema alıştırma ek soruları

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

4. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 10 soru verilmiştir.

1. Bir elektrik dağıtım şirketi, evlerde kullanılan elektrik için sabit bağlantı ücreti olarak 75 TL ve kullanılan her bir kWh enerji için 12 TL almaktadır.

x kullanılan elektrik miktarı (kWh) ve toplam fatura tutarı $y = f(x)$ **olmak üzere**

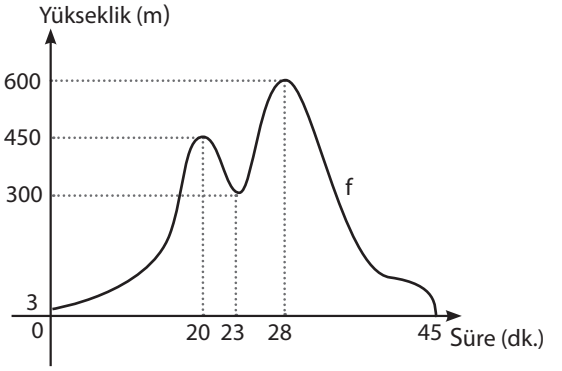
a) Kullanılan elektrik miktarı için toplam fatura tutarını belirleyen denklemin cebirsel temsilini yazınız.

b) Elde ettiğiniz cebirsel ifadenin grafiğini çiziniz.

c) $f(x)$ **ile ifade edilen cebirsel ifadenin fonksiyon olma şartını sağlayıp sağlamadığını gerekçeleriyle yazınız.**

2. Meteoroloji balonları, atmosferin üst katmanlarını incelemek için kullanılır. İçlerine helyum veya hidrojen gazı doldurulur ve havaya salındıklarında üstlerindeki cihazlar (radyo sondalar) aracılığıyla sıcaklığa, neme, hava basıncına ve rüzgâr hızına ilişkin veriler toplar. Bu veriler; hava tahmini ve iklim araştırmaları yapmak, atmosferin dinamiklerini anlamak için önemlidir.

Aşağıda havaya salınan bir meteoroloji balonunun süreye (dk.) bağlı yüksekliğini (m) gösteren grafik verilmiştir.



Buna göre

a) Grafik temsilinin fonksiyon şartını sağlayıp sağlamadığını bulunuz.

b) Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

c) Grafiğin artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ç) Balonun yükseldiği maksimum ve minimum mesafeleri bulunuz.

d) Grafiğin sıfırını bulunuz.

e) Grafiğin bire birliğini inceleyiniz.

3. Seramik üretilen bir fabrikada kare şeklindeki bir fayansın üretim maliyeti, alanı üzerinden; satış fiyatı ise fayansın çevresi üzerinden hesaplanmaktadır. Maliyet fiyatı birimkare başına 3 TL, satış fiyatı birim başına 12 TL'dir.

Buna göre

a) Fayansın satışından elde edilen kârın en fazla olması için fayansın uzunluğu kaç birim olmalıdır?

b) Bir fayanstan elde edilen kârın en fazla kaç TL olduğunu bulunuz.

c) Kârın en yüksek olduğu anda fayansın üretim ve satış maliyetlerini hesaplayınız.

4. Aşağıda görseli verilen asma köprünün ayakları arasındaki mesafe 160 metre olup bu ayaklar, halatla parabol şeklinde birbirine bağlanacaktır. Ayakların köprü üzerinde kalan kısmı 200 metre, ayaklara eş uzaklıktaki köprü merkezinde halatın köprüye en yakın mesafesi 40 metredir.

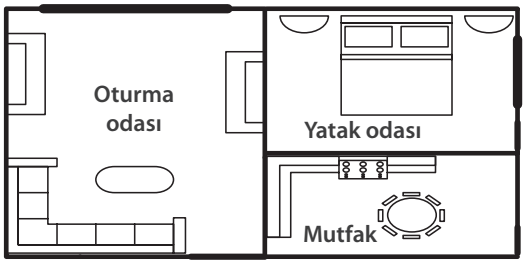
Köprü merkezini orijin kabul etmek üzere

a) Halatın ifade ettiği grafik temsilinin cebirsel ifadesini yazınız.

b) Cebirsel ifadesini yazdığınız fonksiyonun teklik-çiftlik durumunu grafik temsili ve cebirsel temsilinden faydalanarak belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonucu gerekçesiyle yazınız.

5. Aşağıda oturma odası, yatak odası ve mutfaktan oluşan dikdörtgen şeklindeki bir evin planı verilmiştir.

Evin çevresi 40 m ve mutfağın uzun kenarı kısa kenarının 3 katıdır.

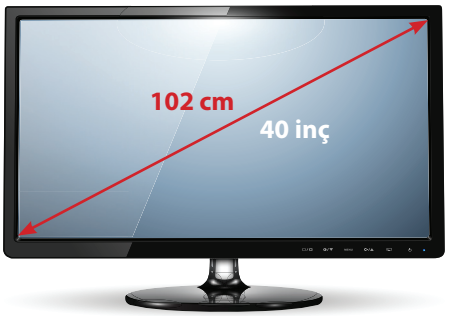


Oturma odası kare şeklinde olduğuna göre yatak odasının alanının en büyük olması için

a) Oturma odasının bir kenarının kaç birim olması gerektiğini bulunuz.

b) Yatak odasının alanının en çok kaç m^2 olduğunu bulunuz.

6. İnç Amerika, İngiltere ve Kanada gibi ülkelerde kullanılan bir uzunluk birimidir. Özellikle akıllı telefon, bilgisayar, notebook, tablet gibi elektronik ürünlerin ekran büyüklükleri inç ile ifade edilir. 1 inç 2,54 cm'dir. Genellikle dikdörtgen biçimindeki standart televizyonların ekran büyüklükleri ise köşegen uzunluğu ile ifade edilmektedir. Örneğin ekran büyüklüğü 40 inç olan aşağıdaki televizyonun köşegen uzunluğu $40 \cdot 2{,}54 = 101{,}6 \approx 102$ cm'dir.



Kısa kenar uzunluğu 70 cm, uzun kenar uzunluğu $\sqrt{x}$ cm olan dikdörtgen biçimindeki bir televizyonun köşegen uzunluğu f fonksiyonu ile modellendiğinde

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

c) $x = 576 \cdot 10^2$ için televizyonun ekran büyüklüğünün yaklaşık kaç inç olduğunu bulunuz.

7. Titreşim; araç, gereç ve makinelerin çalışırken oluşturdukları vibrasyon ve salınım hareketleridir. Endüstride kullanılan taş kırma makinesi, pnömatik çekiç, taşınabilir testere, parlatma ve rende makinesi, yol yapım, bakım ve onarım makinesi, traktör ve kamyon gibi araçlar yüksek titreşime sahiptir. Bu araç ve makineleri uzun süre kullanan işçilerde baş ağrısı, sırt ile boyun kaslarında sertlik ve ağrı, göz yuvarlağında titreşimler, uzağı görememe, genel denge bozuklukları gibi sağlık problemleri görülür. İş ve İşçi Güvenliği Yasası'na göre iş yeri sahipleri titreşim nedeniyle oluşan meslek hastalıklarını azaltmak için kullanılan makinelerin titreşimlerini belirlenen aralıklarla ölçmek zorundadır. Bu ölçümler yapılırken titreşimin frekansı, şiddeti, yönü ve titreşime maruz kalan kişinin yaşı, cinsiyeti gibi parametreler kullanılır.

Aşağıdaki tabloda bazı araç ve makinelerin periyotları ve titreşim frekansları verilmiştir.

Makineler / Araç	Periyot (Saniye-sn.)	Frekans (Hertz-Hz.)
Elektrikli Testere	0,004 sn.	250 Hz.
Parlatma Makinesi	0,005 sn.	200 Hz.
Cam Kesim Makinesi	0,01 sn.	100 Hz.
Rende Makinesi	0,02 sn.	50 Hz.

İnsan vücudu 1 Hz.–1000 Hz. arasındaki titreşim frekanslarını algılar. 440 Hz. üzerindeki frekanslar insan sağlığı için "rahatsız edici" olarak kabul edilir.

Buna göre

a) Frekansın periyoda bağlı değişimini gösteren fonksiyonu yazınız.

b) Periyodu 0,002 sn. olan taş kırma makinesinin insan sağlığı için "rahatsız edici" bir frekansa sahip olup olmadığını bulunuz.

8. Güç, bir işin birim zamanda yapılma hızını gösteren bir büyüklüktür ve P (watt) birimiyle ifade edilir. Yapılan iş miktarı W (joule) ve bu işin gerçekleştiği süre t (saniye) olmak üzere gücün matematiksel olarak formülü $P = \frac{W}{t}$ 'dir.

10 joule iş yapılan bir deneyde işin yapılma süresi t ve güç fonksiyonu zamana bağlı f(t) **olmak üzere**

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) $t \in [5, 50]$ için fonksiyonun alabileceği maksimum-minimum değerleri bulunuz ve görüntü kümesini yazınız.

9. Kütlesi m (kg), hacmi V (ℓ) olan bir maddenin yoğunluğu $d = \frac{m}{V}$ (kg/ ℓ) formülü ile hesaplanır. A maddesinin kütlesi 1 kg, B maddesinin kütlesi 2 kg'dır. B maddesinin hacmi A maddesinin hacminden 1 ℓ fazladır.

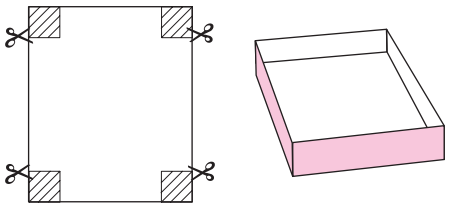
Buna göre

a) Her bir maddenin yoğunluğunu hacmine bağlı olarak ifade eden fonksiyonları cebirsel olarak ifade ediniz.

b) A maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiğine hangi dönüşümlerin uygulanmasıyla B maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiğinin çizilebileceğini bulunuz.

c) A ve B maddelerinin yoğunluk fonksiyonu grafiklerini dönüşüm kurallarından faydalanarak çiziniz.

10. Arzu, kenar uzunlukları 40 cm ve 60 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kartonun her köşesinden aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi özdeş kare parçaları kesiyor. Kalan karton kısmının kenarlarını katlayarak üstü açık dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutu oluşturuyor.



Buna göre kutunun yan yüz alanının maksimum olması için başlangıçta kesilen karelerin bir kenarının uzunluğu kaç cm olmalıdır?

A) 10 B) 12,5 C) 15 D) 17,5 E) 20

4. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

5. TEMA

SAYMA, ALGORİTMA VE BİLİŞİM

5.1. Sayma Stratejileri

5.2. Cebirsel ve Fonksiyonel İşlemlerin Algoritmik Yapısı

Anahtar Kavramlar

- **algoritma**
- **faktöriyel**
- **sayma**
- **seçme sayısı**
- **sıralama sayısı**

Sembol ve Gösterimler

- $n!$
- $\binom{n}{r}$

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, açık uçlu soruları cevaplamanız, performans görevlerini yerine getirmeniz, araştırma ödevini yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

5. Tema
Karekodu

5. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- sayma stratejileri kullanarak problem çözebilmeniz,
- cebirsel ve fonksiyonel işlemleri algoritmik bir dille yapılandırabilmeniz

beklenmektedir.

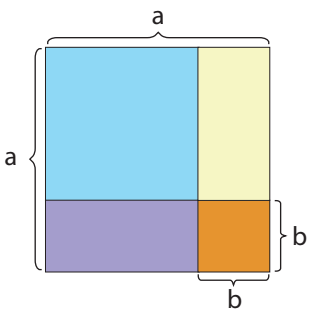
Başlarken

Sayıların ve yazılı kayıtların henüz kullanılmadığı eski çağlarda insanlar, sayma ve miktar belirleme gerektiren durumlarla başa çıkmak için pratik ve görsel yöntemler geliştirmişlerdir. Örneğin bir çoban, sürüsündeki hayvanların sayısını belirlemesi gerektiğinde her bir hayvan için bir taş kullanarak bu taşları bir kenara koymuş ve günün sonunda taşlarla hayvanları eşleştirerek hayvanlarının sayısını kontrol edebilmiştir. Böylece karmaşık hesaplamalara ihtiyaç duymadan nesneleri eşleştirip, görsel işaretlerle takip ederek miktarları belirlemişlerdir. Bu basit ama etkili yöntemler sayılar ve yazılı kayıtların temellerinin atılmasına da öncülük etmiştir. Toplama ve çarpmanın keşfi bu süreci hızlandırmıştır. Ritmik sayma yapmadan toplama ve çarpma yoluyla saymaya geçiş, daha büyük ve karmaşık miktarları hızlı ve verimli bir şekilde hesaplamayı mümkün kılmıştır. Sayılar ile çıkılan bu yol bugün şifreleme ve algoritma ile farklı alanlara ulaşmıştır. Veri dizilerinin seçilmesi ve belirli bir sıraya göre düzenlenmesi ile şifreleme tekniklerinde bilgi güvenliği sağlanmaktadır. Sıralama ve seçme, hem bilgi güvenliği hem de hesaplama verimliliği açısından kritik bir matematiksel işlem olarak bugün kullanılmaktadır.

Ön Değerlendirme

1. Hilesiz üç madenî paranın havaya atılması deneyinde oluşan durumları listeleyerek çıktı sayısını belirleyiniz.

2.



Kenar uzunluğu a birim olan kare biçimindeki bir karton parçası iki doğru parçası ile dört bölgeye ayrılıyor. Daha sonra oluşan bölgeler yanda gösterildiği gibi farklı renklerle boyanıyor. Oluşan turuncu bölge kare olup bir kenar uzunluğu b birimdir.

Buna göre

a) Mavi bölgenin alanını cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Mor bölgenin alanını cebirsel olarak ifade ediniz.

c) Mavi ve turuncu bölgelerin çevre uzunlukları toplamını cebirsel olarak ifade ediniz.

ç) Sarı bölgenin çevre uzunluğunu cebirsel olarak ifade ediniz.

3. Bir su satış şirketi satın alınan aylık damacana sayısına göre müşterilerine kampanya sunacaktır. Şirketin aylık satın aldıkları damacana sayılarına göre müşterilerine farklı tercihler sunduğu kampanya numarası aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Aylık Satın Alınan Damacana Sayısı (x tam sayı)	Yapılan Kampanya Numarası
$5 \le x < 10$	1
$10 \le x < 20$	2
$20 \le x < 30$	3

Bu kampanya için şirket yukarıdaki tabloya göre bir algoritma oluşturacaktır.

Buna göre

a) Bu algoritmanın akış şemasını çiziniz.

b) Akış şemasında kullanılan koşul ifadeleri arasındaki mantıksal ilişkiyi açıklayınız.

4. Aşağıda fonksiyonların bazı nitel özelliklerini gösteren tablo verilmiştir.

Nitel Özellik / Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artan Olduğu Aralık	Azalan Olduğu Aralık	Maksimum Noktası	Minimum Noktası	Bire Birliği
			-	+						

Yukarıdaki tablonun fonksiyon kısmına doğrusal ve karesel birer fonksiyon yazarak ilgili yerleri uygun şekilde doldurunuz.

5.1. SAYMA STRATEJİLERİ

Konuya Başlarken

Sayıların kullanılmadığı dönemlerde hayvancılıkla uğraşan Eski Çağ göçebe topluluklarında her hayvan grubunun ayrı bir sorumlusu vardır. Bu kişiler, belirli zaman aralıklarında kendi sorumluluğunda bulunan hayvan sayısındaki azalma ve artmayı tespit ederlerdi. Bu sorumluların dışında toplulukta bir de tüm hayvanlardan sorumlu bir başka kişi daha bulunurdu. O dönemlere dair bilgilere Görsel 5.1'deki gibi kaya çizimlerinden ulaşılmaktadır.

Görsel 5.1: *Antik kaya çizimleri*

Buna göre

1. **Sorumlu kişilerin hayvanlardaki artma ve azalmayı sayıları kullanmadan tespit edebilecekleri yönteme dair görüşlerinizi söyleyiniz.**
2. **Bu olay bugün yaşansaydı sorumlu olan kişiler hayvan sayısını nasıl hesaplayabilirdi, sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
3. **Tüm hayvanlardan sorumlu kişi sayma yöntemini kullanmadan tüm hayvanların sayısını nasıl hesaplayabilirdi? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
4. **Her sorumluda eşit sayıda hayvan bulunmuş olsaydı tüm hayvanların sayısını tespit etmek için nasıl bir yol izlenebilirdi, sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
5. **Hayvanların dağılımı ve düzenlenmesiyle ilgili aşağıdaki iki farklı durumu inceleyerek çözüm yollarını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
   - **Bir toplulukta 5 farklı hayvan sorumlusu bulunmaktadır. Bu sorumlular; küçükbaş, büyükbaş veya kümes hayvanları olmak üzere 3 farklı hayvan grubundan birine atanacaktır. Her sorumlu yalnızca bir gruptan sorumlu olabilir. Bu durumda sorumluların farklı gruplara atanma biçimlerini belirlemek için nasıl bir yöntem izlenmelidir?**
   - **Bir çiftlikte 3 farklı ağıla konulması gereken 5 farklı koyun vardır. Her koyun yalnızca bir ağıla yerleştirilecektir. Bu durumda koyunların farklı şekillerde yerleştirilme biçimlerini belirlemek için nasıl bir yöntem izlenmelidir?**

SAYMA YÖNTEMLERİ

Sayma, geçmiş dönemden bugüne günlük hayatın hemen her alanında önemli bir yere sahip olmuştur. Nesnelerin, miktarların ve zamanın düzenli bir şekilde yönetilmesini sağlayan çeşitli sayma yöntemleri vardır.

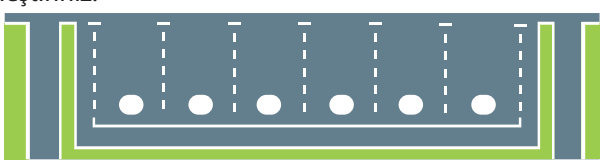
1. Uygulama

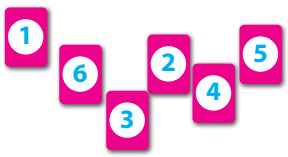
Eşleştirme Yoluyla Sayma

Aşağıda verilen durumu inceleyiniz ve bu durumla ilgili soruları cevaplayınız.

Bir otopark görevlisi, araçların park edileceği alanları belirlemek için sayı kartları kullanacaktır. Görevli, her park yerine bir sayı kartı yapıştırarak park düzenini oluşturacaktır.

1. Aşağıda bir otoparkın görseli verilmiştir. Görselin yanında numaralandırılmış olan sayı kartlarını her bir park yeri ile eşleştiriniz.





2. Yapılan eşleştirmeden yararlanarak otoparktaki araç park yeri sayısına nasıl ulaşılabileceğine dair çıkarımlarınızı yazınız.

Bir nesne grubunun elemanları ile $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin elemanları arasında sırasıyla bire bir eşleme yaparak verilen nesne grubunun eleman sayısını bulma işlemine **eşleştirme yoluyla sayma** denir. Nesne grubunun son elemanı ile eşleşen doğal sayı, kümenin eleman sayısıdır. Eşleme yoluyla sayma, bilinen en eski sayma yöntemlerinden biridir.

2. Uygulama

Toplama Yoluyla Sayma

Metin ve görselden faydalanarak verilen soruları cevaplayınız.

Aşağıda Eylül'ün kitaplığının bir kısmının görseli verilmiştir.

ROMAN HİKÂYE ŞİİR

Eylül yukarıda görselde verilen roman, hikâye ve şiir kitaplarından bir tanesini "Bir Kitap, Bin Hayal" projesi kapsamında bir köy okuluna bağışlayacaktır. Eylül'ün bu köy okuluna bağışlayacağı kitap için kaç farklı seçeneği olduğunu bulunuz.

1. Verilen sayma problemindeki nesneleri verilen örnekten yola çıkarak belirleyiniz.

Roman kitapları, . . .

2. Kitap türlerine göre sayılacak nesneler arasındaki ilişkileri belirleyiniz.

3. Problem durumu aşağıdaki tabloda türlerine göre temsillere dönüştürülmüştür. Türlerine göre nesnelerin sayısını eşleştirme ile sayma yöntemini kullanarak bulunuz ve tabloda karşılık gelen yere yazınız.

Türlerine Göre Kitap Çeşitleri	Adet
… kitaplarının sayısı	
… kitaplarının sayısı	
… kitaplarının sayısı	

4. Problem durumu aşağıdaki tabloda renklerine göre temsillerle yeniden ifade edilmiştir. Yeni duruma göre nesnelerin sayısını eşleştirme ile sayma yöntemini kullanarak bulunuz ve tabloda karşılık gelen yere yazınız.

Renklerine Göre Kitap Çeşitleri	Adet
… kitaplarının sayısı	
… kitaplarının sayısı	
… kitaplarının sayısı	
… kitaplarının sayısı	

5. Eylül'ün bağışlayacağı bir kitabı seçmek için kaç farklı seçeneği olduğunu hesaplamak için çözüm stratejisi oluşturunuz.

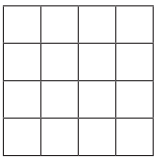
6. Oluşturmuş olduğunuz çözüm stratejisini kullanarak Eylül'ün bağışlayacağı bir kitabı seçmek için kaç farklı seçeneği olduğunu hesaplayınız.

7. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz ve sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı yazınız.

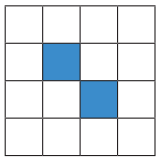
8. Sayma problemlerinde çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Ortak elemana sahip olmayan farklı iki nesne grubunun eleman sayısını toplayarak bulma işlemine **toplama yoluyla sayma** denir.

1. Örnek



Şekil 1

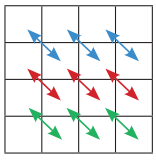


Şekil 2

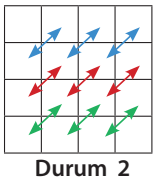
Şekil 1'de 16 birimkareden oluşan karenin sadece bir ortak köşeye sahip iki birimkaresi Şekil 2'deki gibi maviye boyanacaktır.

Buna göre boyama işleminin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

Çözüm



Durum 1



Durum 2

Şekil üzerinde olabilecek tüm durumlar sayılır.

Durum 1'de 9 farklı durumda ve Durum 2'de 9 farklı durumda boyama yapılabileceğinden toplam 18 farklı şekilde boyama yapılabilir.

3. Uygulama

Çarpma Yoluyla Sayma

Aşağıdaki problem durumunu inceleyerek verilen soruları cevaplayınız.

"Ali'nin gardırobunda birer adet yeşil ve mavi pantolon ile birer adet yeşil, kırmızı ve turuncu gömlek vardır. Bir davete katılacak olan Ali bu kıyafetlerle 1 pantolon ve 1 gömlekten oluşan kaç farklı kombin yapabilir? "

1. Yukarıda verilen sayma problemindeki nesneleri verilen örnekten yola çıkarak belirleyiniz.

Yeşil pantolon, . . .

2. Sayılacak nesneler arasındaki ilişkileri belirleyiniz.

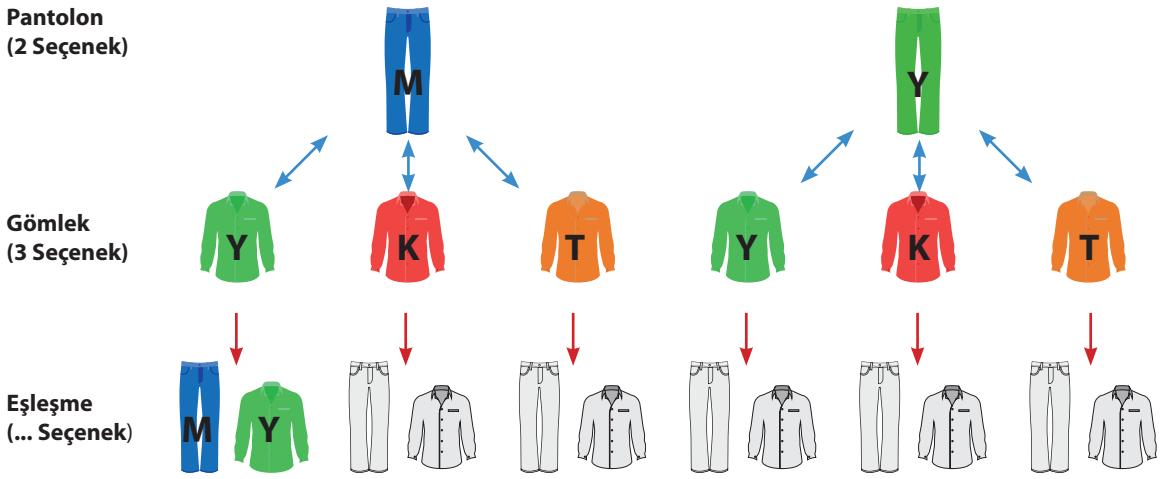
3. Problem durumundaki sözel ifadeleri görsel temsillere dönüştürünüz. Bunun için aşağıdaki tablodan faydalanarak giysilerin üstüne uygun renk kombinlerini örnekteki gibi yazınız.

Tablo Yöntemi							
Pantolon (2 Seçenek)							
Gömlek (3 Seçenek)							
Eşleşme (... Seçenek)							

4. Tablo yöntemi ile ifade ettiğiniz sözel ifadeleri farklı hangi yöntemlerle görsel temsillere dönüştürebilirsiniz? Arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

5. Aşağıda çizge yöntemi ile gösterilen görselden faydalanarak giysilerin üstüne uygun renk eşleşmelerini örnekteki gibi yazınız.

Çizge Yöntemi



6. Tablo ve çizge yöntemi kullanılarak sayıldığında kaç farklı eşleşme yapılabileceğini bulunuz.

7. Ali'nin kıyafetleriyle yapabileceği eşleşme sayısını hesaplamak için farklı bir yöntem bulunabilir mi? Eşleşmenin kaç farklı seçim ile yapılabileceğine dair çözüm stratejileri oluşturunuz.

8. Oluşturmuş olduğunuz çözüm stratejisini kullanarak kaç farklı eşleştirme yapılabileceğini bulunuz. Bulduğunuz yöntemle ulaştığınız sonucu, eşleştirerek -sayma yöntemiyle- elde ettiğiniz sonuç ile karşılaştırarak çözüm stratejinizi kontrol ediniz.

9. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz ve sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı yazınız.

10. Sayma problemlerinde çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Ortak elemana sahip olmayan farklı iki nesne grubundan birer eleman seçerek oluşturulan ikililerin sayısını çarparak bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.

1. Sıra Sizde

Mete 2 farklı renkte ayakkabı, 3 farklı renkte pantolon, 4 farklı renkte gömlek ile kaç farklı kombin yapabileceğini hesaplamak istemektedir.

Buna göre

a) Mete'nin kaç farklı kombin yapabileceğini tablo yöntemi ve çizge yöntemi kullanarak belirleyiniz.

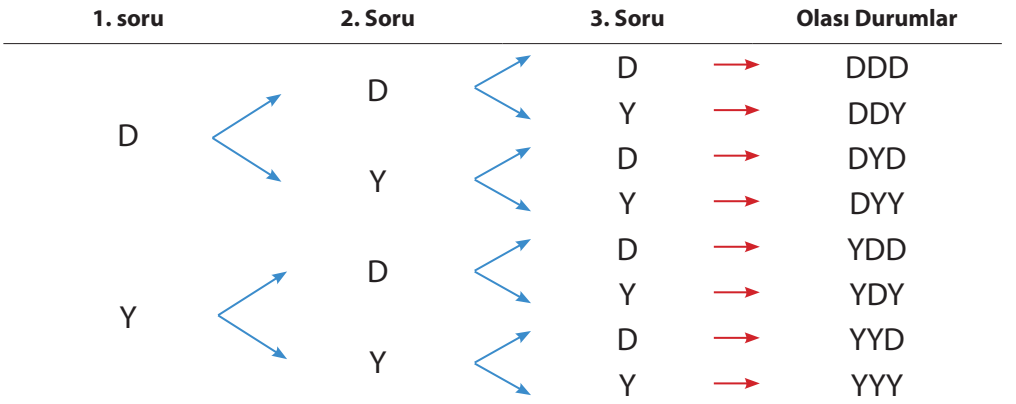
b) Mete'nin çarpma yoluyla sayma yöntemini kullanarak kaç farklı kombin yapabileceğini hesaplayınız. Sonucu önceki adımda tablo ve çizge yönteminde bulduğunuz sonuçlarla karşılaştırınız.

2. Örnek

Bir öğrencinin Matematik dersine ait bir sınavdaki 3 tane "Doğru-Yanlış" sorusunu kaç farklı şekilde cevaplayabileceğini bulunuz.

Çözüm

Olası durumları görmek için çizge yöntemi tercih edilebilir. Doğru "D" harfi, yanlış "Y" harfi ile gösterilirse aşağıdaki gösterim elde edilir:



Buradan 3 soru için DDD, DDY, DYD, DYY, YDD, YDY, YYD, YYY durumlarının olduğu görülür. Yani üç tane Doğru-Yanlış sorusunu cevaplayabileceği 8 farklı seçenek vardır.

1. Sorudaki Seçenek Sayısı	2. Sorudaki Seçenek Sayısı	3. Sorudaki Seçenek Sayısı
2	2	2

Öğrencinin $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ farklı seçeneği olduğu görülür.

Tablo ve çizge yöntemi ile seçenek sayısı hesaplamanın zor olduğu sorularda çarpma yoluyla sayma, problemin çözümüne ulaşmada kolaylık sağlar.

3 . Örnek

Elif'in basit şifreli kilidi bulunan bir anı defteri vardır. Üzerinde 1'den 4'e kadar rakamlar olan üç haneli bu kilit ile her seferinde farklı rakamlar kullanarak kaç farklı şifre oluşturulabileceğini bulunuz.

Çözüm

Şifrenin alabileceği değerlerin bulunması için tablo yöntemi kullanılabilir. Kullanılan rakamlar 1, 2, 3 ve 4 olduğuna ve her seferinde farklı rakam kullanılacağına göre tablo aşağıdaki değerleri alabilir:

1. Hane	2. Hane	3. Hane
1	2	3
1	2	4
1	3	2
1	3	4
1	4	2
1	4	3
2	1	3
2	1	4
2	3	1
2	3	4
2	4	1
2	4	3

1. Hane	2. Hane	3. Hane
3	1	2
3	1	4
3	2	1
3	2	4
3	4	1
3	4	2
4	1	2
4	1	3
4	2	1
4	2	3
4	3	1
4	3	2

Tabloda görüldüğü gibi 24 farklı şifre oluşturulabilir. Oluşturulan şifrenin basamak sayısı arttıkça tablo veya çizge yöntemi kullanarak bütün seçenekleri hesaplamak zorlaşır.

Burada oluşturulabilecek şifre sayısı, çarpma yoluyla sayma yöntemi kullanılarak daha kolay bulunabilir.

Birinci hanede tüm rakamlar kullanılabileceği için 4 farklı seçenek vardır. İkinci hanede (birinci hanede bir tane rakam kullanıldığı için) geriye 3 farklı seçenek, üçüncü hanede ise (birinci ve ikinci hanede birer tane rakam kullanıldığı için) geriye 2 farklı seçenek kalır.

1. Hanedeki Seçenek Sayısı	2. Hanedeki Seçenek Sayısı	3. Hanedeki Seçenek Sayısı
4	3	2

Buradan oluşturulabilecek şifre sayısı $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ bulunur.

2. Sıra Sizde

Atakan, bisikleti için üzerinde 1'den 5'e kadar numaralar olan 3 haneli şifreli kilit kullanmaktadır.

Atakan'ın bu kilit ile

a) Kaç farklı şifre oluşturabileceğini bulunuz.

b) Her seferinde farklı rakamlar kullanmak üzere kaç farklı şifre oluşturabileceğini bulunuz.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı

SIRALAMA SAYISI

Nesneleri sıraya dizmek veya bir yarışmada kimlerin hangi sırada yer alacağını belirlemek gibi durumlarla günlük hayatta sık sık karşılaşılır. Bu tür farklı dizilimler özellikle olasılık hesaplamalarında önemli bir yer tutar. Bir olayın farklı şekillerde nasıl gerçekleşeceğini hesaplarken olası durumları doğru bir şekilde değerlendirmek için sıralama önemlidir.

4. Uygulama

Nesnelerin Sıralanışı

Aşağıdaki örnek problem durumunu inceleyip soruları cevaplayınız.

Arda, Berra ve Can isimli üç kardeş yan yana oturacaktır. Bu kardeşlerin kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

1. Yukarıdaki örnek problem durumunu hangi sayma yöntemi ile çözebilirsiniz? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

2. Belirlediğiniz sayma yöntemi ile soruyu çözünüz.

3. Bu üç kardeşin, anne ve babaları ile yan yana kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

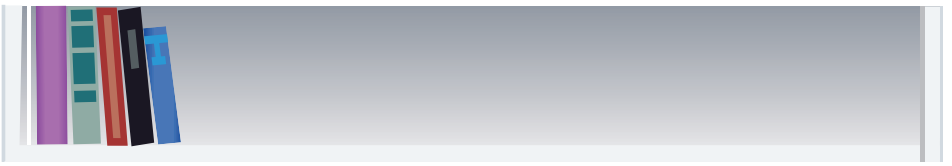
4. Kişi sayısı ile yan yana sıralanma sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu belirleyerek yazınız.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1'den n'ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve *n*! ile gösterilir.

Buna göre
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ olur.
$0! = 1$ olarak kabul edilir.
$1! = 1$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
Buradan $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 6 \cdot 5!$ yazılabilir.

4. Örnek

Aşağıda bir kitaplıkta bulunan rafa ait görsel verilmiştir.



Buna göre 5 farklı kitabın bu rafa yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

Çözüm

Her bir sıra için kaç farklı seçenek olduğu bulunur. Çarpma yoluyla sayma ile kaç farklı şekilde sıralanabileceği hesaplanır.

1. Sıraya Gelebilecek Kitap Sayısı	2. Sıraya Gelebilecek Kitap Sayısı	3. Sıraya Gelebilecek Kitap Sayısı	4. Sıraya Gelebilecek Kitap Sayısı	5. Sıraya Gelebilecek Kitap Sayısı
5	4	3	2	1

Buradan kitapların rafa $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ farklı şekilde sıralanabileceği bulunur.

5. Örnek

Seda ve Selim'in aralarında bulunduğu 8 kişilik bir halk oyunu ekibi, gösteri için yan yana sıraya girecektir.

Ekibin en solunda Selim, en sağında Seda olmak üzere kaç farklı şekilde sıralama olabileceğini bulunuz.

Çözüm

Her bir sıra için kaç farklı seçenek olduğu bulunur. Çarpma yoluyla sayma ile ekibin kaç farklı şekilde sıralanabileceği hesaplanır.

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

farklı şekilde sıralanabilirler.

6 . Örnek

Bir pastane çalışanı 4 çeşit börek ve 5 çeşit tatlı tepsisini iki bölmeli satış dolabında börekler ve tatlılar ayrı bölmelerde olacak şekilde sıralayacaktır.

Buna göre

a) Tepsilerin tamamının kaç farklı şekilde sıralanabileceğini hesaplayınız.

b) Tatlı tepsilerinin kendi arasında sıralanma sayısının börek tepsilerinin kendi arasında sıralanma sayısının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

Çözüm

4 çeşit börek 4! farklı şekilde, 5 çeşit tatlı 5! farklı şekilde raflara sıralanabilir. Buradan

a) $4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$ farklı biçimde sıralama yapılabilir.

b) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$ bulunur.

3. Sıra Sizde

2 öğretmen ve 5 öğrenciden oluşan bir grup, tiyatro gösterisine gidecektir.

Buna göre bu 7 kişinin yan yana sıralanmış 7 koltuğa öğretmenler sıranın başında ve sonunda bulunmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

7 . Örnek

Bit, dijital bilgi depolamanın en küçük birimidir. Bit 0 ya da 1 ile temsil edilir. Bayt ise 8 bitlik bir gruptan oluşur. Bitler ve baytlar; bir bilgisayardaki verileri depolama, iletme ve işleme işlemleri için kullanılır.

Örneğin bilgisayar kodlama sisteminde 'A' harfi ASCII [ASKİ (Amerikan Bilgi Değişimi İçin Standart Kod)] tablosunda 65 sayısına karşılık gelir ve bu sayı ikili sistemde 7 bitlik 1000001 karakter kümesi ile gösterilir. Benzer şekilde, '2' karakteri ASCII tablosunda 50 sayısına karşılık gelir ve bu da 7 bitlik 0110010 karakter kümesi ile gösterilir.

Buna göre

a) 4 bitlik bir verideki dizilimin kaç farklı karakter kümesi ile ifade edilebileceğini bulunuz.

b) Bir baytlık verideki bir dizilimin kaç farklı karakter kümesi ile ifade edilebileceğini bulunuz.

Çözüm

a) 4 bitlik bir dizilimde her bir bite karşılık ikili sistemde 0 ya da 1 karakterlerinden biri gelebileceği için $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ farklı karakter kümesi oluşturulabilir.

b) Bir baytlık dizilim 8 bitten oluşur. Her bir bite ikili sistemde 0 ve 1 karakterlerinden biri gelebileceği için $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ karakter kümesi oluşturulabilir.

4. Sıra Sizde

ASCII bilgisayarların metin karakterlerini sayısal değerler olarak temsil etmesi için oluşturulmuştur. İlk kez 1960'larda geliştirilen ASCII, bilgisayarlar ve iletişim cihazları arasında uyumu sağlamak için 1963 yılında standart hâle getirilmiştir. ASCII 7 bitlik bir karakter kümesidir ve karakterlerin (harfler, sayılar, semboller) ikili sistemde [binary (bayneri)] nasıl temsil edileceğini tanımlar.

Extended (ekstendıt) ASCII (Genişletilmiş ASCII) ise 8 bitlik bir yapıya sahip bir kodlama sistemidir. Bu genişletme özel karakterler (ç, ğ, ş gibi) ve çizim sembolleri için ek karakterler içerir.

Buna göre

a) ASCII'de 7 bitlik bir karakter kümesinde kaç farklı karakter olduğunu bulunuz.

b) Extended ASCII'de 8 bitlik bir karakter kümesinde kaç farklı karakter olduğunu bulunuz.

5. Uygulama

n Farklı Nesneden r Tanesinin Sıralama Sayısını Bulma

Aşağıdaki problem durumunu inceleyerek verilen soruları cevaplayınız.

Türkiye'de araç plakaları üç bölümden oluşur: Birinci bölümde aracın trafiğe çıktığı ilin kodu, ikinci bölümde Ç, Ş, İ, Ö, Ü ve Ğ harfleri dışında alfabedeki harfler, üçüncü bölümde ise iki, üç veya dört basamaklı sayılar bulunmaktadır.

"Tuna, yeni aldığı aracın plakasındaki harf bölümünü kendi belirleyecektir. Bunun için isminde yer alan harfleri yalnızca bir kez kullanarak ikili gruplar oluşturuyor. Tuna'nın aracının plakası için kaç farklı ikili grup oluşturabileceğini bulunuz."

1. Yukarıdaki örnekte sayılacak nesneler nelerdir? Yazınız.

2. Nesneler arasındaki ilişkiyi yazınız.

3. Tuna, araç plakası için oluşturduğu ikili gruplardan bazılarını aşağıdaki tabloya yazmıştır. Tabloda verilen örneklerden yararlanarak boş bırakılan alanları uygun şekilde doldurunuz.

UT	TU	...	...	...	...
...	...	...	...	AN	...

4. Tuna aracının plakasını oluştururken oğlu Tan'ın ismindeki harfleri kullanırsa kaç ikili grup oluşturabilir? Oluşan ikili grupları yapacağınız bir tabloda gösteriniz.

5. Tuna ve Tan kelimelerinden ikili gruplar oluşturulurken hangi farklı çözüm stratejileri kullanabilir? Oluşturduğunuz stratejileri sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

6. Oluşturduğunuz çözüm stratejilerini kullanarak problemi çözünüz.

Plakadaki harf bölümü için Tuna ismindeki harfleri yalnızca bir kez kullanarak kaç farklı üçlü grup oluşturulabilir?

7. 6. maddede verilen problem durumunu tablo yöntemi ile çözüp seçtiğiniz çözüm stratejisinin doğruluğunu kontrol ediniz.

8. Sayma yönteminde çözüme ulaşabileceğiniz stratejilere yönelik çıkarımlar yapınız.

9. Sayma yönteminde çözüme ulaşabileceğiniz stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık bakımından değerlendiriniz.

8. Örnek

Aşağıda sadece apartman sakinlerinin kullanabileceği yan yan 4 araçlık bir otopark görseli verilmiştir. Apartmanda oturan 7 kişinin her birinin arabası farklı renktedir.

Her akşam 4 araç otoparka park ettiğine göre bu otoparktaki araçlar için kaç farklı renk sıralaması oluşacağını bulunuz.

Çözüm

Otoparkta birinci bölüme park edebilecek yedi farklı renkte araba vardır. Her bölüme bir araba park ettiğinde diğer bölüme park edebilecek araba sayısı bir azalacaktır. Bu nedenle

ikinci bölüme park edebilecek araba sayısı 6,

üçüncü bölüme park edebilecek araba sayısı 5,

dördüncü bölüme park edebilecek araba sayısı 4 olur.

Böylece 7 farklı renkte araç, 4 araçlık otoparka $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ farklı sıralamada park edebileceği için 840 farklı renk sıralaması oluşur.

5. Sıra Sizde

Arda, Beril, Cihan ve Dilek'ten oluşan takım TEKNOFEST (Havacılık, Uzay ve Teknoloji Festivali) yarışmasına katılmıştır. Yarışmada her takıma proje sunumları için bir masa ve masanın arkasında yan yana sıralanmış iki sandalye verilmiştir. Takım üyeleri kendilerine verilen iki sandalyeye oturarak sunumlarını gerçekleştireceklerdir. Takım danışmanı gün içinde hangi üyenin hangi saatte sunum yapacağını, hangi sandalyeye oturacağını belirlemek için üyeleri isimlerinin baş harflerini kullanarak kodlamış ve aşağıdaki tabloyu hazırlamıştır.

Saat	1. Sandalye	2. Sandalye	Saat	1. Sandalye	2. Sandalye
7.00 - 8.00	A	B	13.00 - 14.00	.....	.....
8.00 - 9.00	.....	.....	14.00 -15.00	.....	.....
9.00 - 10.00	.....	.....	15.00 - 16.00	C	D
10.00 - 11.00	.....	.....	16.00 - 17.00	.....	.....
11.00 - 12.00	B	A	17.00 - 18.00	.....	.....
12.00 - 13.00	.....	.....	18.00 - 19.00	.....	.....

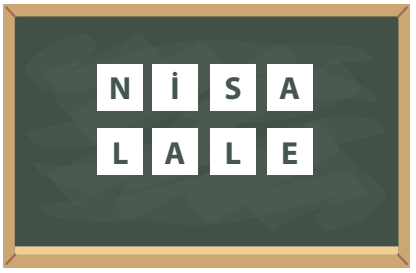
Buna göre

a) Yukarıdaki tabloda boş bırakılan yerleri verilen örneklerdeki gibi doldurunuz.

b) Takım danışmanı, sunum için hazırlanmış iki sandalyeye iki kişinin kaç farklı şekilde oturacağını hesaplarken takıma bir üye daha dâhil olmuş, üye sayısı 5'e yükselmiştir. 5 üyenin iki sandalyeye kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

6. Uygulama

İçinde Özdeş Nesnelerin Bulunduğu Topluluğun Sıralanması



Aysun Öğretmen sınıfta sıralama konusunu anlatırken bir uygulama yaptırmak istemiş ve sınıfı iki gruba ayırmıştır. Grupların birincisinden NİSA, ikincisinden LALE kelimesinin harflerini yer değiştirerek dörtlü gruplar oluşturmalarını ve bu grupları alt alta yazıp listelemelerini istemiştir.

1. NİSA ve LALE kelimelerindeki sayılabilen harfleri ve harfler arasındaki ilişkiyi yazınız.

2. NİSA ve LALE kelimelerinin harfleriyle türetilebilen farklı grupları ayrı iki tabloda yazarak görselleştiriniz.

3. NİSA ve LALE kelimelerinin harfleriyle türetilebilen grupların sayılarını karşılaştırınız. Bulduğunuz sonuçtan yola çıkarak sayma problemlerindeki farklı durumlara uygun çözüm stratejisi oluşturunuz.

4. Her iki kelimenin harflerinden türetilebilecek grupların sayısını, seçtiğiniz çözüm stratejisini kullanarak hesaplayınız.

5. BABA kelimesindeki harfleri kullanarak oluşturulan dörtlü grupları tablo yöntemi ve oluşturduğunuz çözüm stratejisi ile ayrı ayrı hesaplayarak sonuçları karşılaştırınız.

6. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz ve sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı özel ve cebirsel ifadelerle önerme olarak yazınız.

7. Sayma problemlerinde sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

n ve r birer sayma sayısı $r \le n$ olmak üzere sıralanması gereken n tane elemanın r tanesi özdeş ise bunların kendi arasında yer değiştirmesi farklı sıralama oluşturmayacaktır. Buna göre n farklı nesnenin sıralama sayısı n!, n nesnenin r tanesi özdeş ise sıralama sayısı $\frac{n!}{r!}$ farklı şekildedir.

9. Örnek

Melek aşağıda görseli verilen özdeş 4 adet çiçek desenli magnet ile özdeş 2 adet nazar boncuğu desenli magneti duvarda asılı bulunan 6 bölmeli yüzeye yapıştırmak istiyor. Kullandığı magnetleri yer değiştirerek her bölmeye biri gelecek şekilde farklı duvar süsleri tasarlıyor.

Melek'in tasarladığı duvar süslerinden birinin görseli aşağıda verilmiştir.

Buna göre

a) Melek'in kaç farklı duvar süsü tasarımı yapabileceğini bulunuz.

b) Duvar süsünün başında ve sonunda çiçek desenli magnet olacak şekilde Melek'in kaç farklı tasarım yapabileceğini bulunuz.

Çözüm

a) Melek'in kullandığı 6 nesne de farklı olsaydı bunların sıralaması 6! olurdu ancak özdeş nesnelerin kendi arasında yer değiştirmesi farklı sıralamalar oluşturmayacağından 6! tane sıralamanın bazıları aynı olur. Farklı sıralamaları bulmak için tüm sıralamaların sayısı aynı türlerin oluşturacağı sıralama sayısına bölünür.

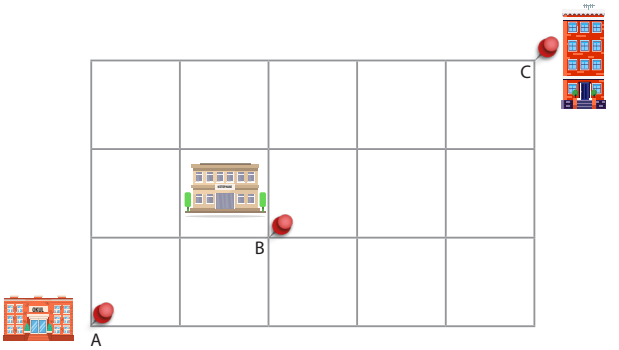
$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15$$ farklı duvar süsü tasarlanır.

b) Melek duvar süsünün başına ve sonuna çiçek desenli magnet koyarsa geriye sıralayacağı 2'si özdeş, çiçek desenli magnet ve 2'si özdeş, nazar boncuğu desenli magnet olmak üzere 4 magnet kalır. Bu magnetlerden

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 6$$ farklı duvar süsü tasarlanır.

10 . Örnek

Yukarıdaki şekilde bir mahallenin birbirini dik kesen sokaklarının krokisi verilmiştir. A noktasındaki okulunda bulunan Aslı, en kısa yoldan C noktasında bulunan evine gidecektir.



Buna göre

a) Aslı'nın evine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz.

b) Aslı evine giderken B noktasındaki kütüphaneye uğrayacaktır. Aslı'nın evine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz.

Çözüm

a) Aslı'nın en kısa yoldan evine ulaşabilmesi için sağa ve yukarıya doğru hareket etmesi gerekir. Aslı 5 birim sağa, 3 birim yukarı hareket ederse C noktasında bulunan evine ulaşabilir. Bir başka deyişle 8 yoldan geçerek evine en kısa sürede ulaşabilen Aslı bu yolların 5'ini sağ yönde, 3'ünü yukarı yönde seçmelidir. Sağa yöne gidişi (S), yukarı yönde gidişi (Y) ile simgelendiğinde Aslı'nın alacağı yol, SSSSSYYY ile simgelenir. Buna göre Aslı C noktasındaki evine $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2} = 56$ farklı şekilde gidebilir.

b) Aslı evine giderken B noktasında bulunan kütüphaneye uğrarsa önce Aslı ile kütüphane arasında kaç farklı yol olduğu hesaplanır. Aslı kütüphaneye 2 sağ, 1 yukarı yönde yol kullanarak gidebilir. Kısaca SSY yolunu alır. Bu yolların farklı sıralanışı $\frac{3!}{2!} = 3$ farklı şekilde olur. Kütüphaneden Aslı'nın evine 3'ü sağ yönde, 2'si yukarı yönde 5 yoldan gidilebilir. Buna göre kütüphane ve ev arasındaki yol SSSYY ile simgelenir. Bu yolların farklı sıralanışı $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 10$ farklı şekilde olur. Bu durumda Aslı evine kütüphaneye uğramak şartı ile $3 \cdot 10 = 30$ farklı şekilde gidebilir.

6. Sıra Sizde

Fatih ve arkadaşı Taha arasındaki konuşma aşağıdaki gibidir:

Fatih: Akşam oynanan Türkiye Millî Futbol Takımı'nın maçını izledin mi?

Taha: Evet, izledim.

Fatih: Maçın sonucu nedir?

Taha: Maçı 3-2 Türkiye Millî Futbol Takımı kazandı.

Fatih: Maçta ilk golü hangi takım attı ?

Taha: Maçtaki gollerin takımlara göre sıralamasını mı istiyorsun? Bence sen tahmin etmelisin.

Fatih'in atılan tüm gollerin takımlara göre sıralamasını doğru söyleyebilmesi için en az kaç tahmin yapması gerektiğini bulunuz.

SEÇME SAYISI

Belirli bir grup içerisinden kaç farklı seçim yapılabileceğini belirlemek özellikle karar verme süreçlerinde büyük önem taşır. Seyahat planlamasından etkinlik organizasyonlarına kadar birçok alanda en iyi ve en uygun seçenekleri belirlemeyi sağlar. Örneğin bir hastanedeki sağlık çalışanları için oluşturulacak nöbet listesinin belirlenmesi kişilerin seçimi ile mümkündür. Böylece kaç günlük bir nöbet listesi oluşturulabileceği hesaplanabilir.

7. Uygulama

n Tane Farklı Nesne Arasından r Tane Farklı Nesnenin Seçim Sayısının Belirlenmesi

1. Aşağıdaki problem durumlarını inceleyerek verilen soruları cevaplayınız.

Problem 1: Erkan telefonundaki uygulamayı kullanarak pizza siparişi vermek istemektedir. Yanda üç malzemeli pizza seçeneklerini inceleyen Erkan'ın telefonunun görseli verilmiştir. Buna göre Erkan'ın içerdiği malzeme bakımından alabileceği kaç farklı pizza seçeneği olduğunu belirleyiniz.

a) Yukarıda verilen problemdeki sayılacak olan nesneleri verilen görselden yola çıkarak belirleyiniz.

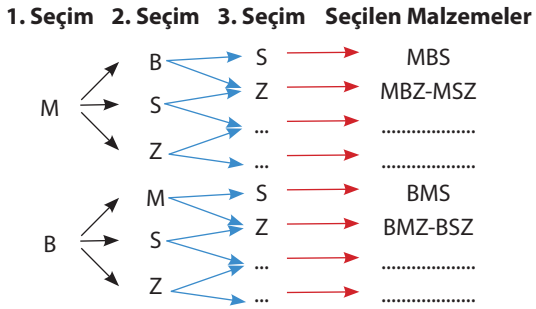
b) Sayılacak nesneler arasındaki ilişkileri belirleyiniz.

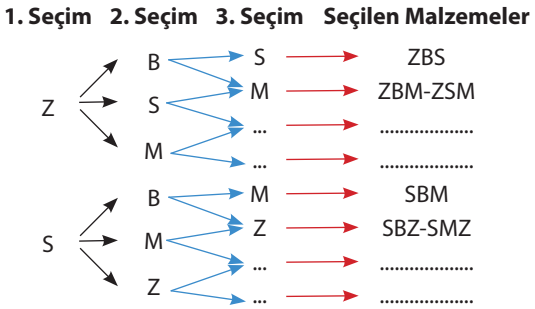
c) Erkan'ın alacağı pizza için seçebileceği malzemeleri listeleme yaparak belirleyiniz. Bunun için aşağıdaki tabloyu tüm durumları gösterecek şekilde örnekte verildiği gibi doldurunuz.

1. Seçim	2. Seçim	3. Seçim
Mantar	Zeytin	Biber

1. Seçim	2. Seçim	3. Seçim

ç) Mantar (M), Zeytin (Z), Biber (B), Sucuk (S) ile gösterilmek üzere seçilecek malzemelerin belirlenmesi işlemini aşağıdaki çizge yönteminden faydalanarak verilen örneklerdeki gibi yapınız.





Malzemelerinin seçilme sırasının oluşturulan pizzaya nasıl bir etkisi olduğunu tablo ve çizgede elde ettiğiniz bulgulara göre değerlendiriniz.

Elde ettiğiniz eşleşmelere göre her iki yöntemde de içerdiği malzeme bakımından kaç farklı pizza seçeneğinin bulunduğunu hesaplayınız.

Listeleme yapmak, diyagram oluşturmak gibi yöntemlerle sayma işlemleri zaman ve emek bakımından maliyetli işlemlerdir. Veri sayısı arttıkça bu yöntemlerin kullanışlılığı azalmaktadır. Bundan dolayı büyük veri kümelerinin sayılabilmesi için farklı yöntemlere ihtiyaç vardır.

d) Tüm malzemelerin üçlü sıralanış sayısı ile her 3 malzemenin kendi arasındaki sıralanış sayısını kullanarak pizza için kullanılacak malzemelerin kaç farklı şekilde seçilebileceğine dair çözüm stratejileri oluşturunuz.

e) Oluşturduğunuz çözüm stratejisini kullanarak kaç farklı seçim yapılabileceğini bulunuz. Bulduğunuz yöntemle elde ettiğiniz sonucu tablo ve çizge yoluyla elde ettiğiniz sonuçla karşılaştırınız.

f) Yapılan çözüme göre nesnelerin seçim sayısı ile sıralanma sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlar yapınız.

g) Sayma yönteminde çözüme ulaşabileceğiniz stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık bakımından değerlendiriniz.

Problem 2: Bir okulun masa tenisi takımında Ayşe, Banu, Ceyda ve Derya isimli öğrenciler bulunmaktadır. Beden eğitimi öğretmeni bir çiftler müsabakası için bu dört öğrenciden ikisini seçerek takım oluşturmak istemektedir. Öğretmenin kaç farklı takım oluşturabileceğini hesaplayınız.

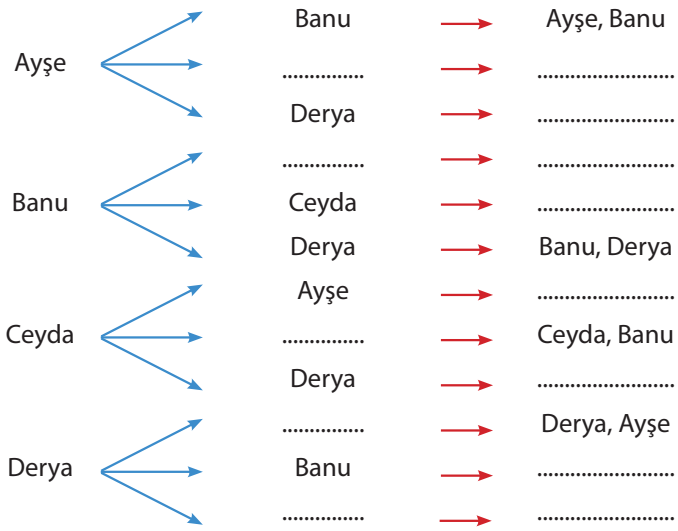
a) Yukarıda verilen problemdeki sayılacak olan nesneleri belirleyiniz.

b) Sayılacak nesneler arasındaki ilişkileri belirleyiniz.

c) Öğretmenin oluşturacağı takım için seçeceği öğrencileri listeleme yaparak belirleyiniz. Bunun için aşağıdaki tabloyu tüm durumları gösterecek şekilde örnekte verildiği gibi doldurunuz.

1. Seçim	Ayşe											
2. Seçim	Banu											

ç) Seçilecek öğrencilerin belirlenmesi işlemini aşağıda çizge yöntemi ile gösterilen görselden faydalanarak yapınız.



Öğrencilerin seçilme sırasının oluşturulan takıma nasıl bir etkisi olduğunu tablo ve çizgede elde ettiğiniz bulgulara göre değerlendiriniz.
Elde ettiğiniz eşleşmelere göre her iki yöntemde de kaç farklı takım oluşturma seçeneğinin bulunduğunu hesaplayınız.

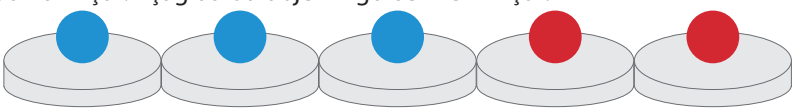
d) Tüm öğrencilerin ikili sıralanış sayısı ile her 2 öğrencinin kendi arasındaki sıralanış sayısını kullanarak oluşturulacak farklı takımlar için öğrencilerin kaç farklı şekilde seçilebileceğine dair çözüm stratejileri oluşturunuz.

e) Oluşturduğunuz çözüm stratejisini kullanarak kaç farklı seçim yapılabileceğini bulunuz. Bulduğunuz yöntemle elde ettiğiniz sonucu, tablo ve çizge yoluyla elde ettiğiniz sonuçla karşılaştırınız.

f) Yapılan çözüme göre nesnelerin seçim sayısı ile sıralanma sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlar yapınız.

g) Sayma yönteminde çözüme ulaşabileceğiniz stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık bakımından değerlendiriniz.

Problem 3: Elif özdeş 3 mavi ve özdeş 2 kırmızı bilye ile bilyelerin yerleştirildiği bir stanttan oluşan dekoratif bir obje satın almıştır. Aşağıda bu objenin görseli verilmiştir.



Elif bilyeleri standa rastgele yerleştirerek birbirinden farklı görseller oluşturuyor. Buna göre Elif'in kaç farklı görsel oluşturabileceğini hesaplayınız.

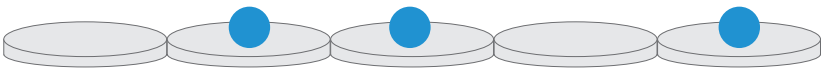
a) Yukarıda verilen problemdeki sayılacak olan nesneleri belirleyiniz.

b) Sayılacak nesneler arasındaki ilişkileri belirleyiniz.

c) Bilyelerin renklere göre stantta oluşturacağı görselleri belirlemek için aşağıda verilen tabloyu tüm durumları gösterecek şekilde örnekte verildiği gibi doldurunuz.

Stant Sırası	1. Sıra	2. Sıra	3. Sıra	4. Sıra	5. Sıra
Oluşan Görseller	●	●	●	●	●

ç) Standın 5 bölmesinden üçüne mavi, ikisine kırmızı bilyeler konulacaktır. Aşağıda mavi bilyelerin konulacağı 3 bölme için örnek bir durum gösterilmiştir. Mavi bilyelerin bu üç bölmeye hangi sırayla konulduğunu gösteren aşağıdaki tabloyu tüm durumları içerecek şekilde örnekteki gibi doldurunuz.



Mavi bilyelerin standa yerleştirilme sırası					
		1.	2.		3.
		1.	3.		2.

Bilyelerin standa konulma sırasının oluşan görünüme nasıl bir etkisi olduğunu tablodan elde ettiğiniz bulgulara göre değerlendiriniz. Sadece mavilerin ya da sadece kırmızıların konulacağı yerleri belirlemek, istenenin hesaplanması için yeterli midir? Açıklayınız.

d) Sayma stratejileri kullanarak mavi bilyelerin standın 5 bölmesinden üçüne konulma sayısı ile mavi bilyelerin kendi arasındaki sıralanış sayısını kullanarak oluşturulacak farklı görseller için çözüm stratejileri oluşturunuz. Sadece mavi bilyelerin oluşturduğu farklı görsel sayısından faydalanarak tüm bilyelerin oluşturacağı farklı görsel sayısına nasıl ulaşabilir? Açıklayınız.

e) Oluşturduğunuz çözüm stratejisini kullanarak kaç farklı görsel oluşturulabileceğini bulunuz. Bulduğunuz yöntemle elde ettiğiniz sonucu, tablo yoluyla elde ettiğiniz sonuçla karşılaştırınız. Problemi önce kırmızıların yerleştirilmesi şeklinde ele alarak benzer şekilde tekrar çözünüz ve sonuçları karşılaştırınız.

f) Problemi özdeş nesnelerin sıralanması olarak düşünerek çözünüz ve elde ettiğiniz önceki sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz.

g) Yapılan çözüme göre nesnelerin seçim sayısı ve sıralanma sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair sizi çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlar yapınız.

h) Sayma yönteminde çözüme ulaşabileceğiniz stratejilere yönelik çıkarımlarınızı kullanışlılık bakımından değerlendiriniz.

2. Verilen problem durumlarında seçim sayısının elde edilebilmesi için ortak olarak aşağıda verilen çözüm stratejileri kullanılmıştır.

- Problemde verilen elemanların istenen seçim sayısına göre sıralanma sayıları bulunur.
- Yapılan sıralamalarda aynı elemanları içeren kaç farklı sıralama yapılabileceği hesaplanır.
- Aynı elemanlardan oluşan sıralamaların aynı seçimi temsil ettiği belirlenir.
- Tüm elemanların sıralanma sayıları ile aynı elemanları içeren sıralanma sayıları karşılaştırılır.

Buna göre n tane farklı nesne içerisinden r tane farklı nesnenin seçim sayısının belirlenmesi için nasıl bir yol izleneceğini açıklayınız ve cebirsel olarak ifade ediniz.

n ve r birer sayma sayısı $r \leq n$ olmak üzere n tane farklı nesne arasından r tane farklı nesnenin seçim sayısı $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

11 . Örnek

Hilesiz 6 madenî para rastgele atıldığında ikisinin tura, dördünün yazı gelebileceği kaç farklı durum oluşacağını bulunuz.

Çözüm

Paralar P1, P2, P3, P4, P5 ve P6 olarak isimlendirilsin. Bu durumda istenen durumlardan birisi aşağıdaki tabloda verildiği gibi olur.

P1	P2	P3	P4	P5	P6
T	T	Y	Y	Y	Y

Yazı : Y
Tura: T

Problemin çözümü için tablonun ikinci satırından seçilen herhangi iki hücrenin T olması gerekir. Buna göre 6 hücreden 2 hücrenin kaç farklı şekilde seçilmesi gerektiği hesaplanır.

6 para için kaç farklı 2'li sıralama olduğu hesaplanırsa $6 \cdot 5 = 30$ bulunur.

Belirlenen her 2 para için kaç sıralama olduğu hesaplanırsa $2 \cdot 1 = 2$ bulunur.

Tüm paraların ikili sıralama sayısı, her seçimin sıralama sayısına bölünerek yapılabilecek seçim sayısı bulunur. O hâlde tüm seçimlerin sayısı $\frac{30}{2} = 15$ 'tir.

Bu problem 2 tane T ve 4 tane Y harfinin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceği şeklinde de düşünülebilir. Bu durumda problem özdeş nesnelerin sıralanması problemine dönüşeceğinden istenen durumların sayısı $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ bulunur.

12 . Örnek

Yandaki haritada bir üniversitenin yerleşkesinde bulunan 5 farklı fakülte binasının konumları, herhangi üçü doğrusal olmayan A, B, C, D ve E noktaları ile gösterilmiştir. Üniversite yönetimi her bir fakülteden diğer dört fakülteye giden doğrusal yollar yapma kararı almıştır.

Buna göre kaç farklı yol yapılacağını bulunuz.

Çözüm

A, B, C, D ve E noktalarından herhangi ikisini birleştiren doğrusal bir tek yol vardır. Buna göre verilen 5 noktadan farklı 2 noktanın seçim sayısı kadar yol yapılabilecektir. A, B, C, D ve E noktaları 2'li sıralanırsa $5 \cdot 4 = 20$ tane sıralama elde edilir ancak aynı harfle yapılan sıralamalar (AB ve BA gibi) aynı yolu göstereceğinden yapılacak toplam yol sayısını bulmak için toplam sıralama sayısı her bir durumun sıralama sayısına bölünürse $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ bulunur.

13 . Örnek

5 kız ve 4 erkek öğrenci arasından 5 kişilik bir ekip oluşturulacaktır.

Ekipte 3 kız ve 2 erkek olmak koşuluyla bu ekibin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

Çözüm

Kızların 3'lü sıralanışlarının sayısı $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 'tır ancak kızların kendi arasındaki sıralamaları farklı bir ekip oluşturmayacaktır. Bu nedenle kızların seçim sayısını hesaplamak için toplam sıralama sayısı her üç kızın sıralanma sayısı olan $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 'ya bölünür ve sonuç $\frac{60}{6} = 10$ bulunur. Benzer şekilde erkeklerin 2'li sıralanışlarının sayısı $4 \cdot 3 = 12$ olur. Erkeklerin kendi arasındaki sıralamaları farklı ekip oluşturmayacağından erkeklerin seçim sayısını hesaplamak için toplam sıralama sayısı her iki erkeğin sıralanma sayısı olan $2 \cdot 1 = 2$ 'ye bölünür ve sonuç $\frac{12}{2} = 6$ bulunur. Bu durumda 3 kız ve 2 erkekten oluşturulabilecek ekip sayısı çarpma yoluyla sayma prensibine göre $10 \cdot 6 = 60$ bulunur.

7. Sıra Sizde

Aralarında Yavuz, Ayten ve Serkan'ın da bulunduğu 5 çocuk düz bir sırada yan yana durarak fotoğraf çektirmek istiyorlar.

Yavuz, Ayten'in sol tarafında Serkan ise sağ tarafında bulunmak şartıyla 5 çocuğun kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

PASCAL ÜÇGENİ

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n eleman eleman arasından 0, 1, 2, …, n tane elemanın kaç farklı şekilde seçilebileceğinin ayrı ayrı hesaplanmasıyla elde edilen sonuçların listelenerek üçgen şeklinde bir modelleme yapılması mümkündür. Bu yapı sayesinde karmaşık hesaplamaların basitleştirilmesi sağlanır.

8. Uygulama

Belirli Sayıda Nesneden Farklı Sayılarda Nesne Seçimi

Aşağıda verilenleri inceleyerek soruları cevaplayınız.

Bir grup ressam, sergi salonunda gezerek resimleri incelemektedir. Salondaki resimlerin arasında ünlü Türk ressam Osman Hamdi Bey tarafından çizilmiş *"Kaplumbağa Terbiyecisi"* isimli tablo da bulunmaktadır.

1. Gruptaki kişi sayısına göre *"Kaplumbağa Terbiyecisi"* adlı tablonun incelenme sayısı ile ilgili oluşturulan aşağıdaki tabloda verilen örneği dikkate alarak boş alanları doldurunuz.

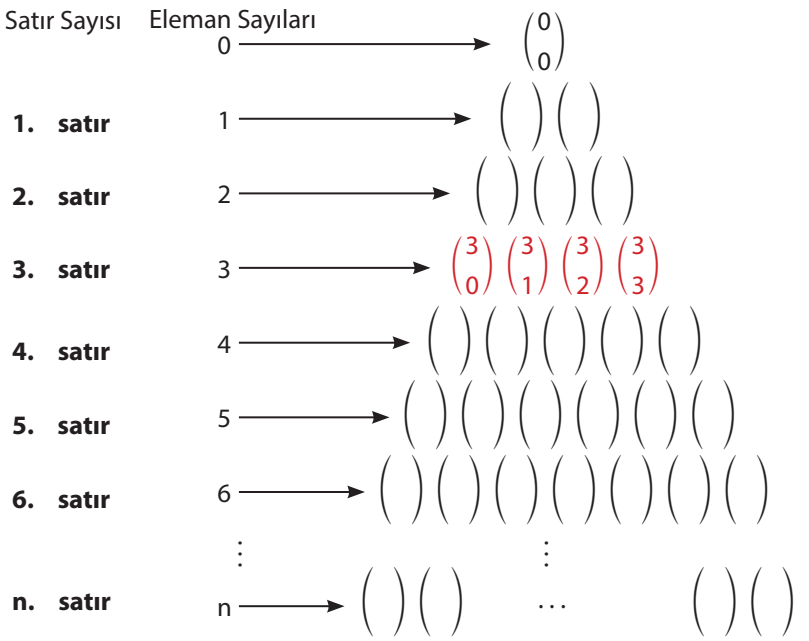
Gruptaki Kişi Sayısı	1	2	3	4	…	n
***"Kaplumbağa Terbiyecisi"* Adlı Tablonun Olası İncelenme Sayıları**	0 - 1				…	

- *Kaplumbağa Terbiyecisi* adlı tablonun olabilecek incelenme sayısı ile sergiyi gezen gruptaki ressam sayısı arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

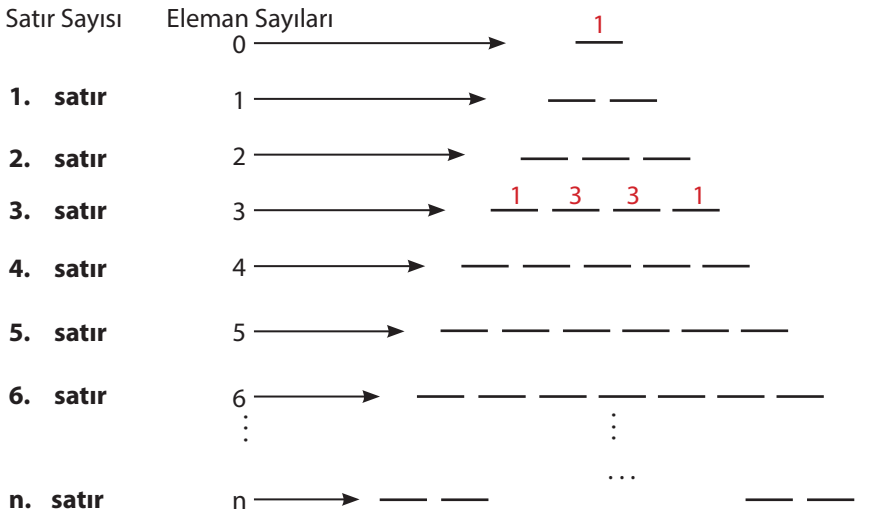
Sergiyi gezen ressamlar arasından *Kaplumbağa Terbiyecisi* adlı tabloyu inceleyenlerin sayısını, cebirsel temsillerini ve cebirsel temsillerden elde edilen sonuçları tablodaki uygun boşluklara yazınız.

Sergiyi Gezen Ressam Sayısı	***Kaplumbağa Terbiyecisi* Adlı Tabloyu İncelemiş Olası Kişi Sayıları**	**Cebirsel Temsilleri**	**Elde Edilen Sonuçlar**
0	0	$\binom{0}{0}$	1
1			
2			
3	0, 1, 2, 3	$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$	1, 3, 3, 1
4			
5			
6			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

2. Tabloya yazdığınız cebirsel temsiller ile oluşturulan aşağıdaki modelin boş kısımlarını doldurunuz.



3. Aşağıda verilen modelde boş bırakılan yerlere cebirsel temsillerden elde edilen sonuçları yazınız.



4. Üçgen şeklindeki bu model, genellikle "Pascal (Paskal) üçgeni" olarak bilinir. Pascal üçgeninin ardışık iki satırında yazılan sayılar arasındaki ilişkiyi belirleyiniz. Bulduğunuz ilişkiyi sözel olarak ve cebirsel temsille ifade ediniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek ödevinizi tamamlayınız.

- Pascal üçgeni olarak bilinen Fransız düşünür ve matematikçi Blaise (Bileyz) Pascal'a atfedilen üçgen şeklinde sıralanmış sayılardan oluşan modelin Pascal'dan önce başka matematikçiler tarafından da kullanıldığını ve farklı gösterimlerini dijital ortamda güvenilir kaynaklardan araştırınız.
- Ömer Hayyam'ın çalışmalarını araştırınız.
- Türk-İslam kültüründe yetişen matematikçileri ve bu matematikçilerin çalışmalarını araştırınız.
- Yapılan araştırma sonucu elde ettiğiniz bilgileri arkadaşlarınız ile tartışınız.
- Araştırma sonuçlarınızı arkadaşlarınızın araştırma sonuçları ile karşılaştırarak çıkarımda bulununuz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayınız.
- Araştırma ödevini 2 hafta içinde ve eksiksiz olarak tamamlayıp öğretmeninize teslim ediniz.
- Araştırma ödeviniz Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

9. Uygulama

Güvercin Yuvası İlkesi

Aşağıda verilen problem durumunu inceleyerek soruları cevaplandırınız.

1. Dışarıyla bağlantısı olmayan bir kuş araştırmaları merkezinde 4 güvercin yuvası ve 5 güvercin vardır. Yuva kullanmayan herhangi bir güvercin olmadığına göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bir yuvayı kullanan güvercin sayısının kaç olabileceğini belirleyiniz.

b) Güvercin yuvaları ile güvercinler arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

c) Güvercinlerin yuvalara göre sayı dağılımını gösteren görsel temsilleri çiziniz.

ç) Aşağıdaki tabloda araştırma merkezindeki farklı bölümlere ait güvercin yuvası ve güvercin sayıları verilmiştir. Tablodaki her bölüm için, en az bir yuvada kesin olarak bulunan en az güvercin sayısını belirten sütunu, verilen örneklere uygun şekilde doldurunuz.

Toplam Güvercin Yuvası Sayısı	Toplam Güvercin Sayısı	En Az Bir Yuvada Kesin Olarak Bulunan En Az Güvercin Sayısı
2	3	2
3	4	
4	5	
5	6	
6	8	
7	10	2
8	15	

d) Yuva sayısının tam katlarından daha fazla sayıda güvercin bulunması durumuna göre çözüm stratejisi oluşturunuz. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan en az bir yuvada kesin olarak bulunan en az güvercin sayısını belirten sütunu, verilen örneklere uygun şekilde doldurunuz.

Toplam Güvercin Yuvası Sayısı	Toplam Güvercin Sayısı	En Az Bir Yuvada Kesin Olarak Bulunan En Az Güvercin Sayısı
2	5	3
3	8	
4	10	
5	17	
6	27	5
7	50	
8	100	

2. Çözüm stratejinizi gözden geçirerek bu tür sayma problemlerinde çözüme ulaştıran stratejilere yönelik çıkarımlarınızı yazınız.

3. Oluşturduğunuz çözüm stratejisi yardımıyla aşağıda verilen problemi çözerek çıkarımlarınızın doğruluğunu kontrol ediniz.

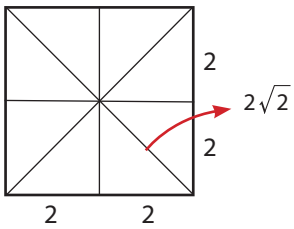
Bir gruptaki insan sayısı bilindiğinde, en az kaç kişinin aynı gün doğduğu belirlenebilir. Aşağıda, farklı gruplardaki insan sayıları ve en az kaç kişinin aynı gün doğduğu ile ilgili bir tablo verilmiştir. Tablodaki boş alanları örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Gruptaki İnsan Sayısı	Aynı Gün Doğmuş En Az İnsan Sayısı
400	2
750	
1500	
3000	

14 . Örnek

Bir kenar uzunluğu 4 birim olan bir karenin iç bölgesinden alınan beş noktadan aralarındaki uzaklık kesinlikle 3 birimden küçük olan iki nokta bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm



Kenar uzunluğu 4 birim olan kare dört eş kareye ayrılmalıdır. Oluşturulan eş dört kareden ez az birisi beş noktadan en az ikisini bulundurmak zorundadır. Oluşturulan karelerin köşegen uzunluğu $2\sqrt{2}$ birimdir. $2\sqrt{2} < 3$ olduğundan aynı kare içinde olan iki nokta arasındaki uzaklık 3 birimden küçük olur.

8. Sıra Sizde

"Düzenlenen bir toplantıya 28 kişi katılmıştır. Toplantıya katılanlar arasında <u>en az</u> kaç kişinin aynı ayda doğduğunu belirleyiniz." şeklinde verilen problem durumunu inceleyerek soruları cevaplandırınız.

a) Verilen sayma problemindeki sayılacak nesneleri belirleyiniz.

b) Verilen sayma probleminde yer alan nesneler arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

c) Verilen problem durumunun görsel temsilini oluşturunuz.

ç) Oluşturacağınız çözüm stratejisini kullanarak problemi çözünüz.

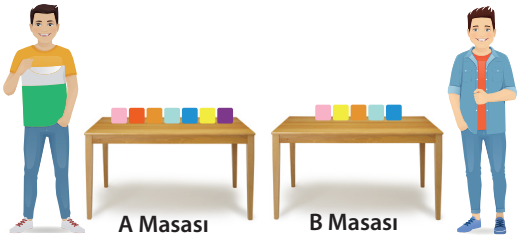
Kontrol Noktası

n ve r birer sayma sayısı r ≤ n olmak üzere

- n farklı nesne düz bir sıraya n! şekilde sıralanabilir.
- Sıralanan n tane elemanın r tanesi özdeş ise bunların kendi arasında yer değiştirmesi farklı bir sıralama oluşturmaz. Buna göre n farklı nesnenin sıralama sayısı n! , n nesnenin r tanesi özdeş ise $\frac{n!}{r!}$ kadar farklı sıralama yapılır.
- n tane farklı nesne içerisinden r tane farklı nesnenin seçimi için önce n tane nesnenin r li sıralanışlarının sayısı bulunur. Bulunan değer r tane nesnenin farklı sıralanışlarının sayısına bölünür.
- Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık iki sayının toplamı bir sonraki satırda bu iki sayının ortasında bulunan sayıya eşittir. Başka bir deyişle n satır sırası, r satırdaki sıra olmak üzere $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ eşitliği vardır.
- Güvercin Yuvası İlkesi (Çekmece Prensibi): Eğer n tane güvercin m tane yuvaya yerleştiriliyorsa ve güvercin sayısı (n) yuva sayısından (m) fazlaysa, en az bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorundadır.

Alıştırmalar

1. Bir matematik öğretmeni sınıfta sıralama konusunu öğretmek için bir oyun tasarlıyor. Oyunda aynı büyüklükte farklı renkte 7 küpü A masasına, 5 küpü de B masasına koyuyor. Eren ile Efe adında iki öğrenciyi oyunu oynamaları için seçiyor. Öğretmen öğrencilerinden bir masa seçmelerini ve masadaki küpleri her seferinde aynı sayıda küpü yan yana gelecek şekilde sıralamalarını istiyor. Her farklı sıralanışın karşılığı olarak oyuncunun 1 puan alacağını, en fazla puanı alan oyuncunun oyunu kazanacağını söylüyor.



Oyunda Eren A masasını seçip her defasında farklı iki küpü yan yana getirirken Efe B masasını seçerek her defasında farklı üç küpü yan yana getirerek farklı sıralamalar elde ediyor.

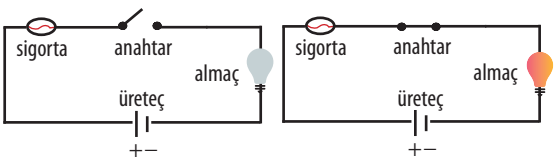
Buna göre Efe ve Eren'in aldıkları puanı hesaplayarak yarışmayı kimin kazandığını bulunuz.

2. Başkan ve başkan yardımcılarının seçileceği bir komisyondaki kişilerden

- 2'si sadece başkanlığa,
- 3'ü sadece başkan yardımcılığına,
- 4'ü hem başkanlığa hem de başkan yardımcılığına aday olmuştur.

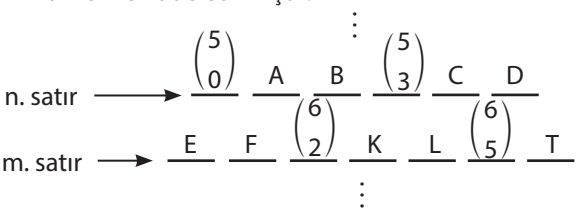
Buna göre bu adaylar içerisinden biri başkan, ikisi başkan yardımcısı olmak üzere toplam 3 kişinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

3. Bir elektrik devresindeki anahtar açık duruma getirilirse devre akımı kesilir. Bu durumda akım almaçtan geçmez, dolayısıyla almaç çalışmaz. Buna açık devre denir ve matematikte 0 ile simgelenir. Elektrik devresini kumanda eden anahtar kapalı duruma getirilirse devreden akım geçer ve almaç çalışır. Kapalı devre olarak adlandırılan bu sistem matematikte 1 ile simgelenir. 5 kapalı, 3 açık anahtarın bulunduğu elektrik devresini gösteren 0 ve 1 rakamlarından oluşan 8 basamaklı sayı bir kâğıda yazılıyor.



Bu sayının rakamlarının yerleri değiştirilerek 8 basamaklı kaç farklı sayı elde edilebilir?

4. Aşağıda Pascal üçgeni olarak adlandırılan modelin n. ve m. ardışık iki satır elemanlarının bazıları cebirsel temsilleriyle diğer elemanları ise harfler ile ifade edilmiştir.



Buna göre

a) n + m değerini bulunuz.

b) A, D ve L ifadelerinin cebirsel temsillerini yazınız.

c) B + K + T değerini bulunuz.

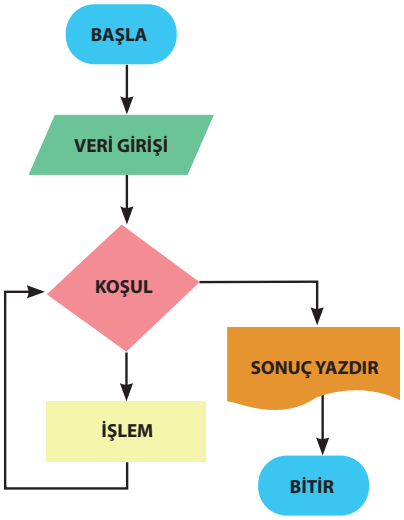
5. Tema alıştırma ek soruları

5.2. CEBİRSEL VE FONKSİYONEL İŞLEMLERİN ALGORİTMİK YAPISI

Konuya Başlarken

Algoritmik yapı, karmaşık problem durumlarında çözüm adımlarının belirli bir sıraya göre düzenlenmesini sağlar. Böylelikle her adım bir sonraki adıma geçmeden önce doğru bir şekilde tamamlanır. Algoritmik düşünce ile farklı problem durumlarına uygulanabilecek genel çözüm yolları oluşturulabilir. Böylece aynı türden problemlere tekrar tekrar çözüm üretmek yerine sistematik olarak bir çözüm algoritması geliştirilir. Geliştirilen algoritma ile problemin çözüm süreci hızlanır ve daha verimli hâle gelir.

Algoritmik yapının uygulama süreçlerini daha ayrıntılı kavrayabilmek ve bu yapının problem çözme süreçlerinde nasıl etkin bir rol oynadığını daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki soruları cevaplayınız.



Görsel 5.1: *Akış Şeması*

1. **Doğrusal bir fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulmak için yapılması gereken işlem adımlarını yazınız.**

2. **Birden çok sayıda doğrusal fonksiyonun eksenleri kestiği noktaların bulunması istenseydi bunun için nasıl bir yol izlenebilirdi? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**

Karmaşık cebirsel ifadelerin veya fonksiyonların çözümünde klasik çözümleme zor ve zaman alıcı olabilir ancak algoritmalar bu işlemleri kısa sürede, sistematik ve hatasız bir şekilde gerçekleştirebilir.

10. Uygulama

Mantık Bağlaçlarının Algoritmadaki Anlamları ve İşlevleri

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Okullar, öğrencilerin örnek davranışlarını ve başarılarını niteliklerine göre ödüllendirmek amacıyla her ders dönemi sonunda öğrencilere teşekkür veya takdir belgesi verir. Öğrencilerin belge alıp almaması veya hangi belge türünü alabileceği çeşitli koşullara bağlanmıştır. Ödüllendirmeler için belirlenen koşullar şu şekildedir:

- Tüm derslerden başarılı olması,
- Derslerin dönem puanlarının ağırlıklı ortalaması 70,00'ten aşağı olmaması,
- Davranış puanının 100 olması,
- Özürsüz devamsızlık gün sayısının en fazla 5 olmasıdır.

Bu koşulların uygunluğu hâlinde derslerin dönem puanlarının ağırlıklı ortalaması 70,00 - 84,99 arasında ise teşekkür belgesi, 85,00 ve daha yukarı olanlar takdir belgesi ile ödüllendirilir.

1. Tablo 1'de bir sınıftaki öğrencilerin derslerine ait dönem puanlarının ağırlıklı ortalaması, başarısız olunan ders sayısı, davranış puanı, özürsüz yapılan devamsızlık gün sayısı hakkında bilgiler yer almaktadır. Tabloda verilen bilgilere göre belge alıp almama durumunu veya belge alındıysa belgenin türünü örnekte gösterildiği gibi ✓ sembolü kullanarak belirtiniz.

Tablo 1

Öğrenci İsimleri	Derslerin Dönem Puanlarının Ağırlıklı Ortalaması	Başarısız Olunan Ders Sayısı	Davranış Puanı	Özürsüz Devamsızlık Yapılan Gün Sayısı	Başarı Belgesi Durumu		
					Belge Alamaz	Teşekkür Belgesi	Takdir Belgesi
Betül	90	0	100	3			✓
Ömer	68	0	90	2			
Hatice	71	0	100	5,5			
Serkan	75	0	100	0			
Handan	86	0	100	6			
Bekir	78	0	90	2			
Meryem	82	0	100	3			
Serdar	88	0	100	0			
Ümran	86	0	100	2			
Volkan	72	0	100	4			

2. Algoritmik yapıyı ortaya koymak için Tablo 2'de boş bırakılan alanları koşul içeren sözel ifadelere karşılık gelen mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri kullanarak örnekte verildiği gibi uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

Koşulun Sözel İfadesi	Koşulun Mantık Bağlacıyla İfadesi
Derslerin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması 85'ten büyük olanlar ve özürsüz devamsızlık gün sayısı 5'ten küçük olanlar	(Derslerin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması $>$ 85) $\wedge$ (Özürsüz devamsızlık günleri sayısı $<$ 5)
Derslerin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması 70'ten küçük veya özürsüz devamsızlık gün sayısı 5'ten büyük olanlar	
Derslerin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması 70'ten küçük olanlar ya da özürsüz devamsızlık gün sayısı 5'ten büyük olanlar	
Belge alamayan ve davranış notu 100'den küçük olanlar	
Derslerin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması 70 ile 84.99 arasında ise teşekkür belgesi alır.	
Sınıftaki bazı öğrencilerin derslerinin dönem puanlarının ağırlıklı ortalaması 70'in üzerindedir.	
Bazı öğrencilerin derslerinin dönem sonu ağırlıklı not ortalaması 85'ten büyük ve özürsüz devamsız gün sayısı 5'ten büyüktür.	

3. Takdir belgesi almaya hak kazanan öğrencileri bulan algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dille ifade ederek bir bütün oluşturunuz.

Algoritmik Doğal Dil

4. Klavyeden ismi girilen bir öğrencinin başarısız dersinin olup olmadığını ekrana yazdıran algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dille ifade ederek bir bütün oluşturunuz.

Algoritmik Doğal Dil

"İse" bağlacı koşulun karşılanması durumunda belirtilen bir işlemin gerçekleştirilmesini sağlar.

5. Okul yönetimi, takdir belgesi almaya hak kazanan öğrencilerden devamsızlık yapmamış olanları okul gezisine ücretsiz götürme kararı almıştır.

a) Algoritmik yapıyı ortaya koymak için okul gezisine ücretsiz katılmaya hak kazanan öğrencileri belirleyen koşulu, mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile ifade ediniz.

b) Okul gezisine ücretsiz katılmaya hak kazanan öğrencileri veren koşulu, algoritmik doğal dille ifade ederek bir bütün oluşturunuz..

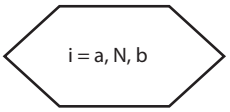
c) Bu incelediğiniz örnekten yola çıkarak algoritmada bulunan koşulun algoritmanın işleyişindeki rolünü açıklayınız.

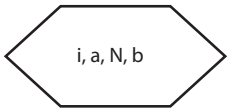
"Ancak ve ancak" bağlacı, iki koşulun aynı anda doğru ya da aynı anda yanlış olduğu durumda doğru sonucu verir.

Sembol	Anlamı
	Döngü, istenen koşullarda tekrar eden (yinelenen) işlemler için kullanılan yapıdır.

Akış şemasında döngü oluşturulurken döngü değişkeni, başlangıç değeri ile bitiş değeri ve artış-azalış değerleri verilir. Başlangıç değeri, bitiş değerinden küçük ise artan döngü; başlangıç değeri bitiş değerinden büyük ise azalan döngü oluşur.

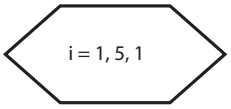
Aşağıdaki akış şemasında aynı döngüyü oluşturmak için yazılan iki farklı ifadenin anlamları verilmiştir.



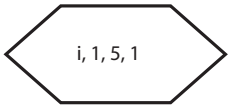


i: Döngü değişkeni
a: Döngü başlangıç değeri
N: Döngü bitiş değeri
b: Döngü artış-azalış değeri

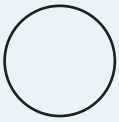
Örneğin artış değeri 1 olan bir işlem 5 kez tekrar ettirilmek istendiğinde oluşturulacak sembol



veya

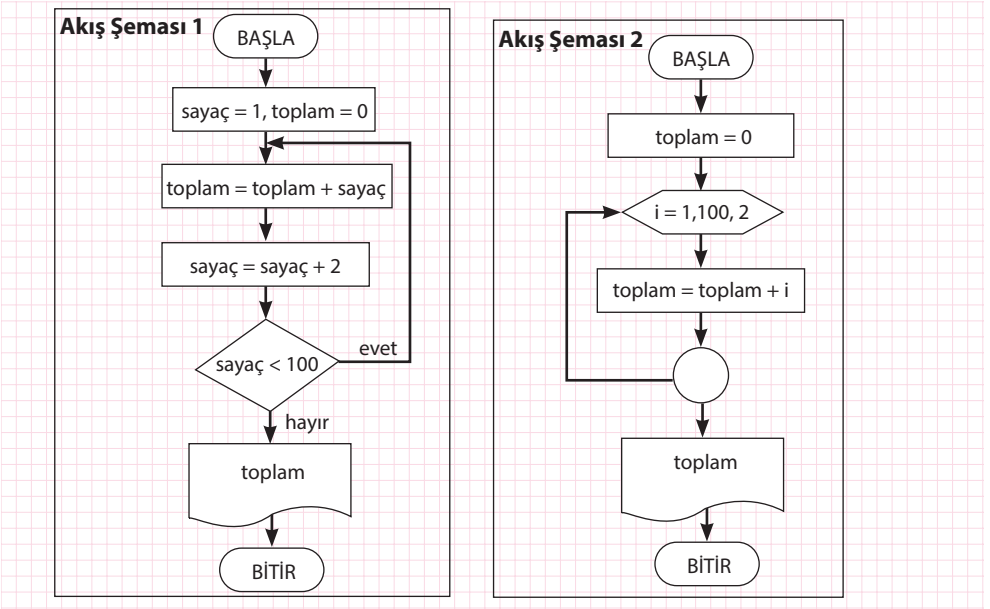


şeklindedir.

Sembol	Anlamı
	Birleştirici noktaları veya bağlantı noktalarını temsil eder. Farklı işlem akışlarını birleştirmek veya akış sayfaları arasında bağlantı kurmak amacıyla kullanılan yapıdır.

15 . Örnek

1 ile 100 arasındaki tek sayıların toplamını bulup yazdıran algoritmanın işleyişi, iki farklı akış şeması ile aşağıda verilmiştir.



Buna göre

a) Akış şemaları arasındaki farkı açıklayınız.

b) Akış şemalarında 1'den 100'e kadar olan tek sayıların toplamı nasıl belirlenmiştir? Açıklayınız.

Çözüm

a) Akış Şeması 1'de döngü, koşul sembolü ile Akış Şeması 2'de ise döngü, döngü sembolü ile sağlanmıştır.

b) Akış Şeması 1'de başlangıçta toplam 0, sayaç 1 kabul edilmiş; sayaç 2 artım ile artırılmış koşulda sayacın 100'den küçük olması istenmiş ve her artımda toplam sayaç kadar artırılmıştır. Akış Şeması 2'de başlangıçta toplam 0 kabul edilmiş, döngü değişkeni olarak i seçilip, döngünün 1'den başlayarak 100'e kadar 2 artım değeri ile i'nin artırılması sağlanmış ve her artımda toplama i eklenmiştir.

Buradan anlaşılacağı üzere bir algoritmanın işleyişi bir veya daha fazla akış şemasıyla ifade edilebilir.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

11. Uygulama

Birden Çok Farklı Durum veya Döngü İçeren Algoritmik Yapılar

Verilen problem durumunu inceleyerek soruları cevaplayınız.

Bir fabrikada üretilen ürünler kalite kontrolünden geçirildikten sonra sevkiyat bölümüne gönderilmektedir. Sevkiyat bölümü, ürünleri aşağıdaki kurallara göre kabul etmekte veya reddetmektedir.

- Bazı ürünlerin gerilme dayanıklılık testi puanı 70 veya üzeri olmalıdır.
- Tüm ürünler su geçirgenliği testinden başarılı olmalıdır.
- Ürünün hatalı parça oranı %5'ten küçük olmalıdır.
- Ürün etiketinde seri numarası "tgüç452" yazmalıdır.

Bu kurallar sistem tarafından otomatik olarak kontrol edildikten sonra ürün sevkiyat bölümüne kabul edilir veya reddedilir.

Ürünlerin sevkiyat bölümü tarafından kabul edilip edilmeme durumunun kararını veren algoritmanın işleyişi ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Algoritmanın nasıl oluşturulabileceği ve nelere dikkat edilmesi gerektiği konusundaki fikirlerinizi yazınız ve sınıf arkadaşlarınız ile paylaşınız.

2. Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dille ifade ediniz.

3. Algoritmanın işleyişinin algoritmik doğal dille ifadesinde mantık bağlaçlarının ve niceleyicilerin rollerini açıklayınız.

9. Sıra Sizde

Aşağıda 1'den 10'a kadar olan tam sayıların toplamını bulan algoritmanın işleyişi algoritmik doğal dille ifade edilmiştir.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla
2. adım: Girdilerin alınması
Toplam = 0, sayaç = 1 olarak tanımla'
3. adım: Toplamın hesaplanması
Toplam = Toplam + sayaç
sayaç = sayaç + 1
4. adım: Kontrolün yapılması
Eğer sayaç < 10 ise 3. adıma git
değilse döngüyü sonlandır
5. adım: Sonucun yazdırılması
Yazdır "Toplam"
6. adım: Bitiriniz.

Buna göre 1'den 10'a kadar olan tam sayıların toplamını bulan algoritmanın işleyişi ile ilgili akış şemasını Akış Şeması 1'de koşul kullanarak, Akış Şeması 2'de döngü kullanarak ayrı ayrı ifade ediniz.

Akış Şeması 1

Akış Şeması 2

16 . Örnek

Bilgi: Bir fonksiyonun sıfırının iki değer arasında kaldığı bilindiğinde bu iki değerin ortalaması alınıp fonksiyonun sıfırına adım adım yaklaşılarak fonksiyonun sıfırının bulunması yöntemine "ortalama alarak yineleme yöntemi" adı verilir. Bu yöntemde bir fonksiyonun sıfırının bulunması amacıyla fonksiyonun sıfırının arasında olduğu iki tahminî sayı alınır ve bu sayıların ortalaması ile yeni bir tahmin oluşturulur. Bu yeni tahmin oluşturma işlemi fonksiyonun sıfırının tahmin değeri sıfır olana kadar devam ettirilir.

Buna göre

a) **Gerçek sayılarda tanımlı** $f(x) = ax + b$ **doğrusal fonksiyonunun sıfırının ortalama alarak yineleme yöntemi ile bulunması işleminin algoritmasını ifade ediniz.**

b) **Gerçek sayılarda tanımlı** $f(x) = ax + b$ **doğrusal fonksiyonu için a ve b değerleri belirleyerek oluşturduğunuz algoritmayı test ediniz.**

Çözüm

a) $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun kökünü ortalama alarak yineleme yöntemi kullanarak bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. adım: Kökün arasında olduğu tahmin edilen iki sayı belirlenir. Bu sayılar, x_1 ve x_2 olsun.

2. adım: Tahmin edilen sayıların fonksiyon değerleri hesaplanır. $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerlerinden biri sıfır ise fonksiyonun sıfırı tahmin edilen sayıdır.

3. adım: $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerlerinden biri sıfır değilse ilk tahmin edilen iki sayının ortalaması alınarak yeni tahmin yapılır. Bu ortalama $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ şeklinde bulunur.

4. adım: $f(x_3) = 0$ ise x_3 f fonksiyonunun sıfırıdır, 6. adıma git.

Eğer $f(x_3) \neq 0$ ise $f(x_3)$ işaretine göre yeni bir aralık belirlenir.

$f(x_3)$ ve $f(x_1)$ aynı işarete sahipse $x_1 = x_3$ olarak yenilenir.

$f(x_3)$ ve $f(x_1)$ zıt işarete sahipse $x_2 = x_3$ olarak yenilenir.

5. adım: $f(x_3)$ sıfıra yaklaşıncaya kadar adımları tekrarla.

6. adım: Bitir.

b) $a = 2$ ve $b = -6$ için $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonu için yazılan algoritma adımlarını uygulayalım.

1. adım: İlk tahminler $x_1 = 1, x_2 = 7$

2. adım: $f(x_1) = 2 \cdot 1 - 6 = -4$, $f(x_2) = 2 \cdot 7 - 6 = 8$ bulunur.

Burada f(1) negatif, f(7) pozitif olduğu için, fonksiyonun sıfır noktası bu iki değer arasındadır.

3. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4$, $f(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$

(Sonuç sıfır olmadığından tahmin etmeye devam edilir.)

4. adım: f(4) pozitif olduğu için $x_1 = 1, x_2 = 4$ alınır.

5. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 4}{2} = 2{,}5$ $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 6 = -1$

6. adım: f(2,5) negatif olduğu için $x_1 = 2{,}5$ $x_2 = 4$ alınır.

7. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2{,}5 + 4}{2} = 3{,}25$

$f(3{,}25) = 2 \cdot 3{,}25 - 6 = 0{,}5$

8. adım: f(3,25) pozitif olduğu için $x_1 = 2{,}5$ $x_2 = 3{,}25$ alınır.

9. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2{,}5 + 3{,}25}{2} = 2{,}875$

$f(2{,}875) = 2 \cdot 2{,}875 - 6 = -0{,}25$ olur. Bu işlem $f(x) \approx 0$ olana kadar devam ettirildiğinde fonksiyonun sıfırı yaklaşık 3 bulunur.

17 . Örnek

Bilgi: Karekök hesaplama işlemi, sayısal algoritmalar kullanılarak ilk kez Babiller tarafından bulunmuştur (Flannery, 2006). Babil metodu olarak isimlendirilen bu yöntemde tekrarlama işlemi kullanılır. Babil metodu ile karekökle ifade edilmiş bir sayının yaklaşık değeri aşağıdaki gibi bulunur:

- Gerçek kök değerine mümkün olduğunca yakın başlangıç tahmini yapılır.
- x_n tahmin, başlangıç değeri x_0 ve $x_0 > 0$, a karekökü alınacak sayı olmak üzere

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})$, n = 0, 1, 2, ...

formülü kullanılır ve belirlenen bir hata payına kadar tekrarlanarak bulunur·

Buna göre

a) $\sqrt{70}$ **sayısının yaklaşık değerini Babil metodu kullanarak bulunuz.**

b) **Babil metodu kullanılarak** $\sqrt{a}$ **sayısının yaklaşık değerini** $\pm$**0,001 hata payı ile bulan algoritmayı yazınız.**

Çözüm

a) Gerçek kök değerine mümkün olduğunca yakın başlangıç değeri alınması işlem adımlarını kısaltacağından

$x_0 = 8$ alınmalıdır.

$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (8 + \frac{70}{8}) = 8,375$ bulunur. Daha hassas değer bulmak için bir adım ilerlenir ise

$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (8,375 + \frac{70}{8,375}) \approx 8,3666$ bulunur.

b) $\sqrt{a}$ sayısının yaklaşık değerini Babil metodu ile bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. adım: Karekök değerinin hesaplanacağı sayı belirlenir. Bu sayı a olsun.

2. adım: Belirlenen sayının gerçek karekök değerine yakın tahminî bir sayı girilir. Bu sayı x_0 olsun.

3. adım: İlk tahmin edilen sayıyı $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})$, (n = 0, 1, 2, ...) formülünde kullanarak x_1 bulunur.

4. adım: Yinele. $|x_{n+1} - x_n| < 0,001$ değeri sıfıra yakın ise bitir değilse 3. adıma gidilir.

5. adım: Bitirilir.

10. Sıra Sizde

Tamkare İfadelerden Yararlanarak İrrasyonel Sayının Yaklaşık Değerini Bulma Yöntemi

$\sqrt{a}$ bir irrasyonel sayı ve b, a ya en yakın tamkare sayı olmak üzere $\sqrt{a}$ irrasyonel sayısının yaklaşık değeri $\frac{a+b}{2 \cdot \sqrt{b}} \approx \sqrt{a}$ ile bulunur.

Buna göre

a) $\sqrt{123}$ **sayısının yaklaşık değerini, tamkare ifadelerden yararlanarak irrasyonel sayının yaklaşık değerini bulma yöntemini kullanarak bulunuz.**

b) Aynı yöntemi kullanarak $\sqrt{a}$ sayısının yaklaşık değerini bulan algoritmayı yazınız.

Algoritmalar, teknolojinin temel yapı taşlarından biri olarak programlama dillerinin ve yazılım geliştirme süreçlerinin merkezinde yer alır. Bu algoritmalar, yapay zekâdan enerji sistemlerine ve savunma sanayisine kadar geniş bir yelpazede yenilikçi çözümler sunar. Yapay zekâ uygulamaları, büyük veriyi işleyip anlamlandırarak karar verme süreçlerini hızlandırırken enerji sistemlerinde kullanılan algoritmalar verimliliği artırarak sürdürülebilir bir gelecek inşa etmeye katkı sağlar. Savunma sanayinde kritik bir rol oynayan algoritmalar, stratejik avantaj elde etmek ve güvenliği sağlamak için yüksek teknolojili çözümler sunar. Türkiye'nin bu alanlarda teknolojik bağımsızlık kazanması sadece ekonomik kalkınma değil aynı zamanda ulusal güvenlik ve stratejik üstünlük açısından da büyük önem taşımaktadır.

12. Uygulama

Nesnelerin Sıralanma Sayısını Hesaplayabilen Algoritmalar

n kişiden oluşan bir gruptaki kişilerin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğini hesaplayan algoritmanın işleyişi ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Hesaplama yapabilmek için olası tüm durumları göz önünde bulundurarak gereken adımları ve işlemleri belirleyiniz.

2. Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil, sözde kod ve akış şeması ile ifade ederek bir bütün oluşturunuz.

Sözde Kod

Algoritmik Doğal Dil

Akış Şeması

3. Algoritmanın işleyişi ifadesinde (algoritmik doğal dil, sözde kod, akış şeması) hangi mantık bağlaçları ve niceleyicilere, neden ihtiyaç duyulduğunu açıklayınız.

4. Akış şemasında kişilerin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğini nasıl belirlediğinizi açıklayınız.

5. Elde ettiğiniz algoritmayı 5 kişilik grup için test ediniz.

11. Sıra Sizde

Verilen bir doğal sayının kaç basamaklı olduğunu bulan algoritmanın işleyişinin ifadesi ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Algoritmik yapıyı ortaya koyabilmek için olası tüm durumları göz önünde bulundurarak gereken adımları ve işlemleri belirleyiniz.

b) Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil, sözde kod ve akış şeması ile ifade ederek bir bütün oluşturunuz.

Sözde Kod

Algoritmik Doğal Dil

Akış Şeması

c) Elde ettiğiniz algoritmayı 48 765 sayısı için test ediniz.

Performans Görevi

Adı:	Cebirsel ve Fonksiyonel İşlemleri Algoritmik Dille Yapılandırarak Akış Şeması Oluşturma
Beklenen Performans:	Verilen iki farklı işlemi ayrı ayrı algoritmik dille yapılandırarak bu işlemlerin akış şemalarını oluşturma ile ilgili sunum hazırlama
Görev:	Bu görevde sizlerden verilen iki farklı işlemi ayrı ayrı algoritmik dille yapılandırarak akış şemalarını oluşturmanız istenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bir çalışma planı oluşturunuz, yapılacak işleri ve çalışma takviminizi bu planda belirtiniz. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Herhangi iki doğal sayının EBOB ve EKOK'unu bulan algoritmanın işleyişini algoritmik dille ifade ediniz, akış şemasını oluşturunuz. • İki kenar uzunluğu verilen bir üçgenin bu iki kenar arasındaki açı ölçüsü girildiğinde alanını bulan algoritmanın işleyişini algoritmik dille ifade ediniz ve algoritmanın akış şemasını oluşturunuz. • Çalışmanız sonucunda görevlerinizde belirtilen algoritmaların işleyişinin algoritmik dille ifadesi ve akış şemasını nasıl sunacağınıza (bilişim araçları, karton üzerinde sunum gibi) karar veriniz. • Çalışmanız için sunum hazırlayınız. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamladıktan sonra oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Kontrol Noktası

İse (⇒): Algoritmalarda farklı durumları değerlendirmek ve döngüler içinde karar vermek için kullanılır.

Ancak ve Ancak (⇔): İki koşulun aynı anda doğru ya da aynı anda yanlış olduğu durumda doğru sonucu veren bağlaçtır.

Döngü: İstenen koşullarda tekrar eden (yinelenen) işlemler için kullanılan yapıdır.

Birleştirici: Bağlantı noktalarını temsil eder. Farklı işlem akışlarını birleştirmek veya akış sayfaları arasında bağlantı kurmak amacıyla kullanılan yapıdır.

Alıştırmalar

1. Bir sınıftaki 20 öğrencinin not ortalaması girildiği taktirde not ortalaması 50 ve üzerinde olanların sayısını bulan algoritmanın işleyişini

a) Algoritmik doğal dille ifade ediniz.

b) Döngü kullanarak akış şemasıyla ifade ediniz.

a) Algoritmik Doğal Dil **b) Akış Şeması**

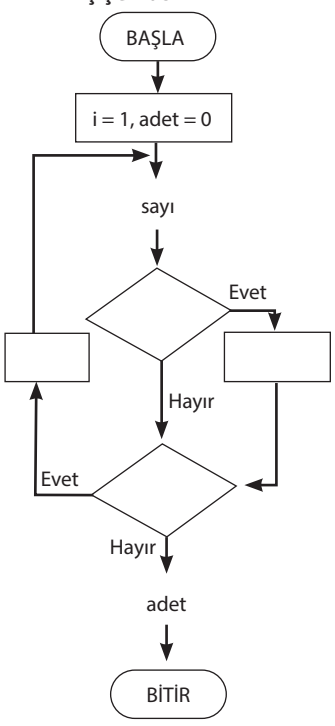
2. Bir sayının pozitif çift sayı olduğunu bulan algoritmanın işleyişini ifade ederek akış şemasını çiziniz.

Algoritmik Doğal Dil **Akış Şeması**

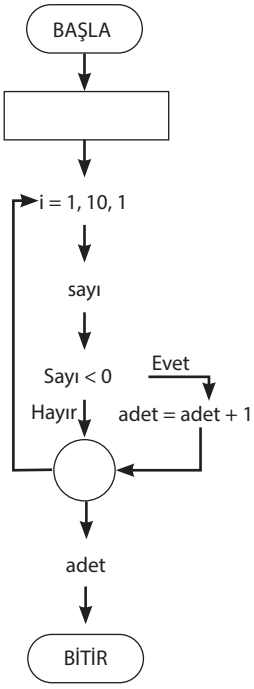
3. Kullanıcı tarafından girilen 10 sayıdan negatif olanların adedini bulup yazdıran algoritmanın işleyişini ifade eden akış şemaları aşağıda verilmiştir. Akış Şeması 1 döngü kullanılmadan, Akış Şeması 2 döngü kullanılarak oluşturulmuştur.

Buna göre her iki akış şemasında eksik kalan yerleri gerekli sembol, metin ve matematiksel ifadelerle tamamlayınız.

Akış Şeması 1



Akış Şeması 2



5. Tema alıştırma ek soruları

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

5. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 8 soru verilmiştir.

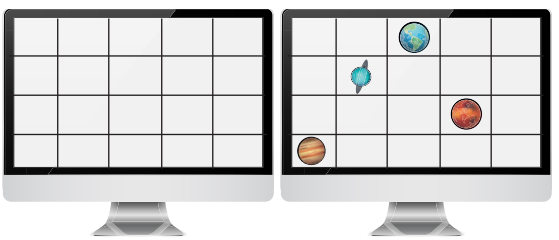
1. MAARİF kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 6 harfli farklı harf birlikleri oluşturuluyor.

Buna göre

a) Oluşan harf birliklerinin sayısını bulunuz.

b) M harfiyle başlayıp R harfi ile biten harf birlikleri sayısını bulunuz.

2. Bilgisayarında sunum hazırlamak isteyen Toprak sunumunda art arda görüntülerin olduğu geçişler oluşturacaktır. Bunun için bilgisayardaki çalışma sayfasını önce Görsel 1'deki gibi 20 eş parçaya böler. Daha sonra simgelerini sırasıyla her satır ve sütuna en çok bir tane simge gelecek şekilde Görsel 2'deki gibi yerleştirir.



Görsel 1 **Görsel 2**

Bu işlemi her seferinde farklı bir görüntü oluşturacak şekilde tekrarlar ve görüntüleri kaydeder. Bu görüntüleri art arda sıralayarak sunumu için bir geçiş oluşturur.

Buna göre Toprak'ın bu geçişi hazırlamak için kaç farklı görüntü kullandığını bulunuz.

3. Aslı ve Miraç aşağıda görselleri verilen parfümlerden birer adet satın alacaktır. Her şişenin altında o parfümdeki çiçek kokusunun ismi yazmaktadır.

Yasemin | Zambak | Gül | Yasemin Zambak | Yasemin Gül

Bu iki arkadaşın aynı çiçek kokusunun kullanıldığı parfümleri tercih etmediği durumda kaç farklı şekilde parfüm alabileceği aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

4. Efe ağustos ayındaki 4 hafta sonunun üçünde tatile çıkmayı planlamaktadır. Bunun için bir turizm şirketinden hafta sonu turlarının bulunduğu aşağıdaki broşürü almıştır.

TARİH	DÜZENLENECEK TURLAR			
3-4 Ağustos	İzmir Efes Antik Kenti	Denizli Hierapolis Antik Kenti		
10-11 Ağustos	Kars Ani Harabeleri	Konya Çatalhöyük	Aydın Afrodisias Antik Kenti	Şanlıurfa Göbeklitepe
17-18 Ağustos	Gaziantep Zeugma Antik Kenti	Antalya Aspendos Antik Kenti	Nevşehir Derinkuyu Yer Altı Şehri	
24-25 Ağustos	Çanakkale Asos Antik Kenti	Çorum Hattuşaş Antik Kenti		

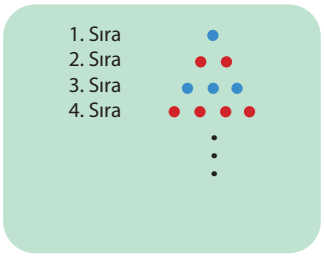
Efe, hafta sonu tatilinde sadece bir antik kenti ziyaret edeceğine göre tatilini kaç farklı şekilde planlayabileceğini bulunuz.

5. Üçgensel sayılar, bir eşkenar üçgen oluşturacak şekilde dizilen noktaların sayısını ifade eden sayı dizisidir. Üçgensel sayılarla günlük hayatta da karşılaşılır. Örneğin her takımın birbiriyle sadece bir kez karşılaşacağı bir spor turnuvasında takımların yapacağı maç sayısı veya bir toplulukta bulunan tüm insanların birbirleriyle toplam tokalaşma sayısı da her zaman bir üçgensel sayıdır.

Aşağıdaki görselde bir üçgensel sayı dizisinin elemanları yer almaktadır.

Pascal üçgeninde de yer alan üçgensel sayı dizisinin elemanlarını aşağıdaki piramidi doldurarak tespit ediniz ve bu sayıların toplamını bulunuz.

6. Bir festivalin açılış töreni için hazırlanan dans gösterisinin koreografi planının üstten görünümü aşağıda verilmiştir.



Dansçıların saha içinde duracağı noktalar için mavi ve kırmızı levhalar kullanılmıştır. İlk sıranın bir tane mavi levha ile başlaması koşuluyla her sırada bir tane fazla levha kullanılarak sıra sayısı tek ise mavi, çift ise kırmızı levha örüntüsü oluşacak şekilde planlama yapılmıştır.

Buna göre sıra sayısı girildiğinde koreografide kullanılacak toplam mavi ve kırmızı levhaların sayısını ayrı ayrı hesaplayacak bir algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil ve akış şeması ile ifade ediniz.

Algoritmik Doğal Dil	Akış Şeması

7. a **ve** b (a, b $\in \mathbb{R}$, a $\neq$ 0) **katsayılarına göre** f(x) = ax + b **doğrusal fonksiyonunun sıfırını bulan algoritmanın işleyişinin ifadesi ile ilgili verilen aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

a) f fonksiyonunun sıfırını bulmak için gereken adımları ve işlemleri belirleyiniz.

b) Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil, sözde kod ve akış şeması ile ifade ediniz.

Sözde Kod

Algoritmik Doğal Dil

Akış Şeması

c) Algoritmanın işleyişinin ifadesinde (algoritmik doğal dil, sözde kod, akış şeması) hangi niceleyicilere ve mantık bağlaçlarına neden ihtiyaç duyulduğunu açıklayınız.

ç) Akış şemasında kullanılan koşul ifadeleri arasındaki mantıksal ilişkiyi açıklayınız.

d) Elde ettiğiniz algoritmayı f(x) = 2x + 4 **doğrusal fonksiyonu için test ediniz.**

8. Kendi hariç pozitif tam bölenlerinin toplamı kendine eşit olan sayıya "mükemmel sayı" denir. Aşağıda bir sayının mükemmel sayı olup olmadığını belirleyen bir algoritmanın işleyişi, algoritmik doğal dille ifade edilmiştir.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla
2. adım: Girdilerin alınması
Kullanıcıdan bir sayı girmesini iste "sayı (A)"
3. adım: topla = 0, sayaç(i) = 1 olarak tanımla
4. adım: döngü (sayaç = 1, sayı/2, 1)
5. adım: Sayının sayaç ile bölünmesi
sayıyı sayaç ile böl,
eğer sonuç 0 ise topla = topla + sayaç
değilse döngüye dön.
6. adım: sayı, topla ile eşit ise ekrana "Sayı mükemmel sayıdır." yazdır.
Değilse ekrana "Sayı mükemmel sayı değildir." yazdır.
7. adım: Bitiriniz.

Buna göre

a) Algoritmanın işleyişini akış şemasıyla ifade ediniz.

Akış Şeması

b) 6, 15, 28, 30 sayıları için algoritmayı akış şeması üzerinde test ediniz.

5. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

6. TEMA

ANALİTİK İNCELEME

6.1. Dik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık ve Bir Doğru Parçasını Belli Oranda Bölme

6.2. Dik Koordinat Sisteminde Doğrunun Özellikleri ve Analitik İncelenmesi

Anahtar Kavramlar

- **çakışma**
- **dik koordinat sistemi**
- **doğru**
- **eğim**
- **eğim açısı**
- **iki nokta arasındaki uzaklık**
- **kesişme**
- **paralellik**

Sembol ve Gösterimler

- $|AB|$
- $A(x,y)$
- m
- $d_1 // d_2$
- $d_1 \perp d_2$

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, açık uçlu soruları cevaplamanız, performans görevlerini yerine getirmeniz, proje ödevini yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

6. Tema
Karekodu

6. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklıkla ve bir doğru parçasını belli oranda bölen bir noktanın koordinatlarıyla ilgili çıkarım yapabilmeniz,
- dik koordinat sistemini doğrunun özelliklerini incelemek ve doğru ile ilgili problemleri çözebilmek için uygun bir temsil aracı olarak kullanabilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

Ölçüm, insanlık tarihinin bilgiye dayalı karar verme süreçlerinde temel bir araç olmuştur. Zaman, sıcaklık, ağırlık gibi büyüklüklerin yanı sıra noktalar arasındaki mesafelerin ölçülmesi ve doğruların geometrik özelliklerinin analiz edilmesi, coğrafyadan mühendisliğe, ulaşımdan haritacılığa kadar birçok alanda kritik öneme sahiptir. İki doğrunun paralel, kesişen veya dik olma durumları, bir köprünün taşıyıcı kolonlarının yerleşiminden bir haritanın ölçeklendirilmesine kadar pek çok uygulamada kullanılır. Doğrunun eğimi ve denklemi, yüzeylerin eğimini belirlemekten analitik hesaplamalara kadar geniş bir kullanım alanına sahiptir. Modern teknolojiler ölçümü kolaylaştırsa da bu matematiksel yöntemler hâlâ karmaşık sorunların çözümünde vazgeçilmez bir rol oynamaktadır.

Ön Değerlendirme

1. **Dik koordinat sisteminde yatay eksen, dikey eksen ve eksenlerin kesişim noktası hangi kavramlarla ifade edilmiştir? Açıklayınız.**

2. **Koordinatları (a, b) olan bir A noktası, dik koordinat sisteminde nasıl gösterilir? Açıklayınız.**

3. **Dik koordinat sistemi kaç bölgeye ayrılmıştır ve her bir bölgede bulunan noktaların ortak özellikleri nelerdir? Açıklayınız.**

4. **Dik koordinat sisteminde eksenler üzerinde bulunan noktaların ortak özellikleri nelerdir? Açıklayınız.**

5. **Dik koordinat sisteminde denklemi $y = mx + n$ olan doğruda m değeri doğruya ilişkin hangi kavramı ifade etmektedir? Açıklayınız.**

6. **Dik koordinat sisteminde eğimleri eşit olan farklı iki doğrunun birbirine göre konumu nasıldır? Açıklayınız.**

7. **Dik koordinat sisteminde eğimleri çarpımı -1 ve eksenlere paralel olmayan iki doğrunun birbirine göre konumu nasıldır? Açıklayınız.**

8. **Açıları eş olan üçgenlerin kenar uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.**

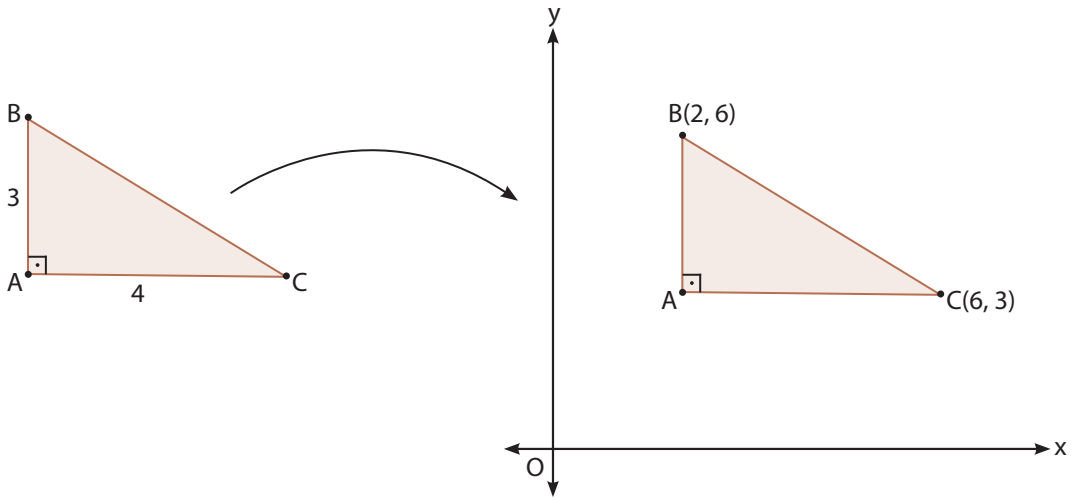
9. **Bir üçgenin iki kenarını kesen ve üçüncü kenarına paralel olan bir doğru çizildiğinde üçgenin kenarları üzerinde oluşan doğru parçaları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.**

10. **Bir dik üçgenin kenar uzunluklarından ikisi bilinirken üçüncü kenarın uzunluğu nasıl hesaplanır? Açıklayınız.**

6.1. DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK VE BİR DOĞRU PARÇASINI BELLİ ORANDA BÖLME

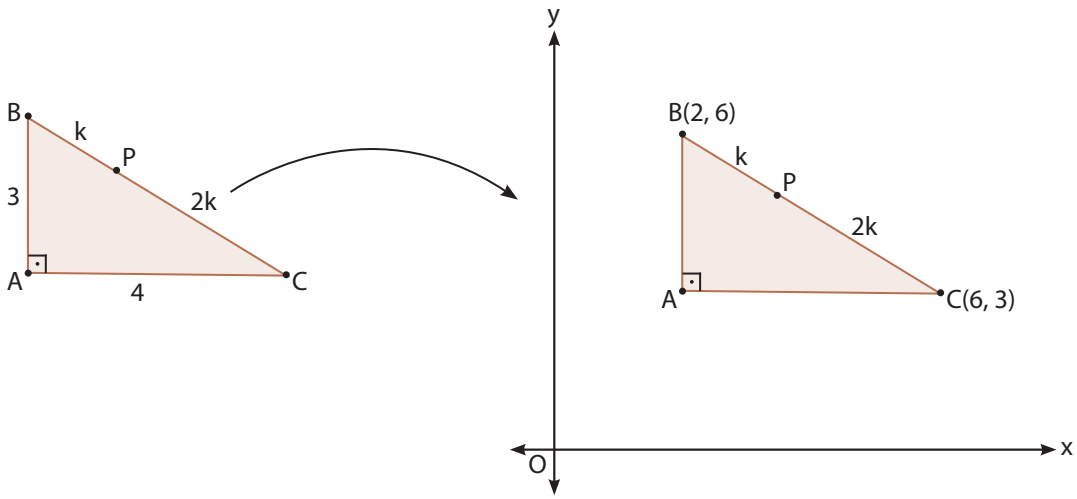
Konuya Başlarken

Dik kenarlarının uzunlukları |AB| = 3 birim ve |AC| = 4 birim olan bir ABC üçgeni, dik kenarları koordinat eksenlerine paralel olacak şekilde aşağıdaki gibi dik koordinat sistemine yerleştirildiğinde üçgenin hipotenüsüne ait uç noktalarının koordinatları B(2, 6) ve C(6, 3) olarak belirlenmiştir. Buna göre aşağıda verilen soruları cevaplayınız.



1. **Dik koordinat sisteminde ABC dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu B ve C noktalarının koordinatlarından faydalanılarak nasıl hesaplanabilir? Açıklayınız.**
2. ABC dik üçgeninin hipotenüsü üzerinde |CP| = 2|BP| olacak şekilde bir P noktası işaretleniyor.

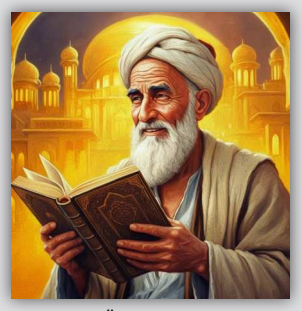
   Buna göre dik koordinat sisteminde ABC dik üçgeninin hipotenüsü üzerindeki P noktasının koordinatları, B ve C noktalarının koordinatları ile |CP| = 2|BP| oranından faydalanılarak nasıl hesaplanabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.



Matematiğin farklı disiplinleri arasında bir köprü oluşturan analitik geometri, geometriyi cebirsel ifadelerle birleştirerek matematik tarihinde çığır açan bir alan olarak öne çıkar. Analitik geometrinin temellerini atan ve bu alana katkılarıyla bilim dünyasında iz bırakan çalışmaları ile Ömer Hayyam, René Descartes (Röne Dekart) ve Pierre de Fermat (Pier dö Ferma) isimleri öne çıkmaktadır. Onların vizyonları ve yenilikçi yaklaşımları yalnızca matematik tarihinde değil bilimsel düşüncenin gelişiminde de derin bir etki bırakmıştır.

Ömer Hayyam (1048-1131)

İslam dünyasının önemli matematikçilerinden ve düşünürlerinden biri olarak analitik geometri ile ilgili önemli çalışmalar yapmıştır. Özellikle cebirsel denklemlerin geometrik çözümleri üzerine çalışmaları, analitik geometri alanına önemli bir katkı sağlamıştır. Ömer Hayyam (Görsel 6.1), ikinci ve üçüncü dereceden cebirsel denklemleri çözmek için geometrik yöntemler geliştirmiştir. Risale fi'l Cebr ve'l Mukabele (Cebir ve Mukabele Risalesi) cebirsel denklemler ve geometrik çözümler üzerine en önemli çalışmasıdır. Bulduğu yöntemler analitik geometrinin temel ilkelerinden biri olarak kabul edilir. Hayyam üçüncü dereceden denklemlerin bir kısmını bir konik kesitle yani parabol, hiperbol veya çember gibi geometrik figürlerle ifade ederek çözümler üretmiştir. Ömer Hayyam'ın analitik geometriyle ilgili çalışmaları, Descartes ve Fermat gibi daha sonraki dönemlerde yaşamış Batılı bilim insanlarının geliştirdiği modern analitik geometrinin temel taşlarından biri olmuştur. Cebirsel denklemleri geometrik şekillerle çözme fikri, bugün analitik geometride kullanılan yöntemlerin başlangıcını oluşturmaktadır. Hayyam'ın çalışmaları, İslam dünyasındaki matematiğin zirve noktalarından birini temsil eder ve bilim tarihindeki önemini korumaktadır.



Görsel 6.1: *Ömer Hayyam (Temsili)*

René Descartes (1596-1650)

René Descartes (Görsel 6.2), Fransız bir filozof, matematikçi ve bilim insanıdır. Modern analitik geometrinin kurucusu olarak kabul edilir. Descartes, "La Géométrie" adlı eserinde, düzlemdeki herhangi bir noktanın konumunun bir koordinat sistemi ile belirlenebileceğini ve bu noktalar arasındaki ilişkilerin cebirsel denklemlerle ifade edilebileceğini ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, modern analitik geometri için temel teşkil etmiştir. Descartes, bugün "Kartezyen koordinat sistemi" olarak bilinen ve düzlemdeki herhangi bir noktayı (x, y) koordinatları ile tanımlayan sistemi geliştirmiştir. Bu sistem sayesinde, düzlemdeki noktalar, eğriler ve diğer geometrik şekiller cebirsel denklemlerle ifade edilebilir hâle gelmiştir. Bu, geometrik problemlerin cebirsel yöntemlerle çözülmesini mümkün kılmıştır.

Görsel 6.2: *René Descartes (Temsili)*

Pierre de Fermat (1607-1665)

Pierre de Fermat (Görsel 6.3), Fransız bir avukat ve amatör matematikçidir. Fermat'nın analitik geometriye katkıları Descartes ile paralel bir dönemde gerçekleşmiş ve bu iki matematikçinin çalışmaları analitik geometriyi geliştirirken birbirlerini tamamlamıştır. Fermat analitik geometri alanında çalışırken herhangi bir eğrinin denklemini bir koordinat sistemi kullanarak ifade edilebileceğini ortaya koymuştur. Descartes gibi Fermat da düzlemdeki eğrilerin cebirsel denklemlerle temsil edilebileceğini göstermiştir. Fermat'nın yaklaşımı, genellikle "eğrilerin analizi" olarak adlandırılır ve eğrilerin davranışını incelemek için cebirsel yöntemlerin kullanımını içerir. Fermat, eğrilerin minimum ve maksimum noktalarının bulunması konusuna da önemli katkılarda bulunmuştur.

Görsel 6.3: *Pierre de Fermat (Temsili)*

Ömer Hayyam, Descartes ve Fermat'nın çalışmaları, analitik geometriye önemli katkılarda bulunmuş ve matematiksel analizde geometrinin cebirle ifade edilmesine yönelik yaklaşımlar geliştirmiştir. Hayyam'ın cebir ve geometrinin ilişkisini ortaya koyması, Descartes'ın modern analitik geometrinin temelini atan Kartezyen koordinat sistemi ve Fermat'nın eğrilerin analizi konusundaki çalışmaları, günümüz analitik geometrisinin gelişimini büyük ölçüde etkilemiştir. Bu matematikçilerin ortaya koyduğu fikirler, modern matematik ve bilimde önemli bir yer tutmaktadır.

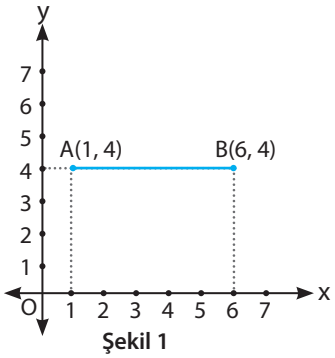
(Genel ağdan alınmıştır.)

1. Uygulama

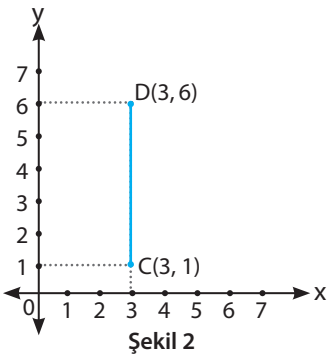
Dik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklığın Bulunması

Öğretmeninizin rehberliğinde dörder kişilik gruplara ayrılınız ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Bir doğru parçası dik koordinat sisteminde Şekil 1 ve Şekil 2'deki gibi sırasıyla x ve y eksenlerine paralel olacak şekilde çizilmiştir. Buna göre bu doğru parçasının uzunluğunun A, B, C ve D noktalarının koordinatları kullanılarak nasıl hesaplanabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız ve varsayımlarınızı açıklayınız.

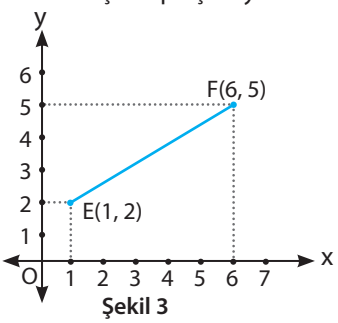


Şekil 1



Şekil 2

2. Bu doğru parçası dik koordinat sistemine Şekil 3'teki gibi uç noktaları E ve F noktaları olacak şekilde yerleştiriliyor. Buna göre bu doğru parçasının uzunluğunun eksenlere paralel doğru parçaları yardımıyla nasıl hesaplanabileceğine dair varsayımlarınızı oluşturup açıklayınız.



Şekil 3

3. Diğer grupların varsayımlarının doğruluğu veya yanlışlığı hakkındaki değerlendirmelerinizi özenli ve kontrollü bir şekilde sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Değerlendirme sırasında birbirinizin düşüncelerini ve bakış açılarını anlamaya çalışarak nezaketli bir dil kullanmaya özen gösteriniz. Varsayımlarınız üzerinde genellemelerinizi oluşturunuz.

4. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısına dair genellemelerinizi diğer grupların varsayımlarıyla karşılaştırınız.

5. Genellemelerinizden hareketle dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık bağıntısına dair önermenizi oluşturunuz ve sınıfta sözlü olarak sununuz.

6. Grup arkadaşlarınızın çalışmalarını karekoddaki akran değerlendirme formunu kullanarak değerlendiriniz.

Akran değerlendirme formu

7. Aşağıdaki problemi, oluşturduğunuz önerme yardımıyla cevaplayınız.

Belirli bir uzunluk birimine göre ölçeklendirilmiş aşağıdaki haritada dik koordinat sistemi ile modellenmiş bir bölgede bulunan A, B ve C noktalarının koordinatları gösterilmiştir.

İki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayan bir harita programı A(5, 5) ile B(–3, –1) noktaları arasındaki doğrusal uzaklığı 40 km olarak hesaplıyor. Buna göre bu harita programının B(–3, –1) ile C(9, –6) noktaları arasındaki doğrusal uzaklığı kaç kilometre olarak hesaplayacağını bulunuz.

Bir matematik yazılımında aşağıdaki adımları takip ederek önermenizin doğruluğunu test ediniz.

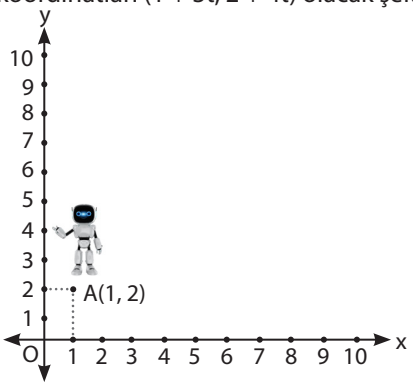
1. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak dik koordinat sisteminde A(5, 5), B(–3, –1) ve C(9, –6) noktalarını işaretleyiniz.

2. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |AB| ile |BC| nu hesaplayınız.

Önermenizden elde ettiğiniz sonuçlar ile yazılımdan elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırarak değerlendirmenizi açıklayınız.

1. Örnek

Bir robota dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir program kullanılarak komutlar verilip robotun dik koordinat sistemindeki noktalar üzerinde hareket etmesi sağlanmaktadır. Aşağıdaki görselde verildiği gibi başlangıçta sistemin A(1, 2) noktasında duran bu robot, t saniye sonra bulunduğu noktanın koordinatları (1 + 3t, 2 + 4t) olacak şekilde hareket etmektedir.

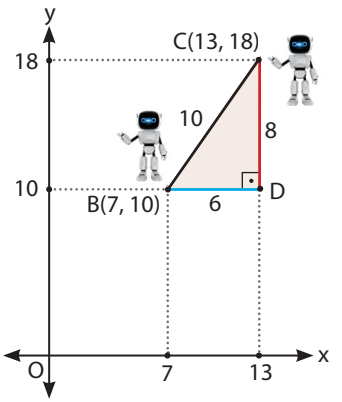


Robot 2. saniyede B noktasında ve 4. saniyede C noktasında bulunduğuna göre B ile C arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

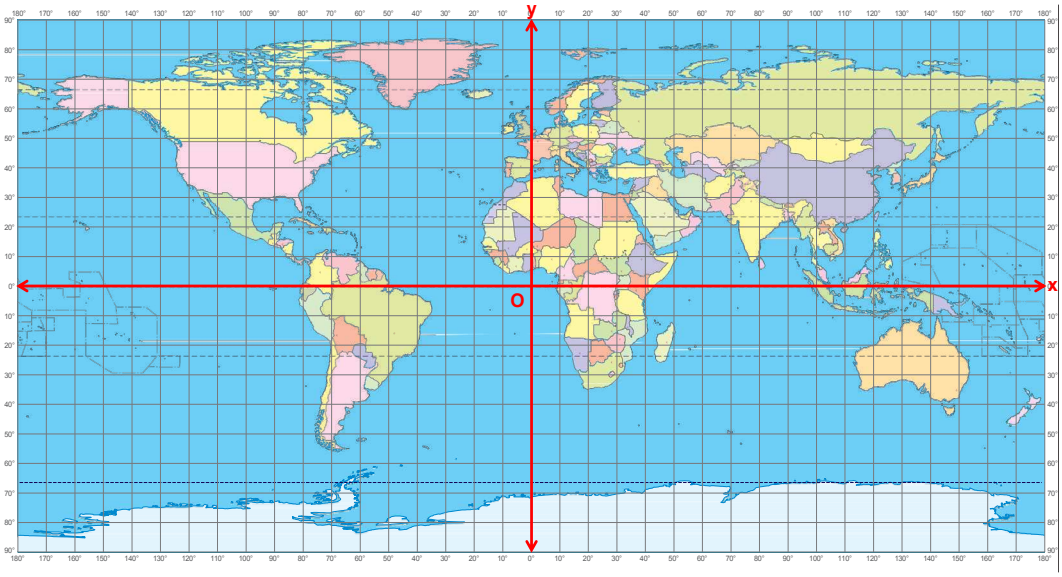
Robotun 2. saniyede bulunduğu nokta t = 2 için B(7, 10) noktası, 4. saniyede bulunduğu nokta t = 4 için C(13, 18) noktasıdır.

B ile C noktalarının apsisleri arasındaki farkın mutlak değeri x eksenine paralel olan [BD] nın uzunluğuna, ordinatları arasındaki farkın mutlak değeri y eksenine paralel olan [CD] nın uzunluğuna eşit olacağından |BD| = |13 – 7| = 6 ve |CD| = |18 – 10| = 8 birim olur. Oluşan BCD dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanılarak $|BC|^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow |BC| = 10$ birim bulunur.



2. Örnek

Dünya yüzeyindeki herhangi bir konumu tanımlamak için kullanılan coğrafi koordinatlar, enlem ve boylam değerlerinden oluşur. Bu sistem, yerlerin konumlarını kolayca belirlemek ve birbirine olan uzaklıklarını hesaplamak için tasarlanmıştır. Enlem çizgileri yatay, boylam çizgileri ise dikey bir düzen oluşturur. Türkiye'de yaklaşık olarak enlemler arası mesafe 111 km, boylamlar arası 79 km'dir.



Kadir, yukarıda görseli verilen dünya haritasını kullanarak başlangıç enlemini ve boylamını sırasıyla x ve y eksenleri ile ilişkilendirmiştir. Bir konumun enlem ve boylam değerlerini dik koordinat sisteminde sırasıyla ordinat ve apsis olarak kabul edip iki nokta arasındaki kuş uçuşu mesafeyi hesaplamak istemektedir. Bunun için İstanbul ve Ankara'nın coğrafi koordinatlarını tespit etmiş, bu iki şehir arasındaki mesafeyi dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısını kullanarak hesaplamış ve bir çevrim içi harita programında gerçek yol uzunluğu ile karşılaştırmıştır.

Buna göre Kadir'in yaptığı hesaplamalardan elde ettiği sonuçları bulunuz.

Çevrim içi harita

Türkiye'deki illerin coğrafi koordinatlar tablosu

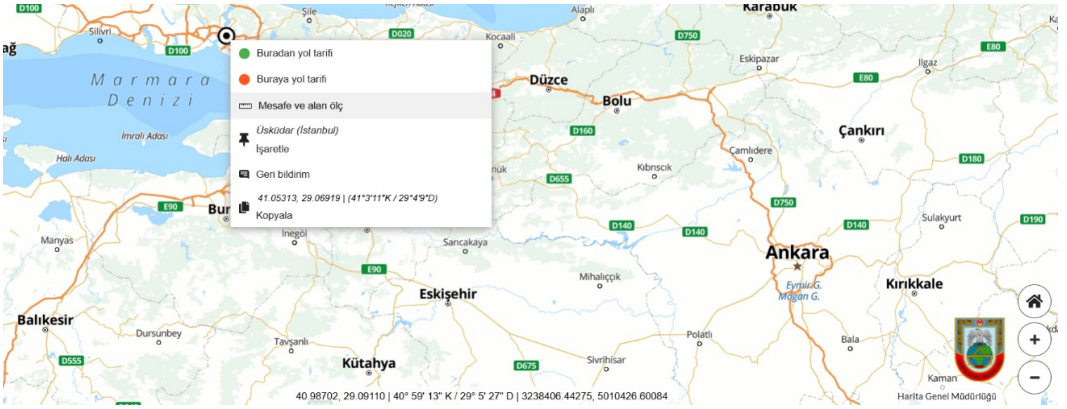
Çözüm

İstanbul ve Ankara'nın en yakın birliğe göre yuvarlanmış coğrafi koordinatları aşağıdaki tabloda verildiği gibidir:

İl Adı	Enlem	Boylam
ANKARA	40	33
İSTANBUL	41	29

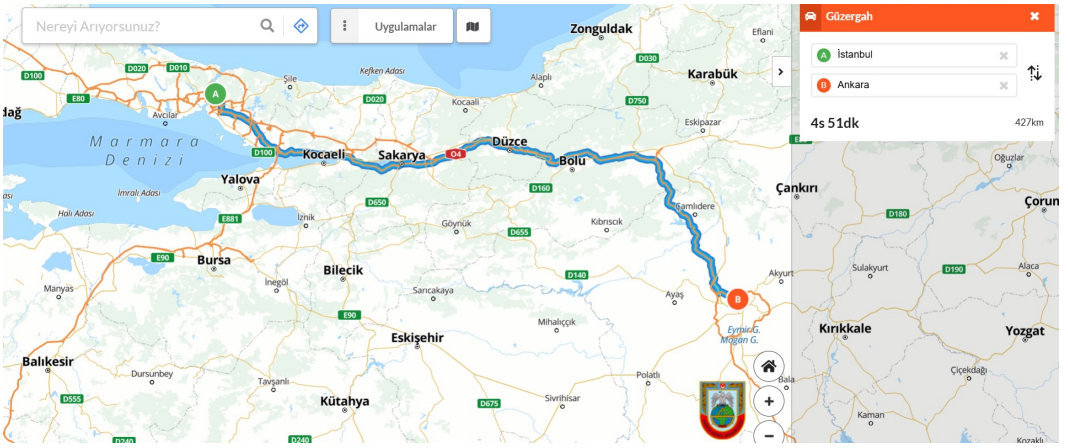
Dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından İstanbul ile Ankara arasındaki uzaklık yaklaşık olarak $\sqrt{((32-29)\cdot 79)^2+((41-40)\cdot 111)^2} \approx 335$ km bulunur.

Çevrim içi harita programında aşağıda verilen görseldeki gibi İstanbul'un bulunduğu nokta işaretlenerek mesafe ölçme aracı seçilir.



Daha sonra Ankara'nın bulunduğu nokta seçildiğinde İstanbul ile Ankara arasındaki mesafe aşağıdaki görselde görüldüğü gibi program tarafından 336,75 km olarak ölçülür. Harita programında hesaplanan değerin farklı çıkması dünyanın şekli ve yükseklik gibi faktörlerin de hesaba katılmasından kaynaklanmaktadır.

Çevrim içi haritada güzergâh aracındaki konum seçeneklerine aşağıda verilen görseldeki gibi İstanbul ve Ankara illeri yazıldığında bu iki il arasındaki yol uzunluğu 427 km olarak ölçülür.



Genellikle iki il arasındaki yol uzunluğu kuş uçuşu mesafeye göre daha uzundur çünkü yollar arazi koşullarına göre kıvrımlıdır.

1. Sıra Sizde

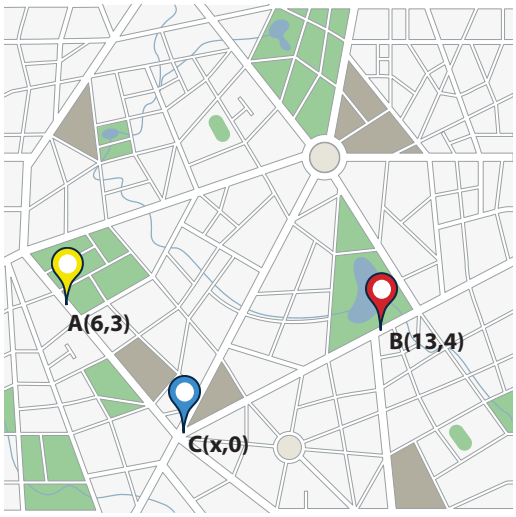
İki il arasındaki uzaklığı koordinatlar üzerinden hesaplamak için aşağıda iki farklı yöntem verilmiştir.

- 2. örnekte karekod içinde verilen Türkiye'deki illerin coğrafi koordinat tablosunu kullanarak iki il seçerek coğrafi koordinatlarını not ediniz. Not ettiğiniz koordinatlar ile dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından faydalanarak bu iki konum arasındaki mesafeyi hesaplayınız.
- 2. örnekte verilen çevrim içi haritayı kullanarak coğrafi konumlarını belirlediğiniz iki il arasındaki kuş uçuşu mesafeyi ölçünüz. Aynı noktalar arasındaki yol mesafesini harita uygulamasından tespit ediniz.

Buna göre seçeceğiniz iki il için bu yöntemleri uygulayınız. Hesaplamalarınız sonucunda bulduğunuz mesafeler ile ilgili değerlendirmenizi yazınız.

2. Sıra Sizde

Konumların dik koordinat sistemindeki noktalarla gösterildiği ve birimin santimetre cinsinden hesaplandığı aşağıdaki haritada A(6, 3) noktasında bulunan Ayten ile B(13, 4) noktasında bulunan Berke, C(x, 0) noktasında bulunan arkadaşları Can'ın yanına gitmek istemektedir. Bulundukları noktalardan eşit hızlarla aynı anda yola çıkan Ayten ve Berke'nin yol boyunca hızları sabit kalmaktadır.



Doğrusal bir rotada ilerleyen Ayten ve Berke aynı anda Berke'nin bulunduğu C noktasına ulaşmıştır.

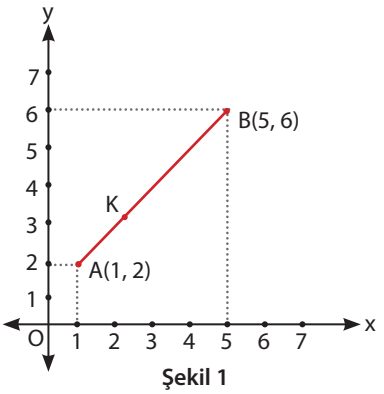
Verilen haritanın ölçeği santimetre cinsinden 1:10 000 olduğuna göre Ayten ve Berke'nin toplamda kaç metre yürüdüklerini hesaplayınız.

2. Uygulama

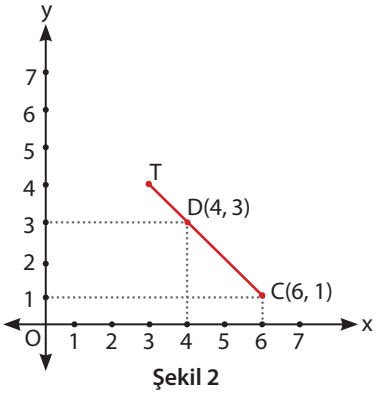
Bir Doğru Parçasını Belli Oranda Bölen Noktanın Koordinatlarının Bulunması

Şekil 1'de A(1, 2) ve B(5, 6) olan [AB] nı içten ve Şekil 2'de C(6, 1) ve D(4, 3) olan [CD] nı dıştan $\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|DT|}{|CT|} = \frac{1}{3}$ oranında bölen K ve T noktaları belirleniyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



Şekil 1



Şekil 2

1. Üçgende benzerlik kuralları yardımıyla bir doğru parçasını belli oranda içten veya dıştan bölen noktanın koordinatlarının nasıl belirlenebileceğine dair varsayımlarda bulununuz.

2. Hem kendi varsayımlarınız hem de arkadaşlarınızın varsayımları üzerinde tartışarak bir doğru parçasını belli oranda içten veya dıştan bölen noktanın koordinatlarının bulunmasına yönelik genellemelerinizi oluşturunuz.

3. Doğru parçalarını içten veya dıştan belli bir oranda bölen noktaların koordinatlarının bulunmasına dair oluşturduğunuz genellemelerinizi varsayımlarınızla karşılaştırınız.

4. Elde ettiğiniz genellemelerden hareketle dik koordinat sisteminde uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan [AB] nı içten veya dıştan $\frac{|AC|}{|BC|} = k$ (k bir rasyonel sayı) oranında bölen C noktasının koordinatlarının bulunmasına ilişkin önermenizi ifade ediniz.

5. Aşağıdaki problemi, oluşturduğunuz önerme yardımıyla cevaplayınız.

Bir harita programında dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir bölgedeki nesnelerin konumları sıralı ikililerle ifade edilmektedir. Bir sonraki sayfada verilen haritada A(–3, 6) ve B(7, –4) noktaları ile bu noktaları birleştiren [AB] yolu gösterilmiştir.

A noktasından hareket eden bir araç sabit bir hızla 3 saatte B noktasına ulaşırken B noktasından hareket eden başka bir araç sabit bir hızla 2 saatte A noktasına ulaşmaktadır. A ve B noktalarından aynı anda birbirlerine doğru hareket eden bu araçlar [AB] üzerindeki bir C noktasında karşılaşmıştır.

Buna göre araçların karşılaştıkları C noktasının koordinatlarını bulunuz.

6. Bir matematik yazılımında aşağıdaki adımları takip ederek önermenizin doğruluğunu test ediniz.

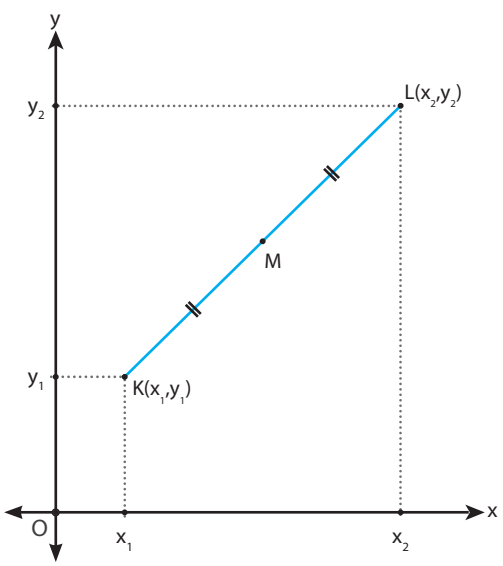
1. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak dik koordinat sisteminde A(–3, 6) , B(7, –4) ve bulduğunuz C noktasını işaretleyiniz.

2. adım: Yazılımın **Uzaklık veya Uzunluk** aracını kullanarak |CA| ile |BC| nu hesaplayınız.

3. adım: Yazılımın **Giriş** bölümüne $\frac{|BC|}{|CA|}$ oranını yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basarak değerini hesaplayınız.

Önermenizden elde ettiğiniz sonuçlar ile programdan elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırarak değerlendirmenizi açıklayınız.

7. Oluşturduğunuz önermeden faydalanarak yandaki dik koordinat sisteminde uç noktaları $K(x_1, y_1)$ ve $L(x_2, y_2)$ olan [KL] nın M orta nokta koordinatlarını veren bağıntıyı belirleyiniz.



8. Bir matematik yazılımında aşağıdaki adımları takip ederek elde ettiğiniz bağıntının doğruluğunu test ediniz.

1. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak dik koordinat sisteminde A(–3, 6) , B(7, –4) noktalarını işaretleyiniz.

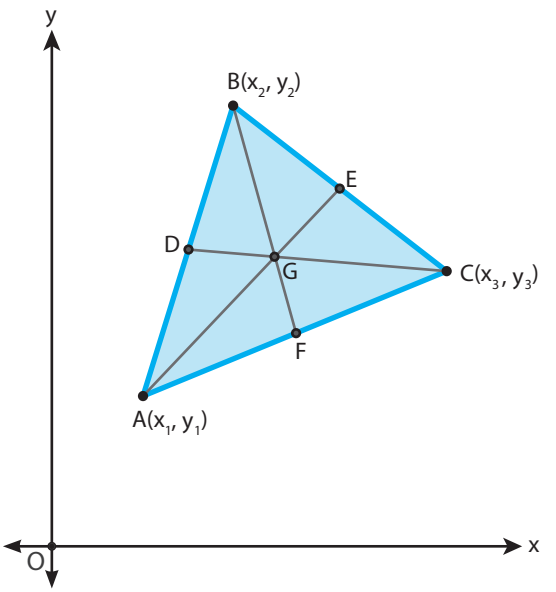
2. adım: Yazılımın **Doğru Parçası** aracını kullanarak [AB] nı çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Orta Nokta veya Merkez** aracını kullanarak A ile B noktasının orta noktasını C olarak belirleyiniz.

4. adım: C noktasının ayarlar kısmındaki **Etiketi göster** seçeneğini **Ad & Değer** olarak değiştirerek C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Programdan bulduğunuz değerler ile oluşturduğunuz bağıntıdan elde ettiğiniz değerleri karşılaştırarak değerlendirmenizi açıklayınız.

9. Dik koordinat sisteminde köşeleri $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ve kenarlarının orta notları D, E, F olan ABC üçgeninin G ağırlık merkezinin koordinatlarını veren bağıntıyı belirleyiniz. Bunun için ağırlık merkezinin kenarortay uzunluğunu ikiye bir oranında böldüğü bilgisi ile önceki adımlarda elde ettiğiniz sonuçlardan faydalanınız.



10. Bir matematik yazılımında aşağıdaki adımları takip ederek elde ettiğiniz bağıntının doğruluğunu test ediniz.

1. adım: Yazılımın **Nokta** aracını kullanarak dik koordinat sisteminde A(1, 2) , B(5, 1) ve C(3, 6) noktalarını işaretleyiniz.

2. adım: Yazılımın **Çokgen** aracını kullanarak ABC üçgenini çiziniz.

3. adım: Yazılımın **Orta Nokta veya Merkez** aracını kullanarak [AB], [BC] ve [AC] nın orta noktalarını sırasıyla D, E ve F olarak işaretleyiniz.

4. adım: Yazılımın **Doğru Parçası** aracını kullanarak [AD], [BE] ve [CF] çiziniz.

5. adım: Yazılımın **Kesiştir** aracını kullanarak 4. adımda çizdiğiniz doğru parçalarından herhangi ikisinin kesim noktasını G olarak belirleyiniz.

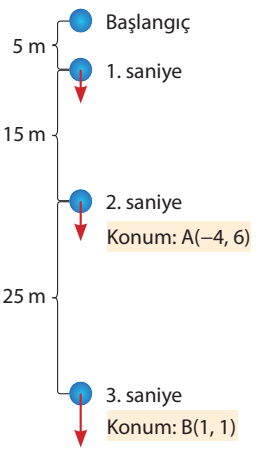
6. adım: G noktasının ayarlar kısmındaki **Etiketi göster** seçeneğini **Ad & Değer** olarak değiştirerek G noktasının koordinatlarını bulunuz.

Programdan bulduğunuz değerler ile oluşturduğunuz bağıntıdan elde ettiğiniz değerleri karşılaştırarak değerlendirmenizi açıklayınız.

3. Örnek

Sürtünmesiz ortamda deney yapan bir grup araştırmacı, yeterince yüksekten bıraktıkları bir cismin yaptığı doğrusal hareket sırasında bulunduğu konumları bir bilgisayar programı ile gözlemliyor. Bu bilgisayar programı nesnelerin bulunduğu ortamı rastgele konumlandırılan bir dik koordinat sistemiyle modelleyerek nesnelerin konumlarını sıralı ikililerle ifade etmektedir.

Belirli bir yükseklikten ilk hızı sıfır olarak bıraktıkları cisim serbest düşme hareketi yaparak hızı saniyede 10m/sn. artarken her bir saniye aralığındaki düşme miktarı ile o saniye sonundaki konumu yandaki çizim ile verilmiştir.



Cismin serbest bırakıldıktan sonraki 2. saniyede bulunduğu konum A(–4, 6) iken 3. saniyedeki konumu B(1, 1) olarak ölçülüyor.

Buna göre cismin 4. saniyede bulunacağı konumu belirleyiniz.

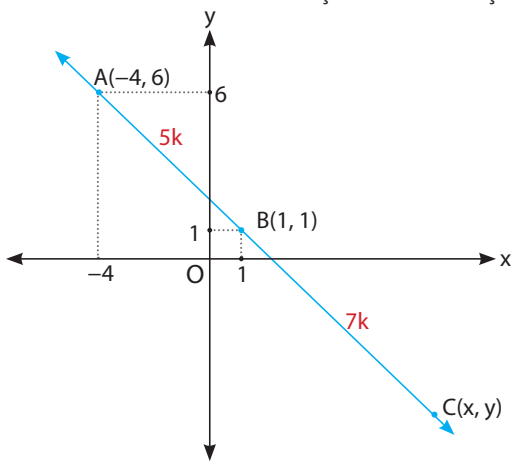
Çözüm

Cismin hızı her saniyede 10 m/sn. arttığından her saniye aralığında bir önceki aralıkta aldığı yoldan 10 metre fazla yol alacaktır. Buna göre 3. saniye ile 4. saniye arasında alacağı yol 25 + 10 = 35 metre olur.

Cismin 4. saniyede bulunacağı konum C(x, y) olsun.

Buna göre $|AB| = 25$ m ve $|BC| = 35$ m ve $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{7}$ olur.

Bu bilgilere göre dik koordinat sistemi üzerinde oluşturulan taslak çizim aşağıda verilmiştir.



[AB] nı $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{7}$ oranında dıştan bölen C(x, y) noktasının koordinatları aşağıdaki gibi bulunur:

$\frac{1-(-4)}{x-1} = \frac{5}{7} \Rightarrow 5x - 5 = 35 \Rightarrow x = 8$

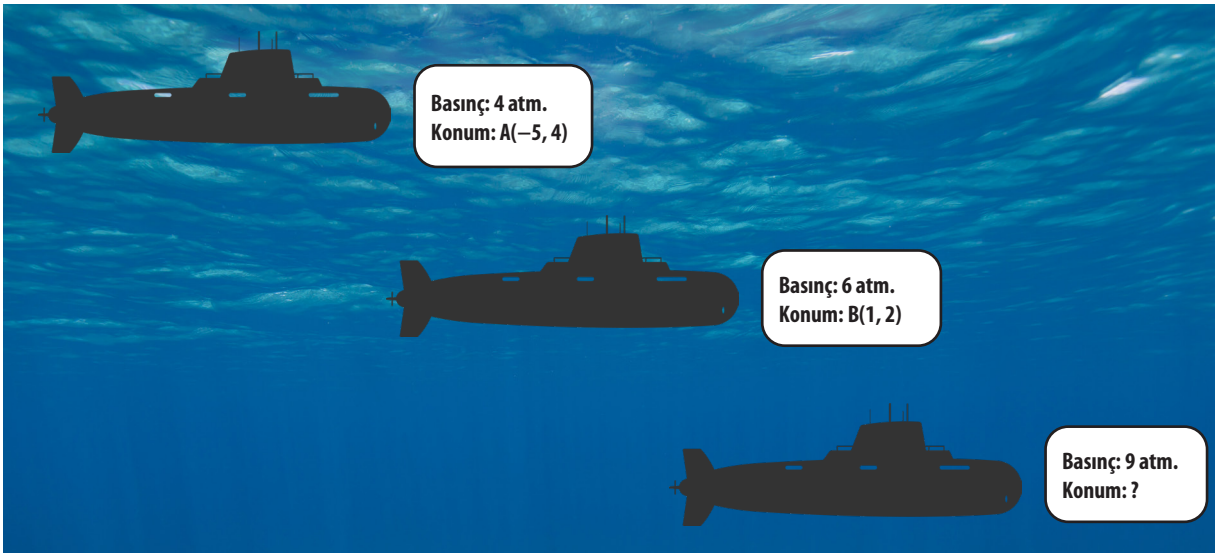
$\frac{1-6}{y-1} = \frac{5}{7} \Rightarrow 5y - 5 = -35 \Rightarrow y = -6$

Buna göre cismin 4. saniyedeki konumu C(8, –6) olacaktır.

3. Sıra Sizde

Deniz seviyesinde atmosfer basıncı 1 atm. dir. Su altında ise her 10 metre derinlikte dış basınç 1 atm. artar. Dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir bölgede nesnelerin konumları sıralı ikililerle ifade edilmektedir.

Basınç ölçümü için doğrusal bir rotada su altına doğru hareket eden bir denizaltının kontrol ekranında bulunduğu konumun koordinatları ve o konumdaki anlık basınç değeri görülmektedir.



Denizaltının hareketi sırasında yaptığı üç ölçüme ait anlık basınç ve konum bilgileri görselde verilmiştir.

Buna göre denizaltının üçüncü ölçümü yaptığı andaki konumunu veren koordinatlarını bulunuz.

Performans Görevi

Adı:	Bulunduğunuz İlin veya İlçenin Dik Koordinat Sistemi ile Temsili
Beklenen Performans:	• Dik koordinat sistemini bir temsil aracı olarak kullanmayı öğrenme • Gerçek yaşam durumlarını matematiksel kavramlarla ilişkilendirerek, dik koordinat sistemi kavramını somutlaştırma • Çalışmayı raporlayarak süreçte matematiksel iletişim becerilerini güçlendirme
Görev:	Bu görevde sizden bulunduğunuz ilin veya ilçenin ölçekli bir haritasında okulunuzu orijin kabul ederek bu haritayı dik koordinat sistemiyle ilişkilendirmeniz ve harita üzerindeki önemli merkezlerin koordinatlarını gösteren görsel bir materyal hazırlamanız beklenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bulunduğunuz ilin ya da ilçenin ölçekli bir haritasını temin ediniz ya da bir harita çiziniz. • Harita üzerinde okulu orijin olarak belirleyiniz ve haritanın üzerine yatay (x ekseni) ve dikey (y ekseni) eksenleri çiziniz. • Harita üzerinde koordinatlarını belirlemek üzere birkaç önemli merkezi (belediye binası, hastane, kütüphane, müze, park, camii vb.) ve kendi evinizi belirleyiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Harita üzerinde belirlediğiniz her önemli merkezin ve evinizin koordinatlarını bulunuz. Bu koordinatları x ve y eksenlerine göre yazınız. • İki nokta arasındaki uzaklıkları hesaplamak için 1. uygulamada oluşturduğunuz önermeyi kullanınız. • Koordinatları, hesaplanan uzaklıkları ve haritanızdaki önemli noktaları içeren düzenli bir görsel materyal (poster veya dijital sunum) hazırlayınız. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Görevinizi tamamlarken izlediğiniz adımları ve bulduğunuz sonuçları açıklayan bir rapor hazırlayınız. • Hazırladığınız materyali sınıfta sunmaya hazır hâle getiriniz. Sunum sırasında çalışmanızla ilgili sorulara açık olunuz ve açıklamalarınızı net bir şekilde yapmaya çalışınız. • Çalışmanızı 2 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz.
Değerlendirme:	Karekodlarda verilen akran değerlendirme formu ile sınıf arkadaşınızı, öz değerlendirme formu ile de kendinizi değerlendiriniz. Performans göreviniz, öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda yer alan analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Öz değerlendirme formu | Akran değerlendirme formu | Analitik dereceli puanlama anahtarı | Konu ile ilgili çalışma kâğıdı | Konu ile ilgili video

Kontrol Noktası

1. Dik koordinat sisteminde verilen $A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için

a) A ile B noktaları arasındaki uzaklık $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ bağıntısı ile hesaplanır.

b) [AB] nı içten bölen (yani [AB] nın üzerinde) ve $|AB| = |BC| \cdot k$ (k bir rasyonel sayı) kuralını sağlayan C(x, y) noktasının koordinatları $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = k$ ve $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k$ bağıntılarıyla bulunur.

[AB] nı dıştan bölen (yani [AB] nın üzerinde) ve $|AB| = |BC| \cdot k$ (k bir rasyonel sayı) kuralını sağlayan C(x, y) noktasının koordinatları $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = k$ ve $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k$ bağıntılarıyla bulunur.

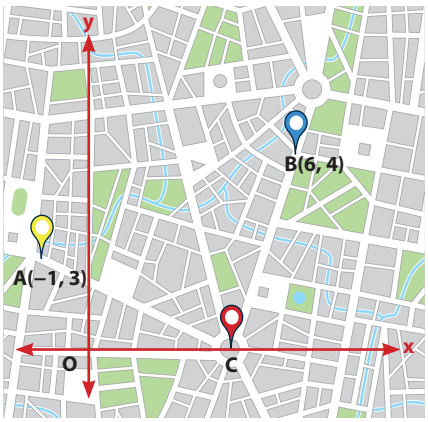
c) [AB] nın orta noktası C noktası olmak üzere C noktasının koordinatları $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dir.

2. Dik koordinat sisteminde köşe noktalarının koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olmak üzere $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ dir.

Alıştırmalar

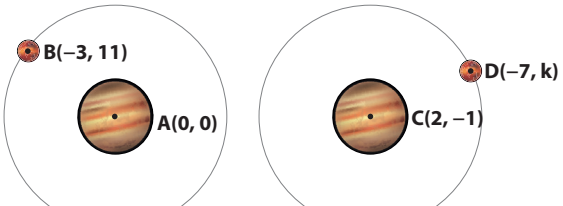
1. Konumların dik koordinat sistemindeki sıralı ikililerle gösterildiği aşağıdaki haritada A(–1, 3) noktasında bulunan bir araç ile B(6, 4) noktasında bulunan başka bir araç, bulundukları noktalardan eşit hızlarla aynı anda harekete başlıyor.

Doğrusal bir rotada ilerleyen araçların hareketleri boyunca hızları sabit kalmaktadır.



Araçlar x ekseni üzerindeki C noktasına aynı anda ulaştıklarına göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2. Hareket hâlindeki bir gezegen ile bu gezegen etrafında dairesel bir yörüngede hareket eden uydusunun iki farklı konumu aşağıda verilen görsellerde modellenmiştir.

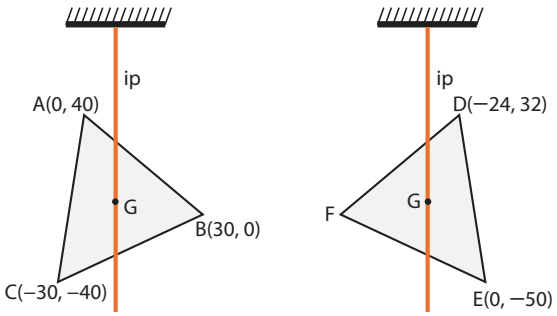


Şekil 1 Şekil 2

Bu modellemede konumlar dik koordinat sistemindeki sıralı ikililerle ifade edilmektedir. Şekil 1'de gezegenin konumu A(0, 0) iken uydusunun konumu B(–3, 11) olarak verilmiştir. Şekil 2'de ise gezegen C(2, –1) noktasında iken uydusunun D(–7, k) noktasında bulunduğu gösterilmiştir.

Buna göre uydunun son bulunduğu konumdaki ordinat değeri olan k nin alabileceği değerleri belirleyiniz.

3. Bir cisim herhangi bir noktasından asılırsa cismin asıldığı noktadan geçen düşey doğrultu, ağırlık merkezinden geçecek şekilde dengede kalır. Dik koordinat sistemiyle modellenen bir ortamda üçgen şeklindeki bir levha Şekil 1'deki gibi bir iple tavana asıldığında ip G noktasından geçecek şekilde levha dengede durmuştur. Bu durumda üçgenin köşelerinin koordinatları A(0, 40), B(30, 0) ve C(–30, –40) olarak ölçülmüştür.

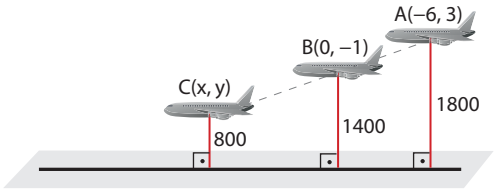


Şekil 1 Şekil 2

Aynı levha Şekil 2'deki gibi asıldığından ip yine G noktasından geçecek şekilde levha dengede kalırken üçgenin iki köşesinin koordinatları D(–24, 32), E(0, –50) olarak ölçülmüştür.

Buna göre üçgenin F köşesinin koordinatlarını belirleyiniz.

4. Bir piste iniş yapmaya hazırlanan uçak, piste uzaklığı 1800 metre olduğu anda alçalmaya başlıyor. Bu andan sonra aşağıdaki görseldeki gibi doğrusal bir rotada piste doğru ilerleyen bu uçağın bulunduğu konumlar dik koordinat sistemiyle modellenen bir programda sıralı ikililerle ifade edilmektedir.



Uçağın piste uzaklığı 1800 metre olduğu anda konumu A(–6, 3) noktası iken 1400 metre olduğu andaki konumu B(0, –1) noktası olarak ölçülmüştür.

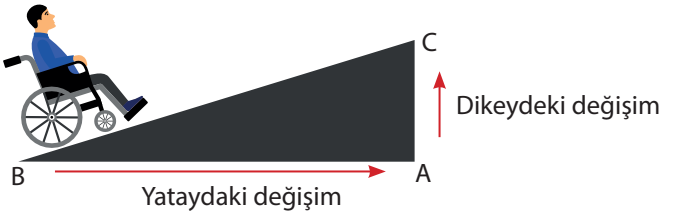
Buna göre uçağın piste uzaklığının 800 metre olduğu andaki konumunu gösteren C(x, y) noktasının koordinatlarını belirleyiniz.

6. Tema alıştırma ek soruları

6.2. DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE DOĞRUNUN ÖZELLİKLERİ VE ANALİTİK İNCELENMESİ

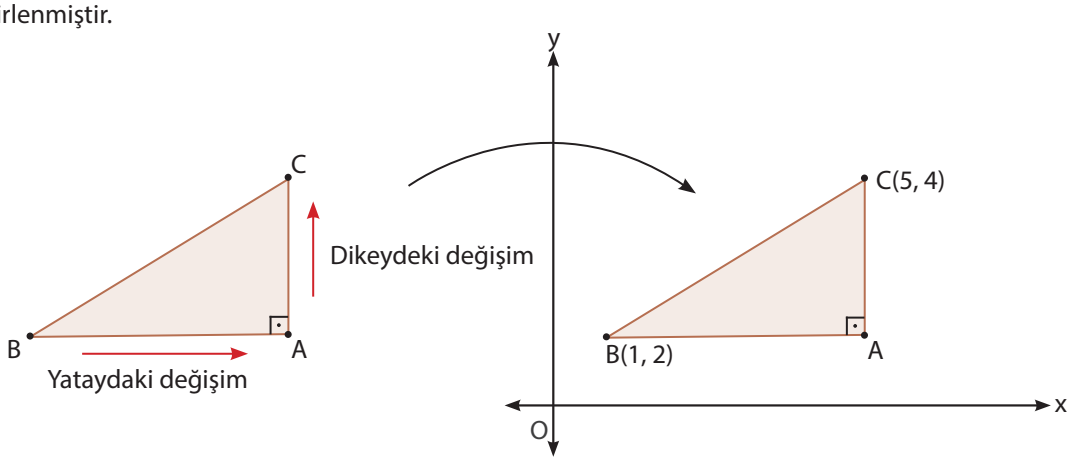
Konuya Başlarken

1. Doğrusal bir yolun eğimi, o yolun ne kadar dik olduğunun bir ölçüsüdür. Matematiksel olarak eğim dikey eksendeki değişimin yatay eksendeki değişime oranıdır. Aşağıda yan yüzeyi BAC dik üçgeni biçiminde olan bir rampanın görseli verilmiştir.



Rampanın eğimini veren oranı BAC dik üçgeninin kenar uzunluklarını kullanarak yazınız. Bu oranın dik üçgenin açıları ile olan ilişkisi hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

2. BAC dik üçgeni dik kenarları koordinat eksenlerine paralel olacak şekilde aşağıdaki gibi dik koordinat sistemine yerleştirildiğinde üçgenin hipotenüsüne ait uç noktalarının koordinatları B(1, 2) ve C(5, 4) olarak belirlenmiştir.



Buna göre

a) Rampanın eğimi dik koordinat sistemindeki BAC dik üçgenine ait B ve C noktalarının koordinatlarından faydalanılarak nasıl hesaplanabilir? Açıklayınız.

b) Dik koordinat sisteminde BAC dik üçgeninin hipotenüsü üzerinde alınan herhangi bir noktanın apsisi ile ordinatı arasında sabit bir ilişki var mıdır? Varsa bu ilişki cebirsel olarak nasıl gösterilebilir? Açıklayınız.

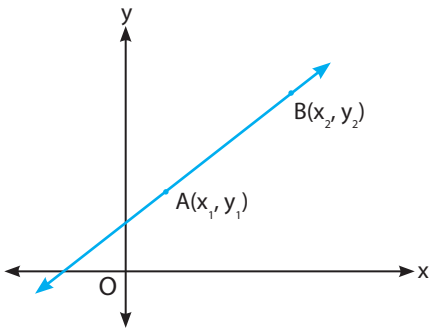
Dik koordinat sistemi, matematikte doğru ve diğer geometrik nesneleri görselleştirmek ve analiz etmek için kullanılan temel bir araçtır. Bu sistem bir doğrunun eğimi, denklemi ve kesişim noktaları gibi özelliklerini belirlemek için görsel ve cebirsel bir çerçeve sunar. Doğru üzerindeki noktalar arasındaki ilişkiyi ifade etmek, doğruların birbirine göre konumlarını analiz etmek veya bir problemde doğru denklemini problem bağlamında anlamlandırarak problemin çözümünde kullanmak gibi işlemler, dik koordinat sistemi sayesinde hem daha kolay hem de daha anlaşılır hâle gelir. Matematikte bir temsil aracı olarak dik koordinat sistemi, sadece cebirsel ifadelerin somut bir görünüme kavuşmasını sağlamakla kalmaz aynı zamanda problemlerin çözümüne de rehberlik eder. Bu nedenle doğruya dair tüm kavramları anlamak ve kavramları problemlerin çözümünde işe koşmak için dik koordinat sistemini etkin bir şekilde kullanmak önem taşır.

3. Uygulama

Bir Doğrunun Eğim Açısı, Eğimi ve Üzerindeki Noktaların Özellikleri

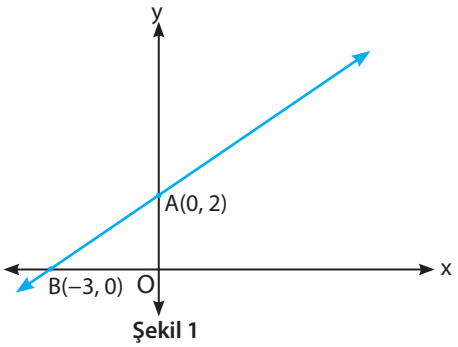
Eğim, bir doğru üzerindeki iki nokta arasında her bir birim yatay değişimde (x ekseni boyunca) doğru üzerinde ne kadar düşey değişim (y ekseni boyunca) olduğunu gösteren bir değerdir. Verilen bu bilgiye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Buna göre yanda dik koordinat sistemi üzerinde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğruyu kullanarak doğrunun eğiminin cebirsel temsilini yazınız.

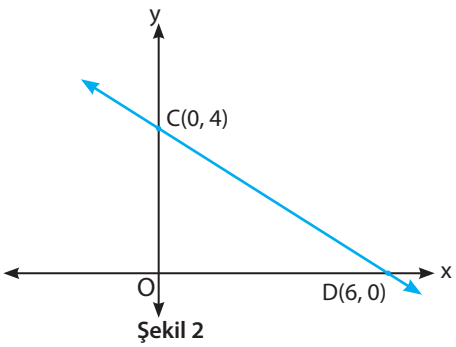


2. Eğim, bir doğrunun yatay eksene göre ne kadar dik veya eğik olduğunun anlaşılmasını sağlar. Bundan dolayı bir doğrunun dik koordinat sisteminde eğimi incelenirken x eksenine göre konumu değerlendirilir. Doğrunun x ekseniyle pozitif yönde (saat yönünün tersi yönde) yaptığı açı doğrunun eğim açısı olarak tanımlanır.

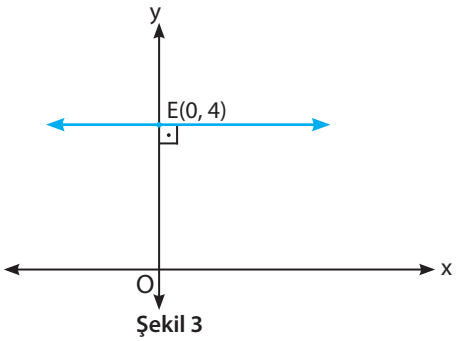
a) Aşağıdaki şekillerde verilen doğruların eğimlerini hesaplayarak ilgili soruları sınıf arkadaşlarınızla tartışarak cevaplandırınız.



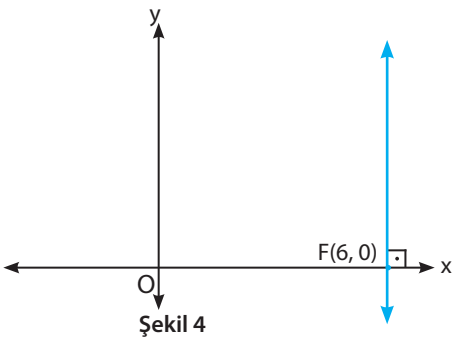
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3



Şekil 4

b) Doğruların eğimleri ile eğim açıları arasındaki ilişkiler nelerdir? Açıklayınız.

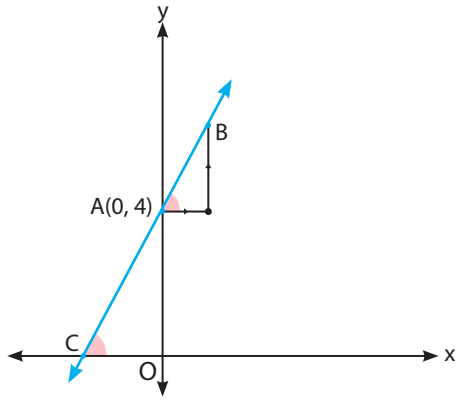
c) Bir doğrunun eğiminin pozitif veya negatif olması ile doğrunun dik koordinat sistemindeki görünümü arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

3. Eğimi m ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı n olan bir doğrunun denklemi $y = mx + n$ olarak ifade edilir.

Buna göre

a) Eğimi 2 olan ve y eksenini A(0, 4) noktasında kesen doğrunun denklemini yazınız.

b) A noktasını ve doğrunun eğimini kullanarak doğrunun üzerinde A noktasından farklı bir B noktasının koordinatlarını tespit ediniz.



c) Doğrunun denklemi ile elde ettiğiniz B noktasının koordinatları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

ç) Benzer şekilde doğrunun x eksenini kestiği C noktasının apsisini bulunuz. Bir önceki adımda bulduğunuz ilişkinin C noktası için de sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediniz.

d) K(3, 10) noktası bu doğrunun üzerinde midir? Bir noktanın doğru üzerinde olup olmadığını test etmek için nasıl bir yöntem kullanılır? Açıklayınız.

e) M(4, y) ve N(x, −2) noktalarının bu doğru üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre bir önceki adımda oluşturduğunuz yöntemi kullanarak x ve y değerlerini bulunuz.

f) Bir önceki adımda belirlediğiniz noktaları matematik yazılımı ya da kareli kâğıt kullanarak dik koordinat sistemi üzerinde işaretleyerek bu iki noktadan geçen doğruyu çiziniz. Çizdiğiniz doğrunun denkleminin yazdığınız doğruyla aynı olup olmadığını kontrol ediniz.

4. Örnek

Bir aracın sabit bir hızda belirli bir mesafeyi giderken eğimi fazla olan yolda harcadığı yakıt miktarı, eğimi az olan yolda harcadığı yakıt miktarına göre daha fazladır.

Nesnelerin konumlarını dik koordinat sisteminde sıralı ikililerle ifade eden bir bilgisayar programında bir aracın hareketi gözlemleniyor. Yapılan ilk üç ölçümde aracın geçtiği noktalar sırasıyla A(–8, –5), B(12, 10) ve C(19, 34) olarak belirleniyor. İki nokta arasında doğrusal olarak ilerleyen bu aracın hızı hareketi boyunca sabit kalmıştır.

Buna göre aracın bilgisayar programında [AB] ve [BC] ile temsil edilen yollarda tükettiği yakıt miktarlarını kıyaslayınız.

Çözüm

Aşağıdaki dik koordinat sisteminde A, B ve C noktaları ile bu noktaları birbirine bağlayan [AB] ile [BC] gösterilmiştir. Programda [AB] ve [BC] ile temsil edilen yolların uzunlukları iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısı kullanılarak hesaplanırsa

$|AB| = \sqrt{(12-(-8))^2 + (10-(-5))^2} = \sqrt{20^2 + 15^2}$

$|AB| = 25$ birim

$|BC| = \sqrt{(19-12)^2 + (34-10)^2} = \sqrt{7^2 + 24^2}$

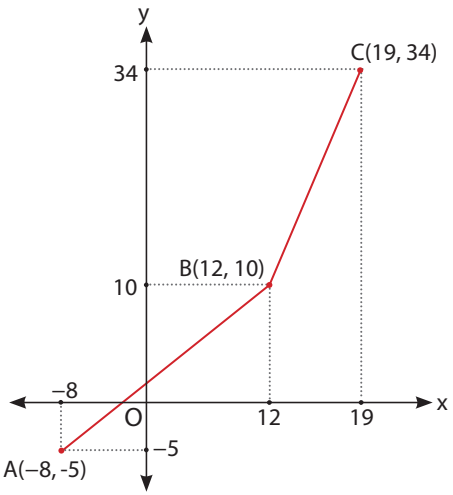
$|BC| = 25$ birim

bulunur. $|AB| = |BC|$ ve aracın hareketi boyunca hızı sabit olduğundan harcanan yakıt miktarı kullanılan yolun eğimine göre farklılık gösterecektir. Buna göre yolların eğimleri hesaplanırsa

[AB] ile temsil edilen yolun eğimi $\frac{10-(-5)}{12-(-8)} = \frac{3}{4}$

[BC] ile temsil edilen yolun eğimi $\frac{34-10}{19-12} = \frac{24}{7}$

bulunur. [BC] nın eğimi [AB] nın eğiminden fazla olduğundan [BC] boyunca harcanan yakıt miktarı, [AB] boyunca harcanan yakıt miktarından fazla olacaktır.

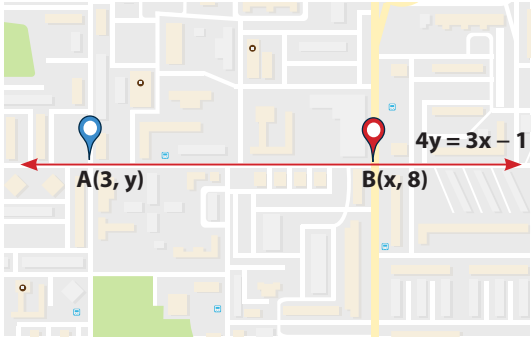


4. Sıra Sizde

Konumların dik koordinat sistemindeki noktalarla gösterildiği ve birimin santimetre cinsinden hesaplandığı yandaki haritada bir aracın hareketi denklemi $4y = 3x - 1$ olan doğru ile modellenmiştir.

Araç, doğru üzerinde saatte 50 km/sa. sabit hızla ilerlerken bulunduğu iki noktanın koordinatları A(3, y) ve B(x, 8) olarak belirlenmiştir.

Verilen haritanın ölçeği santimetre cinsinden 1:100 000 **olduğuna göre aracın A ile B noktaları arasındaki mesafeyi kaç dakikada gittiğini hesaplayınız.**



4. Uygulama

Doğruların Birbirine Göre Durumları (Dik Kesişen Doğrular)

Dik koordinat sisteminde doğruların grafikleri incelenerek bu doğruların paralel, kesişen veya çakışan doğrular olup olmadıkları tespit edilebilir. Buna göre aşağıda istenenleri gerçekleştirerek verilen soruları cevaplayınız.

1. Aşağıda denklemleri verilen d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularını matematik yazılımı kullanarak dik koordinat sisteminde çiziniz.

$d_1: y = 2x + 6$

$d_2: y = 2x - 4$

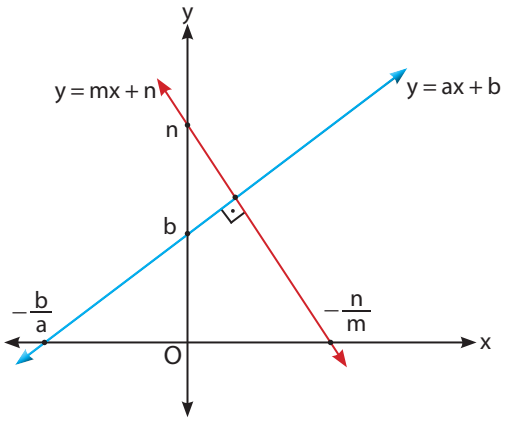
$d_3: y = x + 1$

$d_4: 2y = 2x + 2$

2. Yazılımın **Açı** aracını kullanarak çizdiğiniz doğruların eğim açılarını ölçünüz. Yaptığınız ölçümlerden doğruların eğim açıları ile birbirine göre durumları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

3. d_3 ve d_4 doğruları üzerinde apsis değerleri aynı olan birer nokta ile ordinat değerleri aynı olan birer nokta belirleyiniz. Belirlediğiniz noktaların koordinatlarından doğruların birbirine göre durumları hakkında ne söylenebilir? Açıklamalarınızı gerekçeleriyle yazınız.

4. Denklemleri $y = ax + b$ ve $y = mx + n$ olan ve dik kesişen iki doğru aşağıdaki dik koordinat sistemi üzerinde gösterilmiştir. Doğruların eksenlerle oluşturduğu üçgenlerin benzerliğinden faydalanarak bu iki doğrunun eğimleri olan m ve a değerleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu sınıf arkadaşlarınızla tartışarak belirleyiniz.



5. Denklemleri $y = 2x + 1$ ve $y = -\frac{1}{2}x + 2$ olan doğruların grafiklerini matematik yazılımı kullanarak dik koordinat isteminde çiziniz. Doğruların kesişmesiyle oluşan açının ölçüsünü hesaplayarak bir önceki adımda bulduğunuz ilişkinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediniz. Sonucu sınıf arkadaşlarınızla tartışarak değerlendiriniz.

5. Örnek

Konumların dik koordinat sistemindeki noktalarla gösterildiği bir bölgenin herhangi bir açıdan görseli yanda verilmiştir. Görselde A(3, –1) noktasında bulunan bir hareketli doğrultusunu değiştirmeden doğu yönünde ilerleyerek B(5, 3) noktasına ulaşmıştır. Bu noktada yönünü güney yönüne çevirmiş ve yine doğrultusunu değiştirmeden ilerleyerek C(x, 2) noktasına varmıştır.

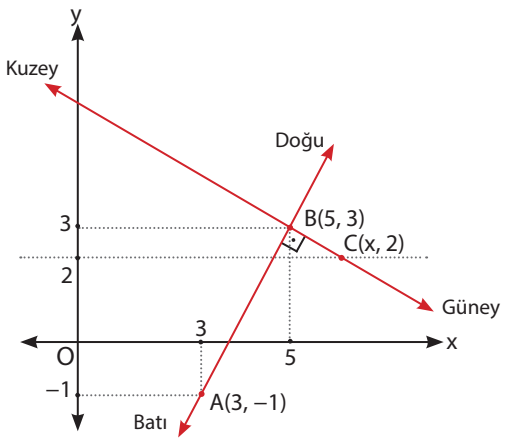
Buna göre

a) C noktasının apsisini gösteren x değerini bulunuz.

b) A ile C noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu hesaplayınız.

Çözüm

Doğu-Batı doğrultusu ile Kuzey-Güney doğrultusu birbirine dik olduğundan AB ile BC doğruları birbirine dik olur. Buna göre dik koordinat sistemi üzerinde oluşturulan taslak çizim aşağıda verilmiştir.



a) AB ile BC doğruları dik kesiştiğinden AB doğrusunun eğimi ile BC doğrusunun eğiminin çarpımı –1'e eşit olur.

İki noktası bilinen bu doğruların eğimleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

AB doğrusunun eğimi $\frac{3-(-1)}{5-3} = 2$ ve

BC doğrusunun eğimi $\frac{3-2}{5-x} = \frac{1}{5-x}$ olur.

Buradan $\frac{1}{5-x} \cdot 2 = -1 \Rightarrow x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7$ bulunur.

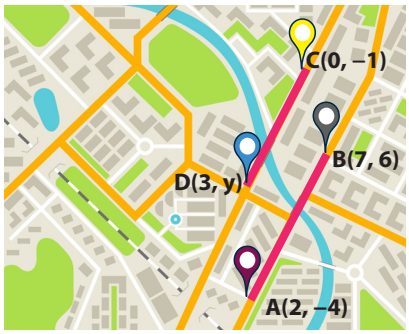
b) A ile C noktaları arasındaki uzaklık iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısına göre hesaplanırsa

$|AC| = \sqrt{(7-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ birim bulunur.

5. Sıra Sizde

Uçangöz [drone (dıron)] son yıllarda bir şehirdeki ulaşımın işleyişinin takip edilmesi ve denetlenmesi için sıkça kullanılmaktadır. Uçangözler, incelediği bölgeyi dik koordinat sistemiyle modelleyerek nesnelerin konumlarını sıralı ikililerle ifade etmektedir.

Bir şehrin trafiğini takip eden uçangöz, birbirine paralel uzanan düz iki yol üzerinde trafik yoğunluğu tespit etmiş ve bunu yanda verilen kroki üzerinde kırmızı renkli kısımlarla göstermiştir. Yoğunluğun yaşandığı bölümler yolların birinde A(2, –4) ile B(7, 6) noktaları arasındaki kısım ve diğeri ise C(0, –1) ile D(3, y) noktaları arasındaki kısımdır.



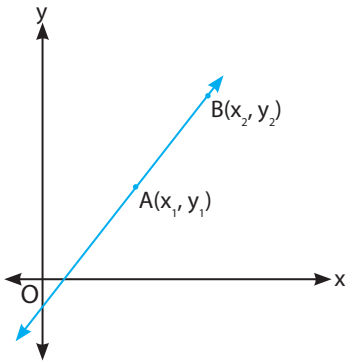
Buna göre D noktasının ordinatını gösteren y değerini bulunuz.

5. Uygulama

Doğru Denkleminin Yazılması

Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru yandaki dik koordinat sistemi üzerinde gösterilmiştir.

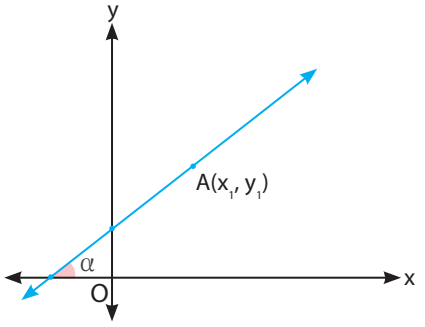


Buna göre

a) İki noktası bilinen doğru eğiminin cebirsel temsilinden faydalanarak bu doğru üzerindeki tüm noktaların x ve y koordinatları arasındaki ilişkiyi ifade eden doğru denklemini yazınız.

b) A(2, 3) ve B(4, 7) noktalarından geçen doğrunun denklemini bir önceki adımda elde ettiğiniz sonucu kullanarak yazınız. A ve B noktalarının bu doğrunun üzerinde olup olmadığını kontrol ediniz.

2. Yandaki dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğim açısının ölçüsü α olan bir doğru verilmiştir.



Buna göre

a) Doğrunun denklemini yazabilmek için α değerinden nasıl faydalanılır? Açıklayınız.

b) $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğim açısının ölçüsü α olan bir doğrunun üzerindeki tüm noktaların koordinatları arasındaki ilişkiyi ifade eden doğru denklemini yazınız.

c) Bir önceki adımda yazdığınız denklemi kullanarak $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğim açılarının ölçüleri 0° ve 90° olan doğruların denklemlerinin nasıl ifade edileceğini açıklayınız.

ç) Elde ettiğiniz sonuçlara göre dik koordinat sisteminde A(–1, 2) noktasından geçen ve eğim açısının ölçüleri 0°, 45° ve 90° olan doğruların denklemlerini yazınız. Matematik yazılımı kullanarak yazdığınız denklemlere ait doğruların grafiklerini çiziniz. Çizdiğiniz doğrulara ait eğim açılarının ölçülerini hesaplayarak bulduğunuz sonuçların doğruluğunu test ediniz.

3. Aşağıda verilen problem durumlarında dik koordinat sistemini bir temsil aracı olarak kullanıp problemleri çözünüz.

a) Bir telefonun pil kapasitesi, tam şarj ile 5 saat boyunca aktif kullanım sağlamaktadır. Telefonun şarjı birim zamanda eşit seviyede azalmaktadır.

Buna göre

I. Kullanım süresi ile kalan pil süresi arasındaki doğrusal ilişkiyi ifade eden bir denklem oluşturunuz.

II. Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

b) Bir araç sabit bir hızla düz bir yolda 100 km yol gittiğinde 6 litre yakıt tüketmektedir.

Buna göre

I. Yakıt tüketimi ile katedilen mesafe arasındaki doğrusal ilişkiyi ifade eden bir denklem oluşturunuz.

II. Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

c) Bir girişimci, kendi küçük işletmesini yönetirken gelir ve giderlerini takip etmek için aşağıdaki gibi basit bir tablo hazırlamıştır. İşletmenin aylık gelirleri sattığı ürünlerin sayısına bağlıdır. Her bir ürün 200 TL'den satılmaktadır. İşletmenin sabit giderleri ise her ay 3000 TL'dir.

Buna göre

I. Aşağıdaki tabloda bulunan miktarlara göre elde edilen gelir değerlerini hesaplayarak boş alanları uygun şekilde doldurunuz.

Satılan Ürün Sayısı	Gelir (TL)	Gider (TL)	Kâr/ Zarar (TL)
5		3000 TL	
10		3000 TL	
25		3000 TL	
50		3000 TL	
80		3000 TL	
100		3000 TL	

II. Satılan ürün sayısına göre işletmenin kâr/zarar durumu arasındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem oluşturunuz.

III. Dik koordinat sisteminde oluşturduğunuz denklemin grafiğini çiziniz. Grafiği inceleyerek işletmenin kâr etmeye başladığı durumun grafikte ne ifade ettiğini açıklayınız.

6 . Örnek

Bir telefon şirketi ödenecek ücret tarifesi olarak sabit bir aylık ücret ve belirli bir dakika başına ücretlendirme ile müşterilere sunulmaktadır. Bu tarifede sabit aylık ücret 60 TL ve konuşulan her dakika için 0,50 TL ek ücret alınmaktadır.

Buna göre

a) Konuşma süresine bağlı toplam ücret (y) ile konuşma süresi (x) arasındaki ilişkiyi ifade eden denklemi kurunuz.

b) 100 dakika konuşma için ödenecek toplam ücreti bulunuz.

c) 80 TL ödeme yapan bir kişinin kaç dakika konuştuğunu bulunuz.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denklemin grafiğini dik koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm

a) Konuşma süresi $x = 0$ dakika olduğu anda sabit ücret $y = 60$ TL' dir. Bu nedenle grafik y ekseni A(0, 60) noktasında keser. Konuşma süresindeki (x) her bir dakikalık artış, ödenecek ücrette (y) 0,50 TL'lik artışa sebep olacağından doğrunun eğimi 0,50'dir.

Buna göre konuşma süresine bağlı toplam ücreti gösteren denklem $y = 0{,}50x + 60$ biçimindedir.

b) Denklemde $x = 100$ yazılırsa $y = 0{,}50 \cdot 100 + 60 = 110$ TL olur. Başka bir deyişle 100 dakika konuşma için ödenecek ücret 110 TL'dir.

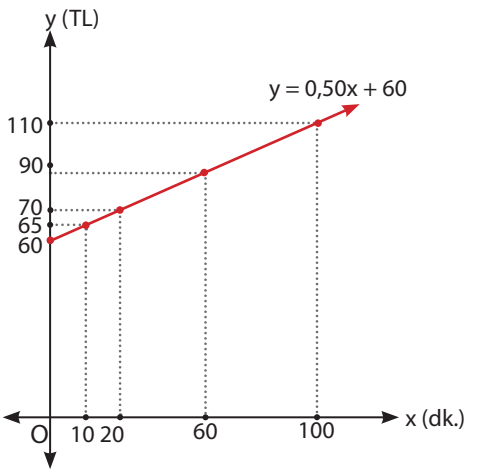
c) Denklemde $y = 80$ yazılırsa $80 = 0{,}50 \cdot x + 60 \Rightarrow x = 40$ olur. Yani bir kişi, 80 TL ödeme yapmışsa 40 dakika konuşmuştur.

ç) Dik koordinat sisteminde $y = 0{,}50x + 60$ ilişkisi x ekseni: konuşma süresi (dakika),

y ekseni: toplam ücret (TL) şeklinde temsil edilir. Bazı x değerleri için hesaplanan y değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Konuşma Süresi (x dk.)	Toplam Ücret (y TL)
0	60
10	65
20	70
60	90
100	110

Bu veriler kullanılarak oluşturulan denkleme ait grafik yandaki gibi çizilir:



7 . Örnek

Günlük yaşamda sıcaklık ölçümleri farklı birimlerle ifade edilebilir. Dünya genelinde çoğu ülkede sıcaklık birimi olarak Celsius [Selsiyus (°C)] kullanılırken, bazı ülkelerde ise Fahrenheit [Fahrenhayt (°F)] birimi tercih edilir. Bu iki birim arasında doğrusal bir ilişki vardır. Sıcaklığın Celsius değeri -5°C iken Fahrenheit değeri 23°F, Celsius değeri 10°C iken Fahrenheit değeri 50°F olmaktadır.

Buna göre

a) Celsius cinsinden sıcaklık (°C) ile Fahrenheit cinsinden sıcaklık (°F) arasındaki ilişkiyi temsil eden denklemi yazınız.

b) Bu ilişkiyi temsil eden denklemin grafiğini dik koordinat sistemi üzerinde çiziniz. (x: Celsius, y: Fahrenheit)

c) Yazdığınız doğruya ait eğim değeri, bu iki birim arasındaki ilişkiye dair nasıl bir bilgi verir? Açıklayınız.

ç) Saf suyun kaynama sıcaklığı Celsius cinsinden 100°C'tur. Bu değerin Fahreheit cinsinden karşılığını bulunuz.

Çözüm

Aşağıdaki tabloda sıcaklığın Celsius değeri ile bu değere karşılık gelen Fahrenheit değerinin sırasıyla apsis ve ordinat olarak alınmasıyla dik koordinat sisteminde karşılık geldikleri noktalar gösterilmiştir.

Celsius	Fahrenheit	Nokta
–5	23	A(–5, 23)
10	50	B(10, 50)

a) A(–5, 23) ve B(10, 50) noktalarından geçen doğrunun eğimi $\frac{50-(23)}{10-(-5)} = \frac{9}{5}$'tir.

Buna göre bu iki noktadan geçen doğrunun denklemi

$\frac{y-(23)}{x-(-5)} = \frac{9}{5} \Rightarrow 5y - 115 = 9x + 45 \Rightarrow y = \frac{9}{5}x + 32$ olarak bulunur.

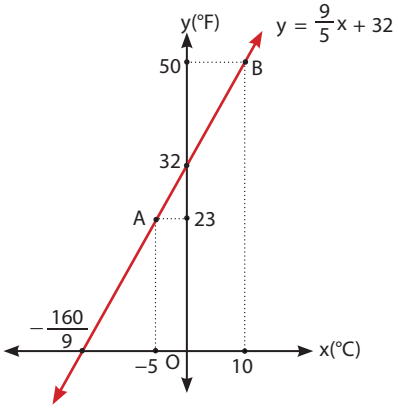
b) Denklemi $y = \frac{9}{5}x + 32$ olan doğruyu çizmek için doğru üzerindeki iki noktanın koordinatlarının belirlenmesi yeterlidir. Bunun için doğrunun eksenleri kestiği noktaların koordinatları kullanılabilir.

Buna göre

$x = 0$ için doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı $y = 32$

$y = 0$ için doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi $x = -\frac{160}{9}$ olarak bulunur.

Bulunan değerlere göre doğru yandaki gibi çizilir:



c) Eğimin $\frac{9}{5}$ olması, Celsius değerindeki 1 birimlik artışa karşılık Fahrenheit değerinin 1,8 birim arttığını ifade etmektedir. Fahrenheit ile Celsius sıcaklık birimlerinin farklı ölçüm aralıkları kullandığını ancak doğrusal bir şekilde ilerlediğini gösterir.

ç) Saf suyun Fahrenheit cinsinden kaynama sıcaklığını bulmak için $y = \frac{9}{5}x + 32$ denkleminde $x = 100$ değerine karşılık gelen y değeri bulunmalıdır.

Buna göre $x = 100 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \cdot 100 + 32 \Rightarrow y = 212$ olur.

6. Sıra Sizde

Atmosferde havadaki ses hızı, ortam sıcaklığına bağlı olarak değişir. 0 °C sıcaklıkta ses hızı 331,3 m/sn. olarak ölçülmüştür. Her 1°C sıcaklık artışında ses hızı 0,6 m/sn. artmaktadır.

Buna göre

a) Sıcaklık (x) ile ses hızı (y) arasındaki ilişkiyi ifade eden denklemi yazınız.

b) Yeryüzünden yükseklere çıkıldıkça her 100 metrede hava sıcaklığı 0,65 °C azalmaktadır. Deniz seviyesindeki hava sıcaklığının 15 °C olduğu bir bölgede 5000 metre yükseklikteki hava sıcaklığını ve buna karşılık gelen ses hızını hesaplayınız.

c) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sisteminde gösteriniz.

Proje Ödevi

Gerçek Yaşamda Doğruların Eğimi ve Konumları

Bu projede sizden gerçek yaşam durumlarından yola çıkarak doğruların eğimini ve birbirlerine göre konumlarını analiz etmeyi gerektiren bir problem tasarlamanız, bu problemi çözmek için matematiksel temsilleri (denklem, grafik) kullanmanız, farklı durumlara uyarlanabilir bir model oluşturmanız ve ödevinizi sınıfta sunmanız beklenmektedir.

Projeye başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

Proje planı yapınız: Çalışma takviminizi oluşturunuz ve ödevinizi iki hafta içerisinde öğretmeninize teslim ediniz.

Gerçek yaşam durumu seçiniz: Eğimin ve doğruların konumlarının önemli olduğu bir durumu belirleyiniz. (yol eğimleri, hava trafik rotaları, eğimli çatılar vb.)

Problemi oluşturunuz: Doğruların eğimi veya birbirine göre dik/paralel konumlarının inceleneceği bir problem tasarlayınız.

Projeyi yaparken aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

Doğruların eğimini belirleyiniz: Seçtiğiniz problemde doğruların eğimini hesaplayınız ve bunların problem bağlamındaki anlamını gerçek yaşamla ilişkilendirerek açıklayınız.

Konum analizini yapınız: Doğruların birbirlerine göre paralel mi, dik mi yoksa kesişen doğrular mı olduklarını belirleyiniz.

Grafik oluşturunuz: Doğruları dik koordinat sisteminde temsil ediniz ve analizlerinizi görselleştiriniz.

Modeli farklı durumlara uyarlayınız: Problemden elde edilen modeli başka gerçek yaşam durumlarında nasıl kullanabileceğinizi açıklayınız.

Proje raporunun aşağıdaki alt başlıkları içermesine dikkat ediniz:

Projenin Amacı: Gerçek yaşamda doğruların eğiminin ve konumlarının analizi için matematiksel araçları kullanmayı öğrenmek ve bu analizleri farklı problemlere uygulamak

Kullanılan Yöntem: Gerçek yaşam durumunu matematiksel bir modele dönüştürmek, doğruların eğimini hesaplamak, denklemlerini oluşturmak ve analiz etmek

Sonuçlar ve Uygulamalar: Problemin çözümü ve bu çözümün başka durumlara nasıl uyarlanabileceğini belirlemek

Projenizi sunmak için hazırlayacağınız modelde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

Adımları sırasıyla anlatınız: Problemi oluşturma, çözme ve sonuçlara ulaşma sürecinizi açıklayınız.

Görsellerle destekleyiniz: Doğruları temsil eden grafikler ve tablo verileri sununuz.

Dili etkili kullanınız: Türkçeyi açık, doğru ve etkili bir şekilde kullanınız.

Proje ödeviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

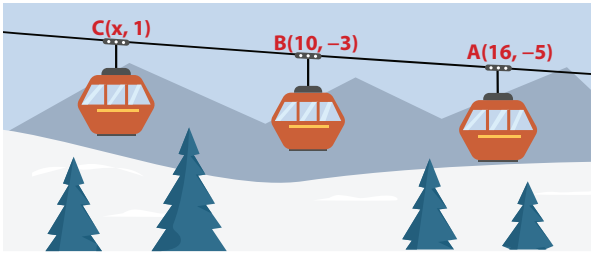
Konu ile ilgili video

Kontrol Noktası

1. Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bağıntısıyla hesaplanır.
2. Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde (saat yönünün tersi yönde) yaptığı açı, doğrunun eğim açısıdır.
3. Eğim açısının ölçüsü α ve eğimi m olan bir doğru için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:
   $\alpha < 90^\circ \Rightarrow m > 0$
   $\alpha > 90^\circ \Rightarrow m < 0$
   $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ m tanımsızdır.
   $\alpha = 0^\circ \Rightarrow m = 0$
4. Bir noktanın koordinatları, üzerinde bulunduğu doğrunun denklemini sağlar.
5. Dik koordinat sisteminde
   - Eğim açılarının ölçüleri eşit olan farklı iki doğru paraleldir.
   - Eğim açılarının ölçüleri farklı olan iki doğru kesişir.
   - Aynı iki noktadan geçen doğrular çakışıktır.
6. Eksenlere paralel olmayan ve dik kesişen doğruların eğimlerinin çarpımı –1'dir.
7. Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi
   a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olmak üzere $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ veya $m = \frac{y - y_2}{x - x_2}$ biçiminde yazılır.
   b) $y = mx + n$ biçiminde ifade edilen doğrunun denklemi, bu denklemde A ve B noktalarının koordinatları kullanılarak oluşturulan $y_1 = mx_1 + n$, $y_2 = mx_2 + n$ iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü yapılarak oluşturulur.
8. Eğim açısının ölçüsü α ve eğimi m olan bir doğru için $m = \tan\alpha$ dır.
9. Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğim açısının ölçüsü α olan doğrunun denklemi $\tan\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ biçiminde yazılır.
10. Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğrunun denklemi $x = x_1$, y eksenine dik olan doğrunun denklemi $y = y_1$ biçiminde yazılır.

Alıştırmalar

1. Bir kayak merkezinde teleferik kabinlerinin hareketi, dik koordinat sistemiyle modellenen bir bilgisayar programı tarafından takip edilmektedir. Teleferik, yandaki görseldeki gibi eğimli düz bir hat boyunca ilerlemektedir. Kabinlerin konumları (x, y) koordinatları ile ifade edilirken x kabinin aldığı yatay mesafeye, y ise kabinin aldığı dikey mesafeye göre değerler almaktadır.



Program; teleferikteki üç kabinin koordinatlarını görselde verildiği gibi A(16, –5), B(10, –3) ve C(x, 1) olarak belirlemiştir.

Buna göre

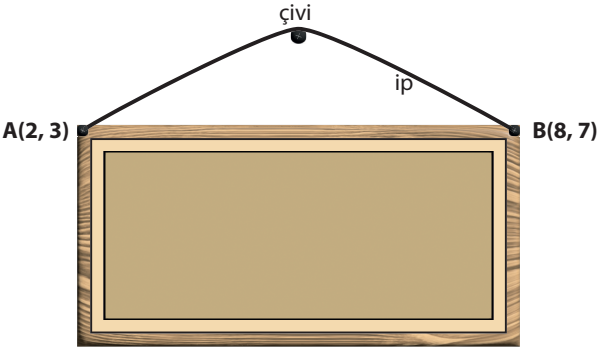
a) C noktasındaki kabinin apsisini gösteren x değerini bulunuz.

b) A noktasındaki kabin, B noktasına gelinceye kadar yatayda 24 metre ilerleyeceğine göre B noktasındaki kabinin C noktasına gelinceye kadar dikeyde kaç metre yükseleceğini bulunuz.

c) x ile y arasındaki ilişkiyi ifade eden denklemi yazınız.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

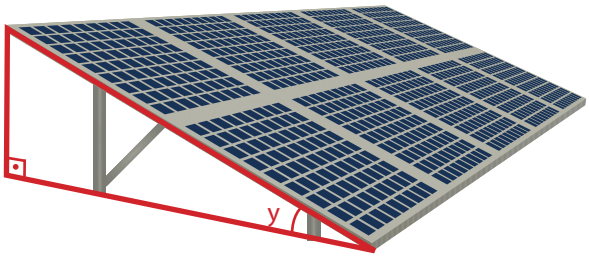
2. Bir tabloyu duvara asmak için tabloya bağlı ip dengeli bir şekilde çiviye takılmalıdır. İpin uçları, tablonun üst köşelerinde bulunan iki sabit noktaya takılır. İp çiviye takılarak denge noktası bulunur.



Ece, yukarıda görseli verilen tablonun duvarda dengeli ve düzgün durabilmesini sağlayan doğru konumu matematiksel olarak bulmak istemektedir. Bunun için dik koordinat sistemiyle modellediği programa gerekli verileri girmiş ve ipin tabloya takılı olduğu noktaları A(2, 3) ve B(8, 7) olarak belirlemiştir.

Buna göre çivinin A ve B noktalarına göre hangi doğrunun üzerinde olması gerektiğini ve bu doğrunun denklemini bulunuz.

3. Güneş enerjisinden azami şekilde faydalanmak için güneş panellerinin yerleştirileceği eğim açısı doğru bir şekilde belirlenmelidir. Yanda eğim açısının ölçüsü y olan bir güneş paneli görseli verilmiştir. 0 (sıfır) enlem değerine sahip Ekvator'da panel eğim açısının ölçüsü 3° olarak ayarlanırken enlem değerindeki her bir birimlik artış panelin eğim açısı ölçüsünde $0{,}9^\circ$lik bir artışa sebep olmaktadır.



Buna göre

a) Enlem değeri (x) ile panel eğim açı ölçüsü (y) arasındaki ilişkiyi temsil eden denklemi yazınız.

b) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

c) 36-42 kuzey enlemleri arasında bulunan Türkiye'deki şehirlerde güneş paneli eğim açısı ölçüsünün hangi değerler arasında olması gerektiğini belirleyiniz. Bir çevrim içi harita programı ile bulunduğunuz konumun enlem değerini bularak güneş paneli eğim açısının ölçüsünü hesaplayınız.

4. Bir sporcu, antrenman yaparken zamana bağlı olarak kalori harcamaktadır. Dakikada 12 kalori harcayan sporcunun antrenmanın başlangıcında metabolik faaliyetler nedeniyle 30 kalori harcadığı kabul edilmektedir.

Buna göre

a) Dakika türünden antrenman süresi (x) ile toplam harcanan kalori (y) arasındaki ilişkiyi temsil eden denklemi yazınız.

b) Sporcunun 45 dakika süren bir antrenman sonunda toplam kaç kalori harcadığını bulunuz.

c) Sporcu, toplamda 150 kalori harcamışsa antrenman süresinin kaç dakika sürdüğünü bulunuz.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

6. Tema alıştırma ek soruları

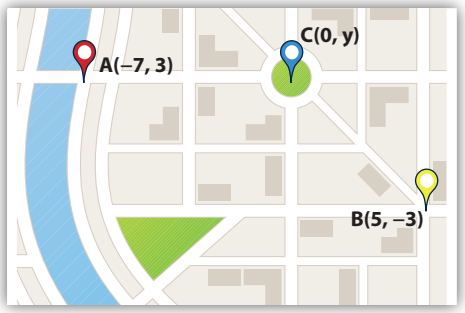
Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

6. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 10 soru verilmiştir.

1. Konumların dik koordinat sistemindeki noktalarla gösterildiği aşağıdaki haritada A(–7, 3) noktasında bulunan Atlas ile B(5,–3) noktasında bulunan Burcu, C(0, y) noktasında bulunan arkadaşları Cengiz'in yanına gitmek istemektedir. Bulundukları noktalardan eşit hızlarla aynı anda yola çıkan Atlas ve Burcu'nun yol boyunca hızları sabit kalmaktadır.

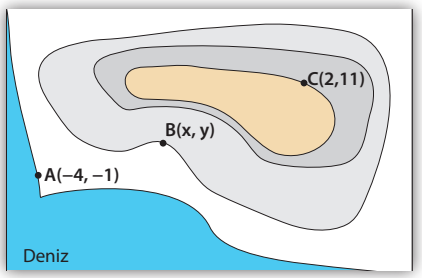


Doğrusal bir rotada ilerleyen Atlas ve Burcu, aynı anda Cengiz'in bulunduğu C noktasına ulaşmıştır.

Buna göre C noktasının ordinatını gösteren y değerini bulunuz.

2. Deniz seviyesinden itibaren aynı yükseltiye sahip noktaların birleştirilmesiyle elde edilen kapalı eğrilere izohips adı verilir. Aynı eğri üzerindeki bütün noktaların yükseltisi eşittir. Ardışık iki eğri arasındaki yükselti farkı haritanın tamamında aynıdır. Deniz seviyesinden geçen kıyı eğrisinin yükseltisi 0 (sıfır) metre olarak alınır.

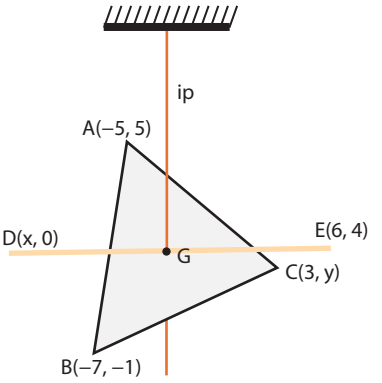
Aşağıda verilen dik koordinat sistemiyle modellenmiş izohips haritasında noktaların konumları sıralı ikililerle ifade edilmektedir.



Haritada bir yüksek gerilim hattının üzerinde aynı doğrultuda bulunan A(–4,–1), B(x, y) ve C(2, 11) noktaları işaretlenmiştir.

Buna göre B noktasının koordinatlarını bulunuz.

3. Bir cisim herhangi bir noktasından asılırsa bu noktadan geçen düşey doğrultu ağırlık merkezinden geçecek şekilde dengede kalır. Dik koordinat sistemiyle modellenen bir ortamda üçgen şeklindeki levha ve özdeş düz bir çubuk, iple tavana asılıyor. İp, levha ile çubuğun ağırlık merkezi olan G noktasından geçecek şekilde aşağıdaki şekilde



gösterildiği gibi cisimleri dengede tutmuştur.

Cisimlerin denge durumunda üçgenin köşelerinin koordinatları A(–5, 5), B(–7, –1), C(3, y); çubuğun uç noktalarının koordinatları D(x, 0) ve E(6, 4) olarak ölçülmüştür.

Buna göre x ve y değerlerini bulunuz.

4. Aşağıdaki şekilde dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir yerleşim yerinin haritası verilmiştir. Haritada birbirine paralel olan iki yol, kırmızı ve mavi doğrularla gösterilmiştir.

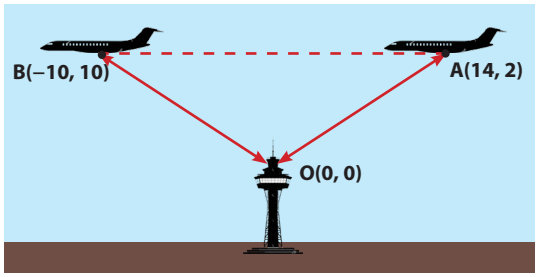
Denklemi y = 3x – 4 olan kırmızı doğrunun üzerinde A(5, a) noktası, mavi doğrunun üzerinde B(b,–5) ve C(7,10) noktaları gösterilmiştir.

Buna göre

a) a ve b değerlerini bulunuz.

b) Mavi doğrunun denklemini bulunuz.

5. Bir hava kontrol mühendisi, uçuş güvenliği ve planlaması için uçakların hareketini izlemektedir. Kullanılan bilgisayar programında kontrol edilen alan dik koordinat sisteminde modellenerek uçakların konumları sıralı ikililer ile gösterilmektedir. Bu modellemede kontrol kulesi O(0, 0) başlangıç noktası olarak alınmaktadır.
Aşağıdaki görselde aynı doğrultuda ilerleyen bir uçağın kontrol kulesine göre bulunduğu iki konum A(14, 2) ve B(–10, 10) olarak hesaplanmıştır.



Buna göre

a) Uçağın bu hareketi sırasında kuleye en yakın olduğu andaki konumunu belirleyiniz.

b) Uçağın bu doğrultuda ilerlerken bulunduğu bir konum C(5, y) ise y değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki şekilde dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir yerleşim yerinin haritası verilmiştir. Harita üzerinde bu yerleşim yerindeki yüksek hızlı genel ağ hattının geçtiği ve denklemi $y = -2x - 3$ olan AB ana hat doğrusu ile bir binayı temsil eden P(4, 1) noktası gösterilmiştir.

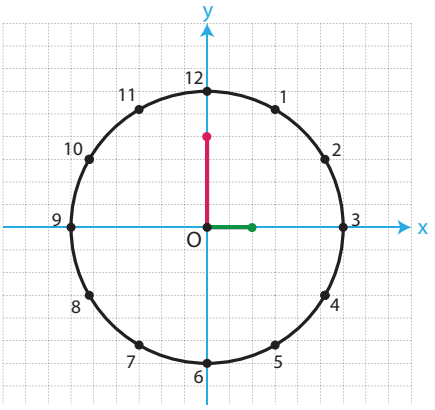
Binaya genel ağ bağlamak için ana hat ile bina arasına doğrusal bir kablo hattı döşenecektir.

Buna göre

a) Kablo hattının maliyetinin en az olması için üzerinde bulunması gereken doğrunun denklemini yazınız.

b) Döşenecek kablonun ana hat üzerinde bağlanacağı noktanın koordinatlarını belirleyiniz.

7. Aşağıda dik koordinat sistemi üzerinde modellenmiş dairesel bir saat görseli verilmiştir. Merkezi orijin ve yarıçapı 6 birim olan dairesel saatin kırmızı renkli yelkovanı 4 birim, yeşil renkli akrebi 2 birim uzunluğunda doğru parçalarından oluşmaktadır.



Buna göre

a) Saat 09.00'da akrep ile yelkovanın uç noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

b) Saat 13.30'da akrebin üzerinde bulunduğu doğrunun denklemini bulunuz.

c) Saat 19.20'de akrep ve yelkovanın üzerinde bulunduğu doğruların eğim açılarının ölçülerini bulunuz.

ç) Saat kaçı gösterdiğinde akrebin üzerinde bulunduğu doğrunun eğim açısının ölçüsünün 120° olacağını bulunuz.

d) Aşağıdaki tablo, saatin gösterdiği değerleri ve o anda akrep ile yelkovanın uç noktalarından geçen doğrunun eğiminin işaretini gösteren iki sütundan oluşmaktadır.

Buna göre tabloda boş bırakılan kısımları uygun şekilde doldurunuz.

Saatin Gösterdiği Zaman	Doğrunun Eğim İşareti
18.14	
15.52	
11.40	
20.20	

8. Bir geri dönüşüm tesisi, aldığı atıkların %60'ını geri dönüştürebilmektedir. Tesiste günlük toplanan atık miktarı (x kilogram) ile geri dönüştürülen malzeme miktarı (y kilogram) arasında doğrusal bir ilişki vardır.

Buna göre

a) Atık miktarı (x) ile geri dönüştürülen malzeme miktarı (y) arasındaki ilişkiyi ifade eden bir denklem oluşturunuz.

b) Günlük 500 kg atık toplandığında geri dönüştürülen malzeme miktarının kaç kg olduğunu bulunuz.

c) 240 kg geri dönüştürülen malzeme elde edilebilmesi için kaç kilogram atık toplanması gerektiğini hesaplayınız.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

9. Bir üretici, ürün başına maliyeti 20 TL olan bir üründen belirli sayıda üretmektedir. Aynı zamanda üretimin başlaması için 100 TL sabit maliyet (örneğin makinelerin kurulumu veya başlangıç giderleri) bulunmaktadır.

Buna göre

a) Ürün sayısı (x) ile toplam maliyet (y) arasındaki ilişkiyi ifade eden denklemi yazınız.

b) 50 ürün üretildiğinde toplam maliyetin kaç TL olacağını bulunuz.

c) Toplam maliyet 600 TL olduğunda kaç ürünün üretilmiş olacağını bulunuz.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

10. Bir cisim, sabit bir hızla doğrusal bir yol boyunca hareket etmektedir. Cisim başlangıçta referans noktasından 5 metre uzaklıkta (x = 0 anında y = 5 metre) bulunmaktadır ve sabit 2m/sn. hızla hareket etmektedir.

Buna göre

a) Zaman (x) ile konum (y) arasındaki ilişkiyi ifade eden denklem aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $y = 2x + 10$ B) $y = 2x + 5$ C) $y = 3x + 5$
D) $y = 3x + 10$ E) $y = 2x + 15$

b) Cismin 10 saniye sonra bulunduğu konumu hesaplayınız.

c) Cisim, y = 21 metre konumuna ulaştığında kaç saniye geçtiğini bulunuz.

ç) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

6. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

7. TEMA

VERİDEN OLASILIĞA

7.1. Koşullu Olasılık, Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

7.2. Bayes Teoremi

Anahtar Kavramlar

- **bağımlı olay**
- **bağımsız olay**
- **Bayes teoremi**
- **koşullu olasılık**

Sembol ve Gösterimler

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$
- $P(A|B)$

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, araştırma ödevini yapmanız, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz istenecektir.

7. Tema
Karekodu

7. Tema sunusuna
ulaşmak için
karekodu okutunuz.

Bu temada sizlerden

- koşullu olasılık ile çıkarım yapabilmeniz,
- bir olayın gerçekleşmesinin diğer bir olayın meydana gelmesine bağlı olduğu durumların olasılığını mevcut bilgiye/veriye dayalı tahmin edebilmeniz

beklenmektedir.

Başlarken

Olasılık hesaplamalarında tüm olayların birbirinden bağımsız olduğu varsayımı her zaman geçerli olmayabilir. Bazı durumlarda bir olayın gerçekleşmesi başka bir olayın sonucuna bağlı olabilir. Örneğin bir spor takımının galip gelme olasılığı, oyuncularının sakatlık yaşayıp yaşamamasına ya da rakip takımın gücüne göre değişir. Buna benzer birçok örnek, günlük hayattaki olası sonuçların başka koşullara bağlı olduğunu ve bu koşullar dikkate alındığında daha doğru tahminlerde bulunulabileceğini gösterir.

Ön Değerlendirme

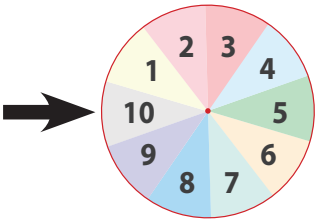
1. Aşağıda verilen olayların olasılık değerlerinin deneysel veya teorik olasılık yaklaşımından hangisi ile hesaplandığını cümlelerin başında yer alan yay ayraç içerisine olasılık yaklaşımı deneysel ise "D", teorik ise "T" yazarak belirleyiniz.

( ) Özden'in bir mağazada bulunan renkleri dışında özdeş kırmızı, beyaz, sarı ve mavi dört kazaktan birini seçme olasılık değeri $\frac{1}{4}$ 'tür.

( ) Bir torbada renkleri dışında özdeş mor, sarı ve pembe 3 top vardır. Gürol bu torbadan her seferinde çektiği topu geri koymak şartı ile art arda 8 kez top çekmiş, üç kez mor topu almıştır. Buna göre Gürol'un 9. çekilişte mor topu çekme olasılık değeri $\frac{3}{8}$ 'dir.

( ) Birbiri ile yeni tanışan iki kişiden birinin diğerinin doğduğu ayı doğru tahmin etme olasılık değeri $\frac{1}{12}$ 'dir.

( ) Aşağıda verilen üzerinde 1'den 10'a kadar sayıların bulunduğu eşit bölmeli çark 10 kez çevrilmiş, bu işlemde okun gösterdiği kısma 3 kez asal sayı gelmiştir. Buna göre çarkın 11. çevrilişinde asal sayıyı gösterme olasılık değeri $\frac{3}{10}$ 'dur.



2. Bir ekmek fabrikası 500 gramlık ekmekler üretmektedir. Üretimde her ekmekte en fazla 20 gram eksik veya 20 gram fazla olabilecek bir hata payı bulunmaktadır. Bu fabrikada bir günde üretilen ekmeklerin adet ve gramaj bilgileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Ekmeğin Gramajı	480 gram	490 gram	500 gram	510 gram	520 gram
Ekmek Adedi	50	120	26	64	40

Buna göre 301. ekmeğin gramajının 500 gram olmasının deneysel olasılık değerini bulunuz.

3. Büşra bir yarışmada kendisine sorulan sorulara doğru ya da yanlış cevaplar vermekte, bilmediği soruları da yanıtlamadan geçmektedir.

Yarışmada Büşra'ya art arda 2 soru sorulduğunda Büşra'nın sorulan iki sorudan birini doğru, diğerini yanlış cevaplama olasılık değerini bulunuz.

4. Günlük hayatta karşılaşılan birçok olay, olasılık hesapları temelinde gerçekleşir. Şehir içinde trafik ışıklarında kırmızı ışığa denk gelme, hava durumunun tahmini gibi olaylar birer olasılık örneğidir.

Günlük hayatta karşılaşılan olasılık hesabı gerektiren olayları sınıf arkadaşlarınızla tartışarak üç örnek belirleyiniz.

7.1. KOŞULLU OLASILIK, BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ OLAYLAR

Konuya Başlarken

Hilesiz sayı küpü deneyleri, olasılık ve istatistik çalışmalarında sıkça başvurulan yöntemlerden biridir. Bu deneylerde her yüzü eşit olasılıkla gelme şansına sahip altı yüzlü bir küp kullanılır. Küpün her bir yüzüne 1'den 6'ya kadar sayılar yazılır. Küp bir kez havaya atıldığında üst yüze küpte bulunan herhangi bir sayının gelme olayının teorik olasılık değeri $\frac{1}{6}$'dır.

Deneyde iki küp kullanılırsa olası tüm çıktı sayısı 36 olur. Bu deneyde birinci küp ve ikinci küpün üst yüzüne küpte bulunan herhangi bir sayı gelmesi istenirse bu olayın teorik olasılık değeri $\frac{1}{36}$ olacaktır.

Aşağıda hilesiz iki sayı küpünün atılması deneyine ait verilen iki durumu inceleyiniz.

1. Durum	2. Durum
Üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olması	Üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olduğu bilindiğinde küplerin üst yüzündeki sayıların aynı olması

Buna göre verilen durumlardaki olayları belirleyerek

1. **Olayların birbiri üzerine etkisi olup olmadığını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.**
2. **Olayların olasılık değerlerinin nasıl hesaplanabileceği hakkındaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**

1. Uygulama

Koşullu Olasılık ile Çıkarım Yapabilme

Aşağıda verilen problem durumuna göre soruları cevaplayınız.

"Bir kutuda renkleri dışında özdeş kırmızı, beyaz, mavi ve yeşil 4 top bulunmaktadır. Aslı bu kutudan önce bir top alır, sonra bu topu geri atmadan bir top daha alır. Aslı'nın aldığı ikinci topun beyaz renkte olmasının olasılık değerini bulunuz."

1. Aslı'nın aldığı birinci topun rengi, alacağı ikinci topun renginin beyaz olma olasılığını nasıl etkiler? Bu durumla ilgili varsayımlarda bulunup sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
2. Aşağıda problem durumu içinde verilen deneye ait olası tüm çıktıların yazılacağı bir tablo verilmiştir.

   a) Tabloda verilen örneklerden yararlanarak boş bırakılan alanları uygun şekilde doldurunuz.

1. Top \ 2. Top	Kırmızı (K)	Beyaz (B)	Mavi (M)	Yeşil (Y)
Kırmızı (K)	Çıktı yok.	KB		
Beyaz (B)		Çıktı yok.	BM	
Mavi (M)			Çıktı yok.	MY
Yeşil (Y)	YK			Çıktı yok.

   b) Yukarıdaki tablodan yararlanarak bulduğunuz olası tüm çıktıları ve ikinci topun beyaz olma durumuna ait çıktıları listeleyiniz.

3. Bulduğunuz olası tüm çıktıları ve ikinci topun beyaz olma durumuna ait çıktıları karşılaştırınız. Mevcut olasılık bilginizi kullanarak Aslı'nın alacağı ikinci topun beyaz olması olasılık değerini bulunuz.

4. Problem durumunda birinci çekilen top geri konulup daha sonra ikinci top çekilirse ikinci topun beyaz olma olayında olası tüm çıktıları bir tablo ile görselleştirip listeleyiniz.

5. 3 ve 4. sorularda oluşturduğunuz çıktı listelerini karşılaştırınız. Ortak olan çıktıları belirleyiniz.

6. İkinci topun beyaz olma olasılığının alınan birinci topun rengine bağlı olduğu gerçeğinden yola çıkarak bir olayın gerçekleşmesinin diğer bir olayın meydana gelmesine bağlı olduğu durumların olasılığını hesaplamaya yönelik matematiksel bir önerme oluşturunuz.

7. Verilen problemi oluşturduğunuz önerme yardımı ile çözünüz.

A ve B, aynı örnek uzayda gerçekleşen iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşmesi olasılığına A olayının B olayına göre koşullu olasılığı denir ve bu olasılık P(A|B) şeklinde gösterilir.

A olayının B olayına bağlı koşullu olasılık değeri

$$P(A|B) = \frac{\text{B olayının içinde gerçekleşmesi istenen A olayına ait çıktıların sayısı}}{\text{Gerçekleşmiş B olayının tüm çıktılarının sayısı}}$$

şeklinde hesaplanır.

1. Örnek

Üniversitenin matematik bölümündeki bir sınıfta 36 erkek, 24 kız öğrenci vardır. Sınıftan Erasmus+ programı için yurt dışına gidecek bir öğrenci seçilecektir. Bunun için yapılan yabancı dil sınavında erkeklerin yarısı, kızların üçte biri yeterli puanı alamamıştır.

Seçilen öğrencinin yabancı dil sınavından yeterli puan aldığı bilindiğine göre bu öğrencinin erkek öğrenci olmasının olasılık değerini bulunuz.

Çözüm

Sınıfta 36 erkek, 24 kız toplam 60 öğrenci vardır.

Erkeklerin yarısı yeterli puan alamadığından $36 \cdot \frac{1}{2} = 18$ erkek öğrenci başarısızdır.

$36 - 18 = 18$ erkek öğrenci başarılı olmuştur.

Kızların üçte biri yeterli puan alamadığından $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$ kız öğrenci başarısızdır. $24 - 8 = 16$ kız öğrenci başarılı olmuştur.

Bu veriler tablo yardımı ile aşağıdaki gibi görselleştirilir:

	Kızlar	Erkekler	Toplam
Başarılı Olanlar	16	18	34
Başarılı Olamayanlar	8	18	26
Toplam	24	36	60

1. yol

Yukarıdaki tabloya göre turuncuya boyanmış hücreler yabancı dil sınavından yeterli puan alan öğrencileri göstermektedir. Sınıfta yabancı dil sınavından başarılı olan 34 öğrenci vardır. Bu öğrencilerin 18 tanesi erkek öğrencidir. Bu durumda başarılı öğrencilerin içinden seçilen bir kişinin erkek öğrenci olmasının olasılık değeri $\frac{18}{34} = \frac{9}{17}$ olur.

2. yol

Sınıfta yabancı dilden başarılı olma olayı B, erkek öğrenci olma olayı A olsun . Başarılı öğrenciler içinden seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığı P(A|B) olmak üzere

$$P(A|B) = \frac{\text{B olayının içinde gerçekleşmesi istenen A olayına ait çıktıların sayısı}}{\text{Gerçekleşmiş B olayının tüm çıktılarının sayısı}}$$

$$= \frac{18}{34} = \frac{9}{17} \text{ olur.}$$

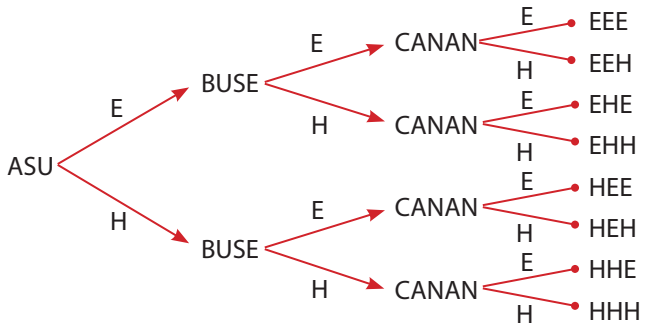
2. Örnek

Sıla, yanda görseli verilen Etnografya Müzesini en az iki arkadaşı ile ziyaret edecektir. Sıla arkadaşları Asu, Buse ve Canan'a müzeye birlikte gitmeyi teklif eder. Arkadaşları bu teklife "Evet" ya da "Hayır" diyerek cevap verirler.

Sıla'nın Etnografya Müzesini ziyaret ettiği bilindiğine göre bu geziye üç arkadaşı ile gitmiş olmasının olasılık değerini bulunuz.

Çözüm

Bu problem durumu aşağıdaki ağaç şeması ile görselleştirilmiştir. Şemada "Evet" için E, "Hayır" için H harfi kullanılmıştır.



1. yol

Sıla'nın müzeyi ziyaret ettiği bilindiğine göre en az iki arkadaşından "Evet" cevabı almıştır. Bu durum ağaç şemasında EEE, EEH, EHE, HEE ile listelenir.

Bu liste içinden 3 kişinin evet dediği 1 durum vardır.

Buna göre etnografya müzesini ziyaret ettiği bilinen Sıla'nın bu ziyareti üç arkadaşı ile yapmasının olasılık değeri $\frac{1}{4}$ olur.

2. yol

B: Teklife en az iki kişinin evet cevabını vermesi olayı

A: Teklife üç kişinin evet cevabını vermesi olayı olsun.

$$P(A|B) = \frac{\text{B olayının içinde gerçekleşmesi istenen A olayına ait çıktıların sayısı}}{\text{Gerçekleşmiş B olayının tüm çıktılarının sayısı}} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

3. Örnek

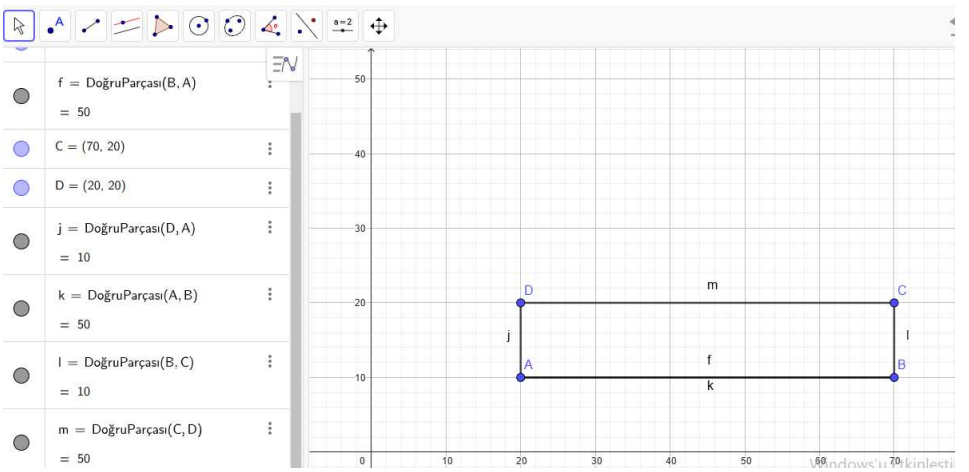
"Bir fırıncı A ve B marketlerinde satışa sunulması için bir günde 200 adet buğday, 300 adet çavdar ekmeği üretmektedir. Fırıncı buğday ekmeğinin $\frac{1}{4}$'ünü, çavdar ekmeğinin $\frac{2}{5}$'ini B; kalanlarını A marketine satılması için yolluyor. Fırıncının ürettiği ekmekler arasından seçilen bir ekmeğin B marketine yollanacağı bilindiğine göre bu ekmeğin buğday ekmeği olma olasılık değerini bulunuz. "

Yukarıda verilen koşullu olasılık içeren problem durumunu dijital görselleştirme aracı kullanarak alan modeli yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

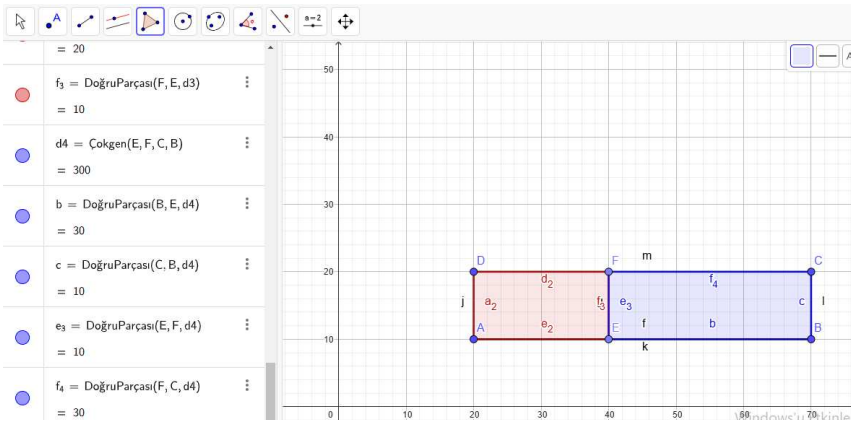
Matematik yazılımlarında **Geometri** alanında bir çalışma başlatılır.

1. Genişliği toplam ekmek sayısının onda biri (20 + 30 = 50 birim), yüksekliği 10 birim olan ABCD dikdörtgeni çizilir (Görsel 7.1).



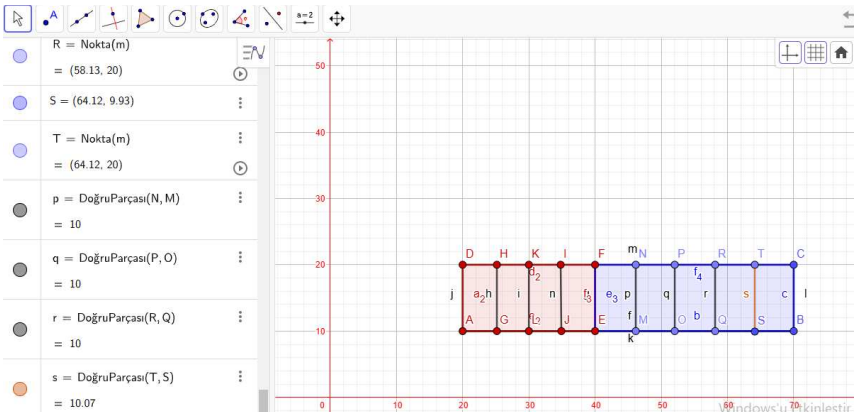
Görsel 7.1: *ABCD dikdörtgeni*

2. Bu dikdörtgen doğru parçası ile sol kısmın genişliği 20 birim, sağ kısmın genişliği 30 birim olacak şekilde ikiye ayrılır. Bunun için [AB] üzerinde IAEI = 20 birim olacak şekilde E noktası ile [CD] üzerinde ICFI = 20 birim olacak şekilde F noktası işaretlenir. [EF] çizilir. Böylece ADEF ve BCEF dikdörtgenleri elde edilir. Alanı buğday ekmeği sayısını veren ADEF dikdörtgeni kırmızı ile, çavdar ekmeği sayısını veren BCEF dikdörtgeni mavi ile boyanır(Görsel 7.2).



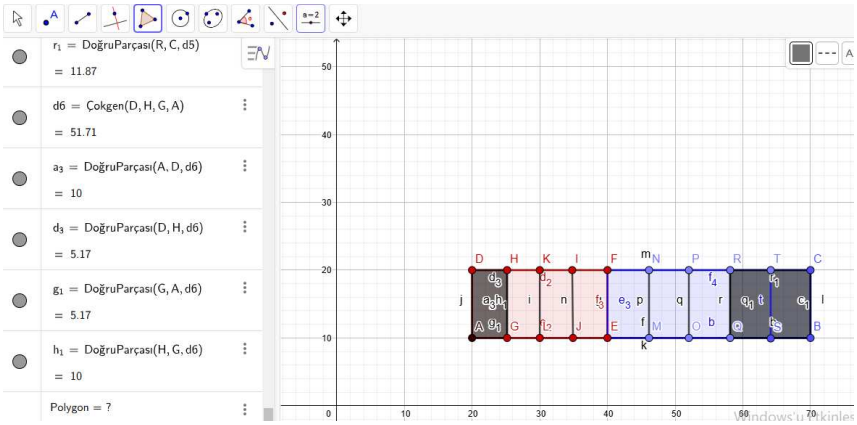
Görsel 7.2: *ADEF ve BCEF dikdörtgenleri*

3. [AE] ve [DF] nı 4 eş parçaya bölen G, L, J, H, K, I noktaları işaretlenir. G-H, L-K ve J-I noktaları birleştirilerek kırmızı alan her biri 50 br^2 olan 4 eş bölgeye ayrılır. [EB] ve [FC] nı 5 eş parçaya bölen M, O, Q, S, N, P, R, T noktaları işaretlenir. M-N, O-P, Q-R ve S-T noktaları birleştirilerek mavi alan her biri 60 br^2 olan 5 eş bölgeye ayrılır (Görsel7.3).



Görsel 7.3: *Dört eş alanlara bölünen ABEF ve 5 eş alana bölünen EFBC dikdörtgenleri*

4. Kırmızı alanlardan biri, mavi alanlardan ikisi siyah ile taranır. Taranan bölümler B marketine giden buğday ve çavdar ekmeklerini göstermektedir (Görsel 7.4).



Görsel 7.4: *B marketine giden buğday ve çavdar ekmeği*

5. B marketine yollanan buğday ekmeği sayısı kırmızı-siyah taralı bölge alanı ile, çavdar ekmeği sayısı mavi-siyah taralı bölge ile belirtilmiştir.

Kırmızı-siyah alan 50 br^2, mavi-siyah alan $2 \cdot 60 = 120$ br^2 olduğundan B marketine yollanan toplam ekmek sayısı $50 + 120 = 170$ tanedir. Buna göre

$$\frac{\text{B marketine yollanan buğday ekmeği sayısı}}{\text{B marketine yollanan toplam ekmek sayısı}} = \frac{50}{170} = \frac{5}{17} \text{ olur.}$$

1. Sıra Sizde

Turistleri taşıyan bir tur otobüsünde şoför ve rehber haricinde İngiliz ve Alman toplam 54 yolcu vardır. Bu yolcuların 26'sı kadındır. Kadınların 18'i Alman, erkeklerin 16'sı İngiliz'dir. Tur rehberi, tur hakkında kısa bir görüş almak üzere turistlerden birini seçer.

Buna göre seçilen bir turistin

1. **İngiliz olduğu bilindiğine göre kadın olma olasılık değerini bulunuz.**

2. **Erkek olduğu bilindiğine göre Alman olma olasılık değerini bulunuz.**

2. Sıra Sizde

Özgür ile Mehmet birlikte tavla oynuyorlar. Oyunda bir oyuncu rakibi kendi taşlarından hiçbirini almadan bütün taşlarını toplarsa 2 puan, rakibi kendi taşlarından en az birini aldığında bütün taşlarını toplarsa 1 puan alıyor. Herhangi bir oyuncu en az 2 puan aldığında ise karşılaşma tamamlanıyor.

Buna göre

1. **Karşılaşmayı Mehmet'in kazanmasının olasılık değerini bulunuz.**

2. **Karşılaşmayı Mehmet'in kazandığı bilindiğine göre ilk oyunda Özgür'ün 1 puan almasının olasılık değerini bulunuz.**

3. Sıra Sizde

Aşağıda verilen problem durumunu matematik yazılımı kullanarak alan modeli ile görselleştiriniz ve çözünüz.

''Bir ilde avukat ve doktor farklı iki meslek grubundan kişiler bir araya gelerek sürdürülebilir yaşamı destekleyen bir dernek kurmuşlardır. Dernekte 120 avukat, 80 doktor çalışmaktadır. Dernek yönetimi 'Çevresel Sürdürülebilirliğe Mesleki Katkı'projesi çerçevesinde üyelerine anket uygulamış, anket sonucunda avukatların %80'inin , doktorların %90'ının çevreye karşı duyarlı olduğu saptanmıştır."

Buna göre etkinlikte konuşma yapması için seçilen üyenin çevreye karşı duyarlı olduğu bilindiğine göre doktor olma olasılık değerini bulunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Olasılık problemlerini çözebileceğiniz, genel ağda bulunan ve kullanıma hazır dijital görselleştirme araçlarını ve istatistik yazılımları kullanarak olasılık problemlerinin hesaplanıp hesaplanamayacağını araştırınız.
- Olasılık problemlerini çözebileceğiniz, genel ağda bulunan ve kullanıma hazır dijital görselleştirme araçlarını kullanarak örnek uygulamalar yapınız.
- Araştırma ödeviniz, öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.
- Çalışmanızı 2 hafta içinde öğretmeninize teslim ediniz.
- Çalışmanız öğretmeniniz tarafından analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.
- Çalışma sonunda karekodda verilen öz değerlendirme formunu doldurunuz.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Öz değerlendirme formu

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı 1

Konu ile ilgili çalışma kâğıdı 2

2. Uygulama

Bağımlı ve Bağımsız Olayların Tespiti

İki olaydan herhangi birinin olasılığı diğer olayın gerçekleşmesine bağlı olarak değişmiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar, değişiyorsa bağımlı olaylar denir.

Aşağıdaki tabloda verilen olasılık cümlelerinde geçen olaylar A ve B olayı olarak isimlendirilmekte ve bu olayların birbirine göre durumları incelenmektedir.

Buna göre

1. Tabloda verilen örnekten yararlanarak boş alanları uygun şekilde doldurunuz.

2. Tablonun son iki satırına bağımlı ve bağımsız olaya örnek olabilecek iki olasılık cümlesi yazınız.

Olasılık Cümlesi	A Olayı	B Olayı	Bağımlı Olay	Bağımsız Olay
Ehliyet sınavına giren Kaan ve Mehmet'in sınavı kazanma olayının olasılık değerleri sırasıyla $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{3}$ 'tür. Buna göre bu sınavı Kaan'ın kazanıp Mehmet'in kazanmama olayının olasılık değeri kaçtır?	Kaan'ın sınavı kazanması	Mehmet'in sınavı kazanmaması		✓
Bir torbada renkleri dışında özdeş 3 kırmızı ve 4 yeşil top vardır. Geri koymamak şartıyla art arda seçilen iki toptan birincinin kırmızı, ikincinin yeşil olmasının olasılık değerini bulunuz.				
Bir kutuda 1'den 10'a kadar numaralandırılmış özdeş on adet kart vardır. Geri koymak şartıyla art arda seçilen iki kartın birincisinin asal sayı ile numaralandırılmış kart, ikincisinin tek sayı ile numaralandırılmış kart olmasının olasılık değerini bulunuz.				
			✓	
				✓

3. Uygulama

Bağımsız Olayların Olasılıklarını Hesaplama

"Bir torbada üzerinde 1'den 10'a kadar numaraların bulunduğu özdeş 10 adet kart vardır. Çekilen kart geri atılmak koşulu ile torbadan art arda iki kart çekildiğinde birinci kartın üzerindeki sayının 6'dan küçük, diğerinin asal sayı olma olasılığını bulunuz."

Yukarıda bir problem durumu verilmiştir. Buna göre soruları cevaplayınız.

1. Bağımsız olayların olasılık değerinin hesaplanması ile ilgili varsayımlarda bulununuz.

2. Birinci kartın 6'dan küçük olması A olayı, ikinci kartın asal olması B olayı olarak adlandırıldığında A ile B olaylarının olası çıktılarını listeleyiniz.

3. A ve B olaylarının olası çıktıları ile tüm olayın olası çıktısını karşılaştırınız.

4. A ve B bağımsız olaylarının olasılıklarını ayrı ayrı hesaplayarak $A \cap B$ olayının olasılığına ilişkin matematiksel bir önerme oluşturunuz. Bağımsız olayların olasılık değerinin hesaplanması ile ilgili önermenizi sununuz. Önermenizi matematik temsili ile ifade ediniz.

5. Önermeyi kullanarak verilen problem durumunu çözünüz.

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

A ve B bağımsız iki olay olmak üzere $A \cap B$ olayının olma olasılığı, A olayının olma olasılığı ile B olayının olma olasılığının çarpımıdır.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olmalıdır.

4. Örnek

Hilesiz bir sayı küpü havaya atılıyor.

Buna göre üst yüze gelen sayının

a) 2'den büyük ve tek sayı olmasının olasılık değerini bulunuz.

b) 2'den büyük veya tek sayı olmasının olasılık değerini bulunuz.

Çözüm

Hilesiz bir sayı küpü atıldığında 2'den büyük olma olayı A, tek sayı olma olayı B olsun.

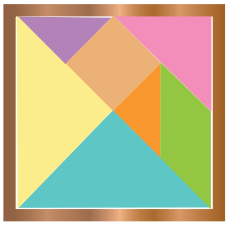
A olayı için üst yüze 3 4 5 6 , B olayı için üst yüze 1 3 5 gelmelidir.

Bu durumda $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

a) Küpün üst yüzüne 2'den büyük ve tek sayı gelme olayı $A \cap B$ olarak ifade edilir. Buna göre $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ olur.

b) Küpün üst yüzüne 2'den büyük veya tek sayı gelme olayı $A \cup B$ olarak ifade edilir. Buna göre $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ bulunur.

5. Örnek



Yanda yedi adet geometrik şekilden oluşan parçalarla farklı formlar oluşturma oyunu olan tangram ve bu parçalarla yapılmış bir kuş formunun görseli bulunmaktadır.

Matematik Öğretmeni Gülhan Hanım, yandaki görselde bulunan kuş formunu 20 saniye veya altında yapan öğrencilerine ödül vereceğini söylemiştir. Öğrencilerinden Ferda'nın ödül alma olasılığı $\frac{1}{3}$, Zehra'nın ödül alma olasılığı $\frac{2}{5}$ 'tir.

Buna göre

a) Ferda ve Zehra'nın birlikte ödül alması olasılık değerini bulunuz.

b) Ferda ve Zehra'dan sadece birinin ödül alması olasılık değerini bulunuz.

c) Öğrencilerden sadece bir kişinin ödül aldığı bilindiğine göre ödül alan kişinin Zehra olmasının olasılık değerini bulunuz.

Çözüm

a) Ferda'nın ödül alma olayı A ile Zehra'nın ödül alma olayı B, bağımsız olaylardır. İki olayın aynı anda olma olasılığı $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ 'tir.

b) Öğrencilerden sadece birinin ödül alması, "Ferda ödül alırken Zehra alamaz ya da Zehra ödül alırken Ferda ödül alamaz." demektir.

Ferda'nın ödül alma olasılığı $\frac{1}{3}$ ise ödül alamama olasılığı $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 'tür.

Zehra'nın ödül alma olasılığı $\frac{2}{5}$ ise ödül alamama olasılığı $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 'tir.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3+4}{15} = \frac{7}{15}$$

Ferda'nın ödül alma olasılığı	Zehra'nın ödül alamama olasılığı	Ferda'nın ödül alamama olasılığı	Zehra'nın ödül alma olasılığı

c) Öğrencilerden sadece birinin ödül alma olayı B, Zehra'nın ödül alma olayı A olsun. Öğrencilerden sadece birinin ödül aldığı bilindiğine göre ödül alan kişinin Zehra olma olasılığı $P(A|B)$ ile gösterilir.

$$P(A|B) = \frac{\text{Sadece bir öğrencinin ödül aldığı durumlarda ödül alan kişinin Zehra olma olasılığı}}{\text{Sadece bir öğrencinin ödül alma olasılığı}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{7}$$

4. Sıra Sizde

Okçuluk turnuvasında yarışan Fırat'ın her atış yaptığında hedefi vurmasının olasılık değeri $\frac{3}{5}$ 'tir. Fırat 3 atış yapıyor.

Buna göre

a) İlk iki atışta hedefi vurup üçüncü atışta vuramama olayının olasılık değerini bulunuz.

b) Üç atıştan en az birinde hedefi vurma olayının olasılık değerini bulunuz.

c) Fırat'ın sadece bir atışta hedefi vurduğu bilindiğine göre hedefi vurduğu atışın ikinci atış olma olasılık değerini bulunuz.

5. Sıra Sizde

Tamir edilmek üzere servise getirilen 50 aracı inceleyen ustalar araçların %40'ının motorunda, diğerlerinin de yazılımında arıza olduğunu tespit etmiştir. Motor arızası olan araçların 7 tanesi, yazılım arızası olan araçların yarısı garanti kapsamında olmak üzere tüm araçlar tamir edilmiştir. Garanti kapsamı dışında kalan araçların tamir ücreti araç sahiplerinden tahsil edilmiştir.

Buna göre servise gelen bir araç rastgele seçildiğinde

a) Aracın motor arızası olan ve garanti kapsamında tamir edilen araç olmasının olasılık değerini bulunuz.

b) Aracın yazılım arızasına sahip olduğu bilindiğine göre garanti kapsamı dışında tamir edilmiş olmasının olasılık değerini bulunuz.

Kontrol Noktası

Koşullu Olasılık

Aynı örnek uzayda gerçekleşen iki olaydan ikinci olayın gerçekleşmesi birinci olaya bağlı ise bu olasılığa koşullu olasılık denir ve

$$P(A|B) = \frac{\text{B olayının içinde gerçekleşmesi istenen A olayına ait çıktıların sayısı}}{\text{Gerçekleşmiş B olayının tüm çıktılarının sayısı}}$$ şeklinde hesaplanır.

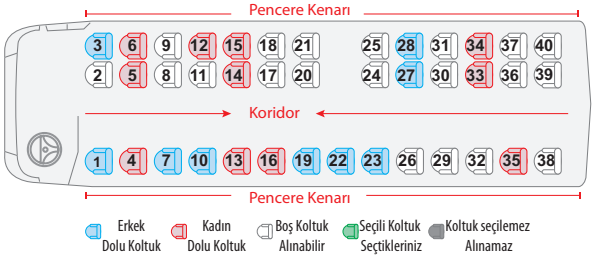
Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

İki olaydan herhangi birinin olasılığı diğer olayın gerçekleşmesine bağlı olarak değişmiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar, değişiyorsa bağımlı olaylar denir.

A ve B bağımsız iki olay olmak üzere $A \cap B$ olayının olasılık değeri A olayının olasılık değeri ile B olayının olasılık değerinin çarpımıdır. Buradan $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olmalıdır.

Alıştırmalar

1. Melek ile Nihat bir yarışmaya katılmak için bulundukları ilden İstanbul'a otobüs ile seyahat edeceklerdir. Bilet alacakları otobüsün web sitesinde koltuklarının boş veya dolu olma durumunu gösteren görsel aşağıda verilmiştir.



Nihat tek kişilik koltuklardan birini, Melek ise yan yana ve ikisi de boş olan ikili koltuklardan birini veya ikili koltuklardan kadın yanı olanı tercih etmektedir.

Buna göre her ikisinin de numarası asal sayı olan koltukta oturma olasılığını hesaplayınız.

2. Teknolojik ürünlerin üretildiği bir fabrikada her gün 80 adet cep telefonu, 120 adet tablet üretilmektedir. Üretim sonunda yapılan kontrollerde bir günde üretilen cep telefonlarının %5'inin ve tabletlerin %10'unun hatalı olduğu tespit edilmiştir.

Buna göre

a) Gün sonunda seçilen bir ürünün cep telefonu olduğu bilindiğine göre hatalı olması olasılık değerini bulunuz.

b) Seçilen bir ürünün hatasız ve tablet olması olasılık değerini bulunuz.

c) Fabrika hatalı ürün sayısını azaltmak için günlük cep telefonu ve tablet üretim miktarını yarıya indirmiş ancak hatalı ürün oranında değişiklik olmamıştır. Bu durumda seçilen bir ürünün hatalı bir cep telefonu olması olasılık değerini bulunuz.

3. İki bloktan oluşan bir sitede binaların dış cepheleri boyanacaktır. Site yöneticisinin binaların bir haftada boyanması için görüştüğü iki boyacıdan birincisi %80, ikincisi %75 oranında işi zamanında bitirebileceğini söylemiştir.

Yönetici binalardan birini birinci boyacıya, diğerini ikinci boyacıya boyatmaya karar verdiğine göre

a) İki binanın da istenen zamanda boyanma olasılık değerini bulunuz.

b) Binalardan sadece birinin zamanında boyanma olasılık değerini bulunuz.

c) Binalardan sadece birinin zamanında boyandığı bilindiğine göre bu binanın ikinci bina olmasının olasılık değerini bulunuz.

4. Bir şarküteri sahibi dükkânında satmak için iki farklı peynir üreticisinin birincisinden 50 kg, ikincisinden 100 kg peynir almıştır. Aldığı peynirlerden birinci üreticinin ürününün $\frac{1}{10}$ kg'ı koyun, kalanı inek; ikinci üreticinin ürününün $\frac{1}{5}$ kg'ı koyun, kalanı inek peyniridir.

Buna göre şarküteriden rastgele 1 kg peynir alan tüketicinin inek peyniri aldığı bilindiğine göre bu peynirin birinci üreticinin ürünü olmasının olasılık değerini bulunuz.

7. Tema alıştırma ek soruları

7.2. BAYES TEOREMİ

Konuya Başlarken

İnsan vücudunda bulunan demir miktarının belirlenmesi için kan testi yapılır. Kan testine göre kandaki demir oranı 37 ug/dL altında kalan hastaya "demir eksikliği anemisi" teşhisi konur. Bu test demir eksikliği anemisi hastası olanların %90'ında, hasta olmayanların %15'inde pozitif sonuç vermektedir. Buna göre kanındaki demir değeri 35 ug/dL ile normal düzeyin altında kalan bir birey için "kesinlikle demir eksikliği anemisi hastası" teşhisi konulabilir mi?

Yaşadığı ilin hava durumu tahminini inceleyen bir kişi saat 16.00 - 17.00 arasında yağmur yağma olasılığının %80 olduğunu öğrenmiştir. Ancak hava durumu tahmini yapan kurum tahminlerinde %20 oranında hata olabileceğini açıklamıştır. Bu yeni bilgi ile olasılık durumu güncellendiğinde belirtilen saatlerde yağmur yağma olasılık değeri değişir mi?

Yukarıdaki iki paragrafta belirsizlik içeren gerçek yaşam durumları için mevcut bilgiye dayalı olasılık değerleri verilmiştir. Bu olasılık değerleri edinilen yeni veriler ile değişiklik göstermeli midir?

Konu ile ilgili düşüncelerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

4. Uygulama

Bir Olayın Olasılığının Yeni Verilerle Güncellenmesi

Sınıfta öğretmeniniz rehberliğinde üç gruba ayrılınız. Aşağıda verilen problem durumunu inceleyiniz. Bu problem durumuna göre soruları grup çalışması ile cevaplayınız.

Alzaymır; hafıza kaybına ve düşünme yeteneğinin azalmasına yol açan, unutkanlık belirtisi ile öne çıkan, ilerleyen aşamalarda kişinin günlük basit aktivitelerini ve işlerini bile yapamamasına neden olan bir beyin hastalığıdır. 65 yaş üzeri bireylerde bu hastalığın görülme oranı %10'dur.

Alzaymır belirtileri, bir grup araştırmacı tarafından bulunan kan testi ile mevcut diğer yöntemler kadar güvenilir bir şekilde tespit edilebilmektedir. Bu kan testine göre hasta olan bir bireyin testi %80 oranında, sağlıklı bir bireyin testi ise %10 oranında pozitif sonuç vermektedir.

Buna göre 65 yaş üzerinde bireylerin bulunduğu 400 kişilik bir huzurevinde

1. Bir bireyin alzaymır teşhisi alma olasılık değerini bulunuz.
2. Test sonucu pozitif olan bir bireyin gerçekten alzaymır olma olasılık değerini bulunuz.
3. Verilen problem durumu için aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. adım: Problemde yer alan verileri mevcut bilgilerinizi kullanarak ağaç şeması , iki yönlü sıklık tablosu ve alan modeli ile görselleştiriniz.

1. Grup Ağaç Şeması	2. Grup İki Yönlü Sıklık Tablosu	3. Grup Alan Modeli

2. adım: Verilen problemleri bir önceki adımda oluşturduğunuz görselleştirmelerden yararlanarak Bayes teoremine dayalı hesaplamalar aracılığı ile çözünüz.

3. adım: Yapılan çalışmalar sonucunda testin hasta olan bireylerdeki pozitiflik oranı %80'den %90'a yükselirse olasılık değerinde nasıl bir değişim gözlenir? Sınıf arkadaşlarınızla nezaket kuralları çerçevesinde tartıştıktan sonra yargıda bulununuz.

6. Örnek

"Bir fabrikada üretim bandındaki ürünler beyaz, kırmızı, mavi ve siyah ambalajlarla rastgele paketlenmektedir. Paketleme sonrasında beyaz ve kırmızı paketlerin %5'inin, siyah ve mavi paketlerin %10'unun hatalı olduğu ortaya çıkmıştır. Bu fabrikada bir günde 200 beyaz, 300 kırmızı, 240 siyah ve 260 mavi ambalaj kullanılmıştır. Gün sonunda fabrikayı denetleyen uzman, paketlenen ürünlerin içinden bir ürün seçtiğinde alınan ürün paketinin hatalı olduğu bilindiğine göre bu ürünün kırmızı ambalajlı olma olasılığını hesaplayınız."

Yukarıdaki problemi ağaç şeması veya iki yönlü sıklık tablosu gibi farklı temsillerin herhangi biri ile görselleştirerek problem durumuna ait olasılık değerini hesaplayınız.

Çözüm

- Beyaz ve kırmızı ambalajların %5'i hatalı ise

  Beyaz ambalajlarda $200 \cdot \frac{5}{100} = 10$ hatalı, $200 - 10 = 190$ hatasız ürün;

  Kırmızı ambalajlarda $300 \cdot \frac{5}{100} = 15$ hatalı, $300 - 15 = 285$ hatasız ürün;

- Siyah ve mavi ambalajların %10'u hatalı ise

  Siyah ambalajlarda $240 \cdot \frac{10}{100} = 24$ hatalı, $240 - 24 = 216$ hatasız ürün;

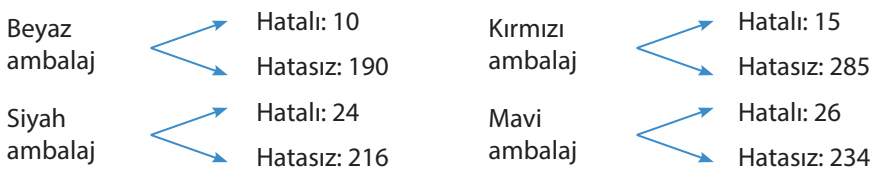
  Mavi ambalajlarda $260 \cdot \frac{10}{100} = 26$ hatalı, $260 - 26 = 234$ hatasız ürün paketlenmiştir.

Bulunan veriler iki yönlü sıklık tablosu ve ağaç şeması ile aşağıdaki gibi görselleştirilir:

İki Yönlü Sıklık Tablosu

	Beyaz	Kırmızı	Siyah	Mavi	Toplam
Hatalı	10	15	24	26	75
Hatasız	190	285	216	234	925
Toplam	200	300	240	260	1000

Ağaç Şeması



Paketlenen ürünlerin içinden bir ürün seçildiğinde alınan ürünün hatalı olduğu bilindiğinden bu ürünün kırmızı ambalajlı olma olasılığı tablo ve ağaç seması yardımı ile aşağıdaki gibi hesaplanır:

B: Ambalajı hatalı ürün olma olayı A: Kırmızı ambalajlı ürün olma olayı olmak üzere

ambalajı hatalı ürünün kırmızı ambalajlı olması olasılık değeri P(A|B) ile gösterilir.

$$P(A|B) = \frac{\text{Kırmızı ambalajlı hatalı ürünler}}{\text{Ambalajı hatalı olan ürünler}} = \frac{15}{10 + 15 + 24 + 26} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \text{ olur.}$$

7. Örnek

Nadire Hanım, oğlu Berkan'ın yemesi için manavdan çilek almıştır. Ancak Berkan bir miktar çilek yedikten sonra vücudunda kızarıklar oluşmuş, gittikleri doktor Berkan'a alerji testi yapılmasını istemiştir.Bu test; alerjisi olan bir bireyde %90, alerjisi olmayan bir bireyde %20 oranında pozitif sonuç vermektedir. Bu toplumda çileğe alerjisi olanların olasılığı %10'dur.

Buna göre test sonucu pozitif çıkan Berkan'ın gerçekte çilek alerjisi olma olasılık değerini bulunuz.

Çözüm

Toplumdaki kişi sayısı 100x birim olsun.

Bu toplumda bir bireyin çilek alerjisi olma olasılığı %10 olduğundan

$100x \cdot \frac{10}{100} = 10x$ kişinin çilek alerjisi vardır.

Çilek alerjisi olan 10x kişiye uygulanan test %90 olasılıkla pozitif sonuç verdiğinden

$10x \cdot \frac{90}{100} = 9x$ kişinin testi pozitif çıkacaktır.

Çilek alerjisi olmayan 90x kişiye uygulanan test %20 olasılıkla pozitif sonuç verdiğinden

$90x \cdot \frac{20}{100} = 18x$ kişinin testi pozitif çıkacaktır. Bu veriler yukarıda tablo ile görselleştirilmiştir.

Alerji Durumu / Test Sonucu	Alerjisi Olan	Alerjisi Olmayan	Toplam
Testi Pozitif Çıkan	9x	18x	27x
Testi Pozitif Çıkmayan	x	72x	73x
Toplam	10x	90x	100x

A: Çilek alerjisi olma olayı B: Test sonucu pozitif çıkma olayı olmak üzere testi pozitif çıkan birinin çilek alerjisi olması olasılık değeri P(A|B) ile gösterilir.

$$P(A|B) = \frac{\text{Testi pozitif olanların içinden alerjisi olan birey sayısı}}{\text{Test sonucu pozitif olan birey sayısı}} = \frac{9x}{27x} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

BAYES TEOREMİ

Bayes teoremi, 18. yüzyıl İngiliz matematikçisi Thomas Bayes'in (Tomıs Beys) adını verdiği koşullu olasılığı belirlemek için kullanılan matematiksel bir bağıntıdır. Teoremin temel mantığı, bir olayın olasılığını o olayla ilişkili başka bir olayın gerçekleşmesi durumunda güncellemektir. Bu teorem özellikle belirsizlik altında doğru kararlar vermek için kullanılır. Günlük hayatta tıbbi tanı testlerinde, meteorolojide hava tahminlerinde, fabrikalarda üretilen ürünün hatalı olma durumunun tespitinde Bayes teoremi kullanılır.

6. Sıra Sizde

Aşağıda verilen problem durumunu inceleyerek sorulara vereceğiniz cevapları sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
"Geri dönüşüm fabrikasının kâğıt toplama bölümünde çıkabilecek yangını erken saptamak için bir sistem kurulmuş, iş yerinde uygun bir bölüme alev sensörü yerleştirilmiştir. Sensör dumanı algıladığında iş yeri sahibinin telefonuna mesaj göndermektedir. Alev sensörünün bir yıl içinde gönderdiği on mesajdan dördünün doğru olduğu tespit edilmiştir. Sadece alev sensörünün yangın belirlemede verimli olmadığını düşünen işletme sahibi sisteme gaz sensörü de eklemiş ve sistemin yangını tespit etme olasılık değerini $\frac{9}{10}$ oranında artırmıştır."

Buna göre

a) Sadece alev sensörü ile yangının tespit edilme olasılık değerini bulunuz.

b) Sisteme gaz sensörü eklendikten sonra yangının tespit edilme olasılık değerini bulunuz.

c) Alev sensörü ve gaz sensörünün birlikte kullanıldığı sistemle aynı maliyete sahip tek bir X sensörü geliştirilir ve bu sensörün yangını tespit etme olasılık değeri %80 olursa hangi sistemin kullanılması daha uygundur? Sınıf arkadaşlarınızla nezaket kuralları çerçevesinde tartıştıktan sonra yargıda bulununuz.

Performans Görevi

Adı:	Bir Olayın Gerçekleşmesinin Diğer Bir Olayın Meydana Gelmesine Bağlı Olduğu Durumların Olasılığını Mevcut Bilgiye/Veriye Dayalı Tahmin Edebilme
Beklenen Performans:	Güncel yaşam durumlarına ait olasılık problemi oluşturma, problemi çözme ve çözüm yollarını sunma
Görev:	Tıbbi tarama testlerinin doğruluğu, meteorolojiyle ilgili ileriye dönük tahminler, bilinçli tüketime yönelik hatalı ürün oranlarını inceleyen risk analizleri gibi gerçek durum olasılık problemlerine ait 4 örnek problem kurgulamanız ve bu problemlerin sunumunu içeren dijital sunum hazırlamanız istenmektedir.
Yönerge:	**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bir çalışma planı oluşturunuz ve çalışmanızı bu planda belirtiniz. • Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz. **Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Bir olayın gerçekleşmesinin diğer bir olayın meydana gelmesine bağlı olduğu durumların olasılığını içeren 4 farklı örnek problem durumu belirleyiniz. • Oluşturulan problemlerin tümünü görselleştirerek çözünüz. • Problemler ve çözümlerini içeren dijital bir belge veya sunum hazırlayınız. • Çalışmanızı istikrarlı bir şekilde sürdürünüz. **Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:** • Çalışmanızı 3 ders saati sonunda öğretmeninize teslim ediniz.
Değerlendirme:	Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarı

Konu ile ilgili etkileşimli içerik

Kontrol Noktası

Belirsizlik içeren gerçek yaşam durumlarında mevcut bilgiye dayalı tahminlerin ya da yorumların toplanan veya verilen bilgilere bağlı olarak güncellenmesi gerekir. Bayes teoreminin temel mantığı, bir olayın olasılığını o olayla ilişkili başka bir olayın gerçekleşmesi durumunda güncellemektir.

Alıştırmalar

1. Beslenme biçimleri, metabolik rahatsızlıklar, yetersiz sıvı alımı ya da sıvı kaybı, bazı ilaçlar gibi pek çok etmen böbrek taşına neden olabilir. Türkiye'de bireylerde böbrek taşı görülme sıklığı yaklaşık %15'tir. Böbrekte taş olduğunu teşhis etmek için idrar tahlilinde lökositin pozitif olup olmadığına bakılır. Bunun için yapılan idrar tahlili hasta bireylerde $\frac{4}{5}$ oranında pozitif sonuç verirken hasta olmayan bireylerde de $\frac{2}{17}$ oranında pozitif sonuç vermektedir.

Böbrek taşı şüphesi ile idrar tahlili yapılan Enes'in testi pozitif çıktığına göre böbreğinde taş olması olasılık değerini bulunuz.

2. Bir araştırmaya göre Türkiye'de her yıl 11 milyondan fazla evin yıllık kullanımına eş değer miktarda su israf edilmektedir. Su ayak izi testi ile evsel su tüketim miktarı hesaplanabilir. Bunun için evde yaşayan kişi sayısı, aylık içme suyu tüketimi, evcil hayvanların varlığı, evde kullanılan aracın ne sıklıkla yıkandığı gibi bilgiler test ile değerlendirilerek hanenin su israfı yapıp yapmadığı tespit edilir.

Bir şehirdeki 1000 hanelik bir mahallede su ayak izi testi uygulanmış, hanelerin %70'inin suyu verimli kullanırken %30'unun ise suyu israf ettiği tespit edilmiştir. Verimli su kullananların %80'i, israf edenlerin %20'si A marka, kalan hanelerde B marka su saati kullanılmıştır.

Buna göre mahalleden seçilen bir hanenin su saatinin B marka olduğu bilindiğine göre suyu verimli kullanma olasılık değerini hesaplayınız.

3. Aflatoksin, özellikle kuru gıdalarda görülen küf mantarlarının oluşturduğu toksit bir maddedir. Yol açabileceği sağlık sorunları nedeniyle aflatoksinli ürünler sağlıklı ürünlerden ayıklanmalıdır. Kuru incir işletmelerinde toksinli incir ayrımları, karanlık odalardaki mor ışık altında gerçekleştirilir ve sağlıklı incirler hem yurt içi hem de yurtdışı pazarına sunulur.

Yurtdışına satış yapan bir firmanın ürünlerinin %8'inde aflatoksine rastlanmıştır. Bu firma, toksinli incirleri sağlıklı incirlerden ayıklamak için bir cihaz geliştirmiştir. Cihaz gördüğü aflatoksinli incirleri $\frac{3}{4}$ oranında tespit etmekte ancak sağlıklı ürünlerin $\frac{5}{23}$'ünü de aflatoksinli sanıp onları da ayıklamaktadır.

Buna göre seçilen bir ürünün cihaz tarafından aflatoksinli olduğu tespit edilmiş olmasına rağmen sağlıklı bir ürün olma olasılık değerini bulunuz.

4. Beyaz eşya üreten bir firma ürünlerinin kalitesini ölçmek için fabrika çıkışında ürünlerine bir dayanıklılık testi uygulamaktadır. Bu test sonucunda hatalı ürün %96 oranında tespit edilebilmekte ancak hatalı olmayan ürünlerin de %2'si hatalı gibi işlem görmektedir. Bu fabrikanın hatalı ürün üretme olasılığı %5'tir.

Buna göre fabrikada üretilen ve rastgele seçilen bir ürünün

a) Hatalı olduğu bilindiğine göre test sırasında tespit edilmeme olasılık değerini bulunuz.

b) Test sonucunda hatalı ürün olarak tespit edilmesine rağmen hatalı olmama olasılık değerini bulunuz.

5. Manyetik rezonans görüntüleme (MRI), beyin tümörü teşhisinde faydalanılan en iyi görüntüleme yöntemidir. Bu test beyninde tümör bulunan bir kişide tümörü %90 oranında tespit edebilmekte ancak sağlıklı bireylerin $\frac{1}{99}$'unda da beyin tümörü teşhisi koyabilmektedir. Yapılan araştırmalara göre ise Türkiye'de beyin tümörünün görülme sıklığı %1'dir.

Buna göre Türkiye'de teşhis konulan herhangi bir bireyin gerçekte beyin tümörü olma olasılık değerini bulunuz.

7. Tema alıştırma ek soruları

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

7. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait bilgi ve becerileri ölçen bağlam temelli toplam 8 soru verilmiştir.

1. Bir firma ürettiği peynirler hakkında tüketicinin beğenisini araştırmak için 200 kişilik bir gruba ürünün ilk çeşidini tattırmış, tüketicinin ürün hakkındaki düşüncelerini aşağıdaki tabloda göstermiştir.

Ürünün beğenilme olasılığını artırmak isteyen satış temsilcisi aynı ürünün ikinci çeşidini tüketiciye

	Beğeniyorum.	Fikrim yok.	Beğenmiyorum.
Kadın	70	30	20
Erkek	40	25	15

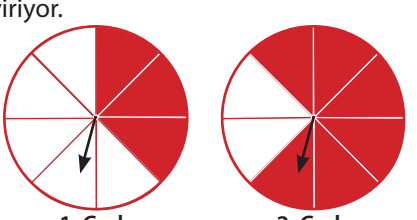
sunduğunda ilk ürünü beğenmeyen kadınların yarısı, fikri olmadığını belirten erkeklerin $\frac{1}{5}$'i ürünü beğendiklerini söylemiştir. Diğer tüketiciler ürün hakkındaki fikirlerini değiştirmemişlerdir.

Son duruma göre tüketici grubundan seçilen birinin ürünü beğendiği bilindiğine göre bu kişinin kadın olmasının olasılık değerini bulunuz.

2. Eyüp Öğretmen sınıfındaki öğrencilere matematik ve fizik dersinin sadece birinden performans görevi ya da proje ödevi vermiştir. Matematikten performans görevi ile fizikten proje ödevi alanların sayısı eşit ve altışar kişidir. Fizikten ödev alanların arasından seçilen bir kişinin performans görevi alma olasılık değeri $\frac{1}{4}$'tür.

Sınıftan seçilen bir kişinin performans görevi aldığı bilindiğine göre bu görevi matematik dersinden almasının olasılık değerini bulunuz.

3. Zeynep bir oyunda üzerinde 1'den 6'ya kadar sayıların bulunduğu hilesiz küpü havaya atıyor. Küp yere düştüğünde küpün üst yüzüne 4'ten büyük bir sayı gelirse aşağıdaki 1. çarkı, aksi hâlde 2. çarkı çeviriyor.



1. Çark 2. Çark

Zeynep'in çevirdiği çarkta ibrenin kırmızı bölümü gösterme olasılık değerini bulunuz. (Çarklar eşit bölmelere ayrılmıştır.)

4. Türkiye'nin tekstil sektöründe önemli bir merkezi olan Denizli ilinin tekstil endüstrisi özellikle pamuklu ürünler, ev tekstili ve hazır giyim alanlarında öne çıkmaktadır. İl genelindeki irili ufaklı pek çok tekstil atölyesinde üretilen havlular dünya pazarında yer bulmaktadır. Denizli'de bir havlu atölyesinde günlük üretilen havluların %30'u A tezgahında, %50'si B tezgahında, %20'si de C tezgahında dokunmaktadır. Ancak A, B ve C tezgahlarında dokunan bu havluların sırasıyla %1, %2 ve %3'lük kısmı hatalı ürün olmaktadır.

Bir günlük üretim sonunda alınan bir havlunun hatalı ürün olduğu bilindiğine göre bu havlunun B tezgahında dokunmuş olmasının olasılık değerini bulunuz.

5. Bir otomobil fabrikasında üretilen arabaların %70'i A, kalanı B model arabalardır. Üretilen arabaların $\frac{3}{5}$'i otomatik vites, kalanı da manuel viteslidir. A araçlarının %50'si manuel viteslidir.

Buna göre fabrikadan otomatik vites araç alan Efe'nin B model aracı almış olma olasılık değerini bulunuz.

6. Bir üniversitenin matematik bölümünde doktor öğretim üyesi, doçent ve profesör kadrosunda çalışan toplam 42 akademisyen vardır. Bu akademisyenlerin 20 tanesi doktor öğretim üyesi, 12 tanesi doçent, diğerleri de profesördür. Doktor öğretim üyesi ve doçentlerin dörtte biri, profesörlerin %20'si içinde bulunulan eğitim öğretim yılında lisans öğrencilerine ders vermemektedir.

Matematik bölümünde okuyan İlknur, koridorda selam verdiği akademisyenin dersine giren bir akademisyen olduğunu bildiğine göre bu kişinin doçent olmasının olasılık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{9}{32}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{25}{32}$

7. Aşağıda bir tiyatro salonuna ait 1'den 24'e kadar numaralandırılmış tek kişilik koltuklardan oluşan bölümün yerleşim planı verilmiştir.

17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Dila ile Ela üzerinde bu koltukların numaraları yazan iki ayrı bilet alıyorlar ve numaralara karşılık gelen koltuklara oturuyorlar. Her ikisinin de aldığı biletlerin numarasının 3 ile tam bölünemediği bilinmektedir.

Buna göre Dila'nın oturduğu koltuğun Ela'nın hemen arkasında bulunma olasılık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{5}{24}$ B) $\frac{5}{48}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{48}$

8. A, B ve C harfleri ile simgelenen üç farklı banka, müşterilerine sabit oranlı veya değişken oranlı olmak üzere iki çeşit taşıt kredisi teklif etmektedir. Burak Bey'in taşıt kredisi için A bankasını seçme olasılığı %20, B bankasını seçme olasılığı %30 ve C bankasını seçme olasılığı %50'dir. A,B ve C bankaları sırasıyla %40,%50 ve % 30 oranında sabit oranlı kredi; %60, %50 ve % 70 oranında değişken oranlı kredi vermektedir.

Burak Bey'in sabit oranlı kredi kullandığı bilindiğine göre bu krediyi C bankasından alma olasılık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{15}{58}$ D) $\frac{15}{38}$ E) $\frac{4}{5}$

7. Tema ek ölçme ve değerlendirme soruları

SÖZLÜK

A – B – C

ağırlık merkezi : Bir cismin tüm ağırlığının yoğunlaşmış olduğu varsayılan ve o noktada bir destek sağlandığında desteğin ucunda dengede duracağı nokta.

algoritma : Orta Çağ'da ondalık sayı sistemine göre son zamanlarda ise iyi tanımlanmış kuralların ve işlemlerin adım adım uygulanmasıyla bir sorunun giderilmesi veya sonuca en hızlı biçimde ulaşılması işlemi.

algoritmik yapı : Bir görevi tamamlamak için algoritmaların kullanılması.

almaç : Bir elektrik akımını alıp başka bir kuvvete çeviren cihaz; alıcı, reseptör.

analiz : Çözümleme.

anonim : Yazanı, yapanı, söyleyeni bilinmeyen.

apsis : Düzlemdeki bir noktayı belirten sıralı ikilinin birinci bileşeni.

azami : En çok, en üst, en büyük, en yüksek (derece, nicelik)

bilişim : İnsanoğlunun teknik, ekonomik ve toplumsal alanlardaki iletişiminde kullandığı ve bilimin dayanağı olan bilginin özellikle elektronik makineler aracılığıyla düzenli ve akla uygun bir biçimde işlenmesi bilimi; enformatik.

cebir : Sayılar yerine imler konularak sayısal işlemlerin genelleştirilmesi.

Ç – D – E – F

çevrim içi : Bir bilgisayarın sunucuya ve bilgisayar ağına bağlı olarak çalışır olma durumu.

çığır : Yeni bir biçim, yöntem veya yol.

çıkarım : Belli önermelerin kabul edilen veya gerçek olan doğruluklarından, yanlışlıklarından, başka önermelerin kabul edilen veya gerçek olan doğruluklarını, yanlışlıklarını çıkarma.

çizge : Bir işlevsel bağıntıyı gösteren eğri ya da sayısal verileri ve bunların değişimlerini gösteren biçim.

dağılım : Toplanan verilerin sayısal dökümü.

dekar : 1000 metrekare değerinde yüzey alan ölçü birimi.

döngü : Herhangi bir olayın birden fazla tekrarlanması.

eğilim : Bir şeyi sevmeye, istemeye veya yapmaya içten yönelme; meyil, temayül.

enstitü : Bir üniversiteye bağlı veya bağımsız bir kuruluş olarak genellikle araştırma yapan ve bazı durumlarda öğretime de yer veren eğitim kurumu.

etik : Ahlaki.

evren : Verilerin toplandığı en büyük küme.

G – Ğ– H –I – İ – J – K

gayrimenkul : Taşınmaz.

genelleme : Zihnin genel düşünceler üretmesi işlemi veya özelden genele geçiş, tamim.

güzergâh : Yol boyu.

ikon : Bir programı, veriyi, görüntüyü veya filmi simgeleyen ekran üzerindeki resimcik.

ilişkililik : İlişkili olma durumu.

inşa : Yapı kurma, yapı yapma, kurma.

istatistik : Bir sonuç çıkarmak için verileri bir yönteme göre toplayıp sayı olarak belirtme işlemi.

istihdam : Bir görevde, bir işte kullanma.

kaplama : Bir şeyin dışına süsleme veya koruma amacıyla geçirilen başka maddeden kat.

kâr : Satış fiyatının maliyet fiyatından fazla olma durumu.

kategori : Aralarında herhangi bir bakımdan ilgi veya benzerlik bulunan şeylerin tamamı; grup.

katsayı : Bir niceliğin kaç katının alındığını gösteren sayı.

koordinat : Dik koordinat sisteminde bir noktadan koordinat eksenlerine inilen dikmelerin ayaklarının başlangıç noktasına uzaklıklarını belirten sayılardan her biri.

köşegen : İki köşeyi birleştiren doğru parçası.

kubbe : Yarım küre biçiminde olan ve yapıyı örten dam.

L – M – N – O – Ö

lisans : Bu öğrenim sonunda elde edilen ve diploma ile belgelendirilen akademik derece.
logo : Bir kuruluşun, bir gazetenin vb. adının, simge özelliği bulunan, özel olarak hazırlanmış biçimi.
lökosit : Akyuvar.
maliyet : Üretimde bir mal elde edilinceye değin harcanan değerlerin toplamı.
nesne : Belli bir ağırlığı, kitlesi, oylumu, rengi, maddesi olan her türlü cansız varlık.
optimize : En iyi duruma getirme.
oran : Birimleri aynı olan iki sayı arasındaki karşılaştırma.
orantı : İki oranın birbirine eşitliği.
ordinat : Bir noktanın düzlemdeki yerini belirten sıralı ikilinin ikinci bileşeni.
orijin : Koordinat eksenlerinin kesişim noktası.
ölçüt : Bir yargıya varmak veya değer vermek için başvurulan ilke; ölçü, kıstas.
örneklem : Bir araştırmada bütünü anlamak için bütünden seçilen araştırma tekniklerinin uygulanacağı grup.
örüntü : Olay veya nesnelerin düzenli bir biçimde birbirini takip ederek gelişmesi.
özdeş : Her türlü nitelik bakımından eşit olan, aralarında fark bulunmayan; aynı.

P – R – S

paralel doğrular : Aynı düzlemde bulunan ve ara kesitleri boş küme olan iki doğru.
parsel : İmar yasalarına göre ayrılıp sınırlanmış arazi parçası.
platform : Ahşap, taş, metal vb. bir maddeden yapılmış, düz ve yüksekçe yer.
projektör : Yansıtım aygıtı.
referans : Karşılaştırma için başlangıç kabul edilen nokta veya yer.
sarkaç : Durağan bir nokta çevresinde ağırlığının etkisiyle serbestçe salınım yapan cisim.
sayı doğrusu : Üzerine gerçek sayıların yerleştirildiği doğru.
sıralı ikili : Birinci bileşeni a, ikinci bileşeni b olan (a, b) çifti.
strateji : İzlem.

Ş – T – U – Ü – V – Y – Z

şifre : Bir mesajın anlamını gizlemeye yarayan bir sistem.
şifreleme : Okunabilir durumdaki bir verinin içerdiği bilginin istenmeyen taraflarca anlaşılamayacak bir hâle dönüştürülmesinde kullanılan yöntemlerin tümü; kriptografi.
tasarruf : Tüketilecek herhangi bir şeyi dikkatli kullanma, idareli harcama.
tente : Genellikle güneşten korunmak için bir yerin üzerine gerilen bez, naylon vb.nden yapılmış örtü.
teorem : Doğruluğu kanıtlanabilen önerme.
tescil : Bir şeyi resmi olarak kaydetme, kütüğe geçirme.
veranda : Daha çok müstakil yapıların zemin katında yer ile aynı seviyede veya biraz yükseltilmiş, ön cepheyi kaplayan, üzeri bir çatıyla örtülü, yanları açık veya camlı büyükçe sundurma.
veri : Ölçüm, sayım, deney, gözlem veya araştırma yoluyla elde edilen toplanmış ve çözümlenmiş bilgi.
vizyon : İleri görüş.

KAYNAKÇA

Akyol, E. (2015). *Üzüntüyü Yenmenin Çareleri -Kindi Merkezli Bir İnceleme-. Yüksek Lisans Tezi, Hitit Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü,* Çorum.

Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis.* John Wiley & Sons.

Bello, I. (2009). *Basic college Mathematics (3rd ed.).* New York: McGraw-Hill Companies.

Baki,A. & Bütüner,S.Ö. (2011) *Cebirin Tarihsel Gelişimi. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education Vol.2No.3,* 198-231.

Çimen, C., Akleylek, S. ve Akyıldız, E. (2011). *Şifrelerin Matematiği Kriptografi.* Ankara: ODTÜ Yayınları.

David, S., Taubman, M. and Marcellin, W. (2002). *Image Compression Fundementals, Standards and Practice. Kluwer Academic Publishers*, Boston.

Dönmez, A. (2010). *Sabit bin Kurra'nın İkinci Derece Denklemlerinin Geometrik Çözümleri. Anadolu Bil Meslek Yüksekokulu Dergisi,* (18),12-23.

Erdoğan, İ. H. (1984). *Şair Matematikçi Ömer Hayyam. Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi,* 1(1), 167-170.

Ertekin, E. ve Ünlü, M. (Ed.). (2020). *Geometri ve Ölçme Öğretimi: Tanımlar, Kavramlar ve Etkinlikler. Ankara: Pegem Akademi.*

Genç, M., Karataş, İ. (2018). *Matematik Tarihinin Matematik Öğretimine Entegrasyonu: Hârezmî'nin Tamkareye Tamamlama Yöntemi, Kastamonu Eğitim Dergisi Ocak 2018 Cilt:26 Sayı:1* Kastamonu - TÜRKİYE.

Göker, L. (1997). *Matematik Tarihi ve Türk İslam Matematikçilerinin* Yeri. İstanbul: MEB Yayınları.

Güven, B., Özmen, Z. M., Gürbüz, R. ve Akkan, Y. (Ed.). (2023). *Teoriden Pratiğe Olasılık ve İstatistik Öğretimi*. Ankara: Vizetek.

Güzelyüz, A. (2011). *Ömer Hayyam'ın Eserlerine Bakış. İstanbul Üniversitesi Şarkiyat Mecmuası Sayı 19, 51-62.*

*James, J. (2017). Büyük Matematikçiler Euler'den Von Neumann'a. (*C. Öztürk, Çev.). İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

Lial, M. L., Hornsby, J., & McGinnis, T. (2012). *Beginning and intermediate algebra (5th ed.)*. Boston: Pearson Education.

McClave, J. T., & Sincich, T. (2018). *Statistics for Business and Economics (13th Edition)*. Pearson Education.

McKeague, C. P. (2010). *Basic Mathematics (7th ed.).* Belmont: Brooks/Cole Cengage Learning.

Miller, J., O'Neill, M., & Hyde, N. (2009). *Basic college mathematics (2nd ed.).* New York: McGraw-Hill Companies.

Moore, D. S., McCabe, G. P., & Craig, B. A. (2016). *Introduction to the Practice of Statistics (9th Edition)*. W.H. Freeman and Company.

Murdock, J., Kamischke, E., ve Kamischke, E. (2007). *Discovering Algebra: An Investigative Approach (2nd ed.).* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Sayılı, A., & Dosay, M. (1991). *Hârezmi ile Abdülham id İbn Türk ve Orta Asya'nın Bilim ve Kültür Tarihindeki Yeri. Erdem, 7(19),* 101-214

Serra, M. (2008). *Discovering Geometry: An Investigative Approach. Emeryville*, CA: Key Curriculum.

Sullivan, M. (2012). *Algebra&Trigonometry. Chicago State University.*

Takıcak, B. S. (2017). Osmanlılar'da Analitik Geometri: Hendese-i Halliyye ve Hendes-i Tahliliyye. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2019). *PISA Türkiye Raporu (Yayın no. 10).* Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2023). *K12 Beceriler Çerçevesi Türkiye Bütüncül Modeli Öğretmen Kılavuzu.* Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. *Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2024). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar).* Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. *Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2024). Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Öğretim Programları Ortak Metni.* Ankara.

Topdemir, H. G. (2012). *İslam Dünyasında Felsefenin Öncüsü Kindî. Bilim ve Teknik Dergisi,* 45(777), 74.

Türk Dil Kurumu (2023). T*ürkçe Sözlük (12. baskı).* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Türk Dil Kurumu (2024). *Yazım Kılavuzu (27. baskı).* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Uytterhoeven, G. (1999). *Wavelets: Software and Application. Phd Thesis, Department of Computer Science,* K.U.Leuven, Belgium.

Yavuz, T. (2023). *Matematiğin ve Varlığın Sınırlarına Hârizmî Cebri Üzerinden Yeniden Bakmak. Journal of University Research,* 6(2), 199-210. https://doi.org/10.32329/uad.1207746

Wells, D. (2011). *Geometrinin Gizli Dünyası.* İstanbul: Doruk Yayınları.

**Kaynakça APA6 formatında hazırlanmıştır.*

Cevap Anahtarı

Genel ağ ve görsel kaynakçası

TÜRKİYE'NİN MÜLKİ İDARE BÖLÜMLERİ İLE KARA VE DENİZ KOMŞULARI HARİTASI
BAŞKENT
Ankara
İL MERKEZİ
Elâzığ
GÖL
ÜLKE SINIRI
ÖZERK BÖLGE SINIRI
AKARSU
0 50 100 200 300 400 km
Harita Genel Müdürlüğü tarafından üretilmiştir.
KARADENİZ
AKDENİZ
EGE DENİZİ
HAZAR DENİZİ
MARMARA DENİZİ
ROMANYA
UKRAYNA
RUSYA FEDERASYONU
BULGARİSTAN
YUNANİSTAN
GÜRCİSTAN
ERMENİSTAN
AZERBAYCAN
İRAN
IRAK
SURİYE
LİBYA
MISIR
İSRAİL
LÜBNAN
FİLİSTİN
Batı Şeria
Doğu Kudüs
FİLİSTİN
Gazze Şeridi
KUZEY KIBRIS TÜRK CUMHURİYETİ
GÜNEY KIBRIS RUM YÖNETİMİ
ACARA Ö.C.
NAHOVAN Ö.C. (AZERBAYCAN)
Bükreş
Sofya
Edirne
Kırklareli
Tekirdağ
İstanbul
Kocaeli
Yalova
Sakarya
Düzce
Bolu
Bartın
Zonguldak
Karabük
Kastamonu
Sinop
Samsun
Amasya
Çorum
Tokat
Ordu
Giresun
Trabzon
Rize
Artvin
Ardahan
Kars
Erivan
Tiflis
Gümüşhane
Bayburt
Erzurum
Iğdır
Ağrı
Erzincan
Tunceli
Bingöl
Muş
Van
Bitlis
Siirt
Batman
Hakkâri
Şırnak
Mardin
Diyarbakır
Elâzığ
Malatya
Adıyaman
Şanlıurfa
Gaziantep
Kilis
Osmaniye
Adana
Hatay
Kahramanmaraş
Kayseri
Nevşehir
Aksaray
Niğde
Konya
Karaman
Mersin
Antalya
Isparta
Burdur
Denizli
Muğla
Aydın
İzmir
Manisa
Uşak
Afyonkarahisar
Kütahya
Eskişehir
Bilecik
Bursa
Balıkesir
Çanakkale
Gökçeada
Bozcaada
Atina
Çankırı
Ankara
Kırıkkale
Kırşehir
Yozgat
Sivas
Tuz Gölü
Van Gölü
Urumiye Gölü
Bağdat
Şam
Beyrut
Tel Aviv
Lefkoşa
Erenköy
Tuna N.
Meriç N.
Sakarya N.
Kızılırmak N.
Yeşilırmak N.
Çoruh N.
Kura N.
Aras N.
Fırat N.
Dicle N.
Ceyhan N.
Seyhan N.
Göksu N.
Gediz N.
Bakırçay N.
Küçük Menderes N.
Büyük Menderes N.
Nil N.
Süveyş K.
25°D
30°D
35°D
40°D
45°D
50°D
40°K
35°K

TÜRK DÜNYASI HARİTASI
Bağımsız Türk Devletleri
Türk Cumhuriyetleri, Türk Bölgeleri
Türk Toplulukları
0 250 500 1.000 1.500 2.000 km
TÜRK CUMHURİYETLERİ, TÜRK BÖLGELERİ
1 GAGAVUZ YERİ
2 KARAÇAY-ÇERKESYA
3 KABARDİN-BALKARYA C.
4 DAĞISTAN C.
5 ÇUVAŞİSTAN C.
6 TATARİSTAN C.
7 BAŞKURT C.
8 KARAKALPAKİSTAN C.
9 ALTAY C.
10 HAKASYA C.
TÜRK TOPLULUKLARI
a Avrupa'daki Türkler
b Kosova Türkleri
c Yunanistan Türkleri
ç Bulgaristan Türkleri
d Romanya Türkleri
e Suriye Türkmenleri
f Irak Türkmenleri
g İran Türkleri
h Afganistan Türkmenleri
ı Pakistan Türkmenleri
i Hindistan Türkmenleri
j Çin H. C. Türkleri
k Moğolistan Türkleri
l Rusya Federasyonu Türkleri
ÜLKE KISALTMALARI
ARNAVUTLUK ARN
BELÇİKA BEL
BOSNA - HERSEK BH
GÜNEY KIBRIS RUM YÖNETİMİ GKRY
HIRVATİSTAN HRV
İSVİÇRE İSV
KARADAĞ KRD
KOSOVA KSV
KUZEY KIBRIS TÜRK CUMHURİYETİ KKTC
KUZEY MAKEDONYA KMKD
LİHTENŞTAYN LİH
SIRBİSTAN SRB
TÜRKİYE
KAZAKİSTAN
ÖZBEKİSTAN
TÜRKMENİSTAN
KIRGIZİSTAN
AZERBAYCAN
R U S Y A F E D E R A S Y O N U
SAHA (YAKUT) C.
TUVA C.
SİNCAN UYGUR ÖZERK BÖLGESİ
MOĞOLİSTAN
ÇİN HALK CUMHURİYETİ
HİNDİSTAN
PAKİSTAN
AFGANİSTAN
TACİKİSTAN
İRAN
IRAK
SURİYE
SUUDİ ARABİSTAN
UKRAYNA
BELARUS
POLONYA
ALMANYA
FRANSA
İSPANYA
PORTEKİZ
İTALYA
MISIR
LİBYA
CEZAYİR
TUNUS
Barents Denizi
Norveç Denizi
Kara Denizi
Karadeniz
Akdeniz
Hazar Denizi
Umman Denizi
Ohotsk Denizi
Bering Denizi
Kızıldeniz
Yemen Denizi